MANUEL GARRIDO

LÓGICA SIMBÓLICA

CUARTA EDICIÓN



Diseño de cubierta:
Joaquín Gallego

1.ª edición, 1974
1.ª reimpresión revisada, 1974
2.ª reimpresión revisada, 1977
3.ª reimpresión, 1978
4.ª reimpresión, 1979
5.ª reimpresión revisada, 1981
6.ª reimpresión revisada, 1983
7.ª reimpresión, 1986
8.ª reimpresión, 1989
2.ª edición, 1991
3.ª edición, 1995
Reimpresión, 1997
4.ª edición, 2001
1.ª reimpresión, 2003
2.ª reimpresión, 2005

Juan Ignacio Luca de Tena, 15 - 28027 Madrid
ISBN: 84-309-3747-1
Depósito Legal: M-41.778-2005

Printed in Spain. Impreso en España por Edigrafos

ÍNDICE

LÓGICA DE ENUNCIADOS (CÁLCULO DE CONECTORES)

LÓGICA DE PREDICADOS (CÁLCULO CUANTIFICACIONAL)

AXIOMATIZACIÓN DE LA LÓGICA

AUTOMATIZACIÓN DE LA LÓGICA (LAS BASES LÓGICAS DE LA INFORMÁTICA)

Anexo: BREVE HISTORIA DE LA LÓGICA

PRÓLOGO

La lógica simbólica *o* matemática *forma parte del bagaje cultural del hombre del siglo* XX *y es instrumento imprescindible para el ejercicio de una tarea seria en ciencia o en filosofía. Su estudio proporciona satisfacción intelectual, pero es también de utilidad, porque el radio de sus aplicaciones comprende esferas tan diversas del saber como la matemática, la lingüística, la informática, las ciencias naturales y sociales, la jurisprudencia y la filosofía. Y es un medio no menos idóneo que otros para construir el tantas veces buscado «puente» entre la cultura de letras y la cultura de ciencias.*

Las ciencias analíticas, como es el caso de la lógica, suelen ordenar sus materias yendo de lo simple a lo complejo. De acuerdo con este criterio los discípulos de Aristóteles, padre de la lógica tradicional, la dividían en lógica del concepto, lógica del juicio y lógica de la argumentación o razonamiento (silogística). Desde Frege, padre de la lógica matemática, sus seguidores emplean una estrategia parecida. Empiezan por el análisis de palabras lógicas muy simples, como son, por ejemplo, las que corresponden a las conjunciones gramaticales «y», «o», «si..., entonces...» ; y a esta inicial plataforma (la llamada «lógica de conectores» o «lógica de enunciados») le sobreañaden luego el análisis de palabras lógicas más complejas, como son las que corresponden a las partículas gramaticales de determinación cuantitativa «todo» y «alguno»: ésta es la llamada «lógica de predicados» o «lógica de cuantificadores», que viene a constituir el núcleo más distintivo de la lógica elemental contemporánea.

A este orden se ajusta en lo esencial el presente libro, que se separa, sin embargo, de sus homólogos en cuatro aspectos. El primero es que al tratar la teoría de la cuantificación incluyo un capítulo de revisión de la silogística, donde señalo los principales puntos de fricción y de conexión entre los respectivos núcleos duros de la lógica tradicional y la lógica simbólica.

El segundo obedece a mi propósito de conceder la mayor atención posible a la pluralidad de métodos deductivos. Los sistemas de deducción axiomática tipo Hilbert, las estrategias de deducción natural tipo Gentzen y los métodos de tablas semánticas y analíticas

tipo Beth-Smullyan-Jeffrey son aportaciones alternativas, y cronológicamente sucesivas, de la lógica del siglo XX *a la teoría del razonamiento correcto. Un alumno de humanidades no debe desconocerlas, aunque por motivos prácticos puede convenirle optar por familiarizarse más con una sola.*

La tercera salvedad es que los problemas de metateoría (consistencia, completud, decidibilidad) se abordan en este libro más tarde de lo usual, en el contexto de la axiomatización de la lógica, donde aludo también, muy sumariamente, a la axiomatización de teorías matemáticas.

La cuarta es que dedico la última parte del libro, que introduje en su tercera edición y reviso y amplío en la presente, a la consideración de las relaciones de la lógica con la informática. Estas relaciones no son sólo de mera aplicación, sino también de generación de conceptos fundamentales. Las geniales teorías de Gödel y Turing sobre la indecidibilidad y la computabilidad, aparecidas en la década de los treinta, cuentan entre sus principales cosechas con el corazón o parte del corazón de las teorías que están a la base de la explosión de la informática y la tecnología de la comunicación, cuyo imperio en el resto del siglo se ha tornado hegemónico, desde el advenimiento de los ordenadores en los años cuarenta, hasta la reciente emergencia de Internet. La lógica de la computación es, en cierto modo, el a priori de la informática, que no impulsa ni menos aún constituye los avances de ésta, pero los condiciona canónicamente. En el nuevo capítulo sobre Internet aprovecho el comentario al programa ofrecido en red Tarski's World *para dar una versión más (ideada por Lorenzen y Hintikka) de las reglas de la lógica como juego dialógico.*

Y una última observación. Es bien sabido, por una parte, que el extraordinario desarrollo de los formalismos subsiguiente al intento, protagonizado en el tercio inicial del siglo por Russell, Brouwer y Hilbert, de fundamentar lógicamente las teorías matemáticas tuvo por consecuencia un cierto alejamiento de la lógica respecto de la filosofía. Pero no es menos sabido, por otra, que a partir más o menos de los años sesenta se han reanudado a fondo las relaciones de la nueva lógica con el lenguaje ordinario, el sentido común y las cuestiones perennes del filosofar. A aclarar de alguna manera las ideas del lector sobre las relaciones de la lógica con la filosofía y con la matemática quisiera contribuir la «breve historia de la lógica» que figura como anexo al final de este libro.

* * *

Los títulos marcados con asterisco y los pasajes y notas escritos en tipografía de menor tamaño son aclaraciones especiales, históricas o terminológicas de las que se puede prescindir en una lectura rápida. Para una información sumaria de las técnicas de la lógica elemental no hace falta leerse todo el libro. Bastan los capítulos II-VI y VIII-X. E incluso dentro de esta acotación el lector puede restringir su estudio a un solo método deductivo, sea sintáctico o semántico, concediendo menos atención al alternativo. En las últimas páginas, el lector que quiera saber más encontrará una orientación bibliográfica de libros y artículos de revista que le servirá de ayuda para profundizar su conocimiento en el sentido que estime oportuno.

Doy las gracias por sus críticas, comentarios y correcciones a los catedráticos de Lógica Rafael Beneyto, Alfonso García Suárez, José Sanmartín y Luis Manuel Valdés, como también a Editorial Tecnos por el interés y cuidado que ha puesto en la confección de este libro. De un modo más general, quisiera agradecer asimismo su anónima colaboración a las numerosas promociones de alumnos universitarios de lógica que asistieron a mis clases. De ellos no aprendí menos que ellos de mí.

M. G.

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I

¿QUÉ ES LA LÓGICA?

A. La lógica formal

§ 1. *El uso de argumentos*

Uno de los rasgos que distinguen al hombre de sus antepasados antropoides es el uso del lenguaje. Y un rasgo típico del lenguaje es el uso de argumentos.

Un *argumento* o *razonamiento* es una serie de frases en la cual, de la posición o afirmación de las que preceden se sigue necesariamente la posición o afirmación de la que va al final.

La mejor manera de entender qué sea un argumento es considerar unos cuantos ejemplos muy sencillos. He aquí uno:

> (1) Si hay riesgo de lluvia, baja el barómetro; pero el barómetro no baja. Por tanto, no hay riesgo de lluvia.

Y he aquí otro:

> (2) Todo hombre es mamífero y todo mamífero es vertebrado. Por tanto, todo hombre es vertebrado.

Las principales partes o unidades lingüísticas que integran un argumento son las proposiciones o enunciados. Un *enunciado* o *proposición* es una frase que tiene un sentido completo y que puede ser afirmada con verdad o falsedad. Así son enunciados las expresiones «hay riesgo de lluvia», «el barómetro baja» o «todo mamífero es vertebrado». Los enunciados iniciales de un argumento reciben el nombre específico de *premisas*, y el final el de *conclusión*.

El empleo de argumentos tiene lugar tanto en la vida cotidiana como en el ejercicio de las tareas científicas. Su utilidad resulta obvia si se considera que, gracias a ellos, podemos ampliar reflexivamente nuestro conocimiento. Es claro que la observación lo amplía. Pero al pasar de las premisas de un argumento a su conclusión, incrementando así con ésta el repertorio de las proposiciones que conocemos,

no ponemos en práctica nuestra capacidad de observación, sino de reflexión. El hecho de que además de observar podamos discurrir o razonar aumenta nuestra probabilidad de sobrevivir en el mundo.

Pero veamos todavía otro par de ejemplos. Uno de ellos es un argumento que alcanzó una cierta resonancia en la historia de la biología. En la teoría de la herencia biológica se ha debatido mucho la cuestión de saber si los caracteres que un individuo adquiere durante su vida pueden transmitirse hereditariamente a su prole. Un biólogo de finales del siglo pasado, WEISSMANN, dio una prueba, que muchos especialistas aceptaron, de que los caracteres adquiridos no se heredan. Esa prueba consistió en amputar la cola a ratas durante veinte generaciones seguidas y comprobar después que la generación veintiuna no mostraba en su cola la más leve modificación. El curso del razonamiento de Weissmann se podría resumir así:

(3) Si los caracteres adquiridos son hereditarios, entonces la amputación de un órgano, reiteradamente efectuada a través de una serie de generaciones consecutivas, debiera ser heredada por la prole. Pero no es el caso que una tal amputación sea heredada por la prole. Por tanto, los caracteres adquiridos no son hereditarios.

Y he aquí, finalmente, un cuarto ejemplo:

(4) Todo número natural es racional y todo número racional es real. Por tanto, todo numero natural es real.

§ 2. *La forma de los argumentos*

La simple inspección de estos cuatro casos de argumentos permite advertir que el primero y el tercero (el razonamiento del barómetro y el razonamiento de los caracteres hereditarios) son estructuralmente homologables.

Si en el primer ejemplo se sustituyen los enunciados «hay riesgo de lluvia» y «baja el barómetro» por los símbolos A y B, respectivamente, resultaría el siguiente esquema:

Si A, entonces B;
pero no B.
Por tanto, no A,

que es el mismo al que se llegaría efectuando una sustitución similar en el razonamiento de los caracteres hereditarios. En cada uno de estos dos casos el argumento consiste en la conexión o articulación de dos enunciados mediante las partículas «si..., entonces...», «pero no...» y «por tanto...» en la forma que indica el esquema.

Y algo parecido sucede con los ejemplos segundo y cuarto (el argumento de los vertebrados y el de los números). Representando por *P, Q, R* nombres cualesquiera del tipo de «hombre» o «número», resultaría la siguiente disposición estructural común a ambos:

Todo *P* es *Q* y todo *Q* es *R*.
Por tanto, todo *P* es *R*.

La semejanza o identidad estructural entre los diferentes casos de argumentos se pone de relieve con sólo dejar como estaban los rasgos comunes (los elementos invariantes o *constantes*) de los ejemplos en cuestión y cambiar por símbolos cualesquiera, desprovistos de significado o contenido concreto, las partes diferenciales (los elementos *variables* en cada caso). El resultado es un esquema formal o abstracto, vacío de contenido. A un esquema de esa índole le daremos el nombre de *figura* o *forma lógica* de argumento. (De hecho, el primero de los dos esquemas obtenidos es la forma lógica de un tipo de argumento que fue formulado ya por los filósofos estoicos y ha recibido más tarde el nombre de *modus tollens*. El segundo esquema es la forma lógica de un tipo de argumento que fue formulado ya por Aristóteles: el modo de silogismo de la primera figura, al que los lógicos medievales llamarían *barbara*.)

Un análisis detenido de la estructura formal de estos esquemas tendrá lugar más adelante. Por el momento, baste tomar nota de que hemos advertido una doble dimensión en los argumentos: de un lado la materia o contenido, y de otro la forma o estructura, que es una dimensión esencial desde el punto de vista lógico. Bertrand Russell solía decir que al comprobar la solidez de un razonamiento se pierde el tiempo atendiendo a la materia, porque es la forma lo que ante todo hay que examinar. Su fuerza está en su forma.

§ 3. *La lógica formal*

En realidad, los casos de argumento considerados hasta ahora son triviales y no hace falta ser ningún experto en lógica para deci-

dir si valen o no. Pero basta incrementar levemente su grado de complejidad para que no resulte tan fácil resolver el problema. He aquí, a título de ilustración, un argumento tomado de la aritmética elemental (la demostración del *teorema de Euclides*, según el cual hay infinitos números primos):

> El sucesor del factorial de un número primo *a* cualquiera no es divisible por ningún número primo que divida a dicho factorial. Pero ese sucesor, o bien es primo y mayor que *a,* puesto que sucede al factorial de éste o bien es compuesto, en cuyo caso contiene necesariamente como factor un primo que, por la antedicha razón, es mayor que *a*. Por tanto, cualquiera que sea el número primo *a*, siempre habrá otro mayor que él.

La simple lectura de las premisas de este argumento no le basta al lector medio para aceptar su conclusión, y ello a pesar de ser ésta la prueba de un teorema matemático elemental. Pero nos invita a presumir que la dificultad de comprensión de la citada prueba no está sólo en nuestra falta de familiaridad con la terminología matemática, sino en su estructura lógica.

Expresando en términos más generales esta misma presunción: si el argumento es un utensilio al que constantemente se recurre en el discurso de la vida ordinaria, en las controversias políticas y en las pruebas científicas, parece que tiene interés y sentido la tarea de estudiar los diferentes tipos de esquemas o patrones de confección de tales utensilios, o dicho más precisamente, la tarea de llevar a cabo un inventario de formas o figuras abstractas de razonamiento y proceder al análisis y clasificación de ellas.

Así es como surge la tarea de la *lógica formal*, y así es como se la plantearon los filósofos griegos desde Aristóteles y los estoicos: como un análisis de formas abstractas que tiene cierta semejanza con el trabajo del geómetra. Pues así como los antiguos geómetras consideraban la forma o figura de los objetos físicos en abstracto, prescindiendo o abstrayendo de la materia de que se componen (por ejemplo: la forma o figura de un objeto esférico, prescindiendo del hecho de que sea bronce o mármol la materia que lo constituya), así también los lógicos griegos se interesaron por la foma o figura de los argumentos, haciendo abstracción de su materia o contenido.

En el conocido cuento de Lewis CARROLL *Alicia en el país de las maravillas* la niña que lo protagoniza encuentra en el bosque un

extraño y sonriente felino, el gato de Cheshire, que aparece y desaparece en todo o en parte, según se le antoja, ante la mirada del espectador. En una ocasión desapareció primero su cuerpo, quedando sólo la cabeza, y luego también ésta, quedando sólo la sonrisa del gato. Este insólito fenómeno que deja perpleja a Alicia, «la sonrisa sin gato», es una ilustración en el mundo del sueño, donde transcurre la acción del cuento, de nuestra capacidad imaginativa de abstraer figuras, de figurarnos formas.

De acuerdo con lo dicho, cabe definir la *lógica formal* como una ciencia abstracta que tiene por objeto el análisis formal de los argumentos, o también, y más concisamente, como *teoría formal del razonamiento*.

En lo que sigue, y por economía verbal, la palabra «lógica» [1] se entenderá principalmente en el sentido de «lógica formal». Pero conviene no ignorar que ésta no agota el ámbito de los estudios lógicos. También pueden considerarse parte de la lógica la *teoría de la ciencia*, que estudia más en concreto la metodología de las distintas ciencias particulares, y la *filosofía de la lógica*, que se ocupa de cuestiones tales como saber en qué consiste la verdad lógica, cómo se explica el acuerdo de las leyes lógicas con la realidad, cuál es el *status* científico de esas leyes, si son o no equiparables a las leyes de la física o la psicología, etc.

---

[1] Nota sobre la palabra *lógica*. Esta palabra pertenece desde muy antiguo al léxico filosófico y científico, y forma parte también del uso ordinario del lenguaje, pues es difícil encontrar una persona que no la utilice (como cuando decimos «esto es lógico», «esto no es lógico», «como es natural y lógico», etc.).

Etimológicamente, la voz «lógica» proviene del término griego *lógos*, que significa algo así como «discurso», y entraña a un mismo tiempo el triple significado de «razón», de «idea» y de «palabra».

En la historia de la filosofía, el término «lógica» ha cobrado acepciones tan diversas que apenas si admiten denominador común. Los griegos llamaron «lógica», y también, casi indistintamente, «dialéctica», a la silogística de ARISTÓTELES y a la teoría estoica de la proposición, es decir, a lo que más tarde, y desde KANT, se ha dado en denominar técnicamente «lógica formal». Por su parte, el propio KANT da el nombre de «lógica trascendental» a su crítica filosófica del conocimiento científico, es decir, a lo que más bien sería, al menos parcialmente, competencia de la teoría de la ciencia y de la filosofía de la lógica. Luego HEGEL llamará «lógica», y también «dialéctica», a la metafísica misma. De él se hicieron eco los filósofos marxistas al hablar asimismo de «dialéctica» en un sentido filosófico opuesto al de «lógica formal», aunque sin implicar por fuerza incompatibilidad con esta última. La «lógica simbólica», «lógica matemática» o «logística» es una nueva denominación de la lógica formal en su actual estado de desarrollo.

B. La lógica simbólica

§ 4. *La matematización de la lógica*

La lógica formal nació hace dos mil quinientos años, cuando Aristóteles y los estoicos se interesaron por la construcción y el análisis de esquemas de argumentos.

Desde entonces, y a diferencia de otras ciencias, no ha experimentado desarrollos de gran consideración hasta mediados del siglo XIX.

Un pensador tan avanzado en su tiempo como Kant, que sometió a una revisión durísima la metafísica tradicional, escribe en el prólogo a la segunda edición de su *Crítica de la razón pura* que la lógica «desde Aristóteles no ha tenido que dar un paso atrás» ni «tampoco hasta ahora ha podido dar un paso adelante. Así pues, según toda apariencia, hállase conclusa y perfecta» [2].

Esto fue escrito en 1787. Pero el curso de los acontecimientos ha venido a desautorizar un tanto la visión kantiana de la «inmovilidad» de la lógica. Porque no había de transcurrir mucho más de medio siglo a partir de esa fecha, cuando se inicia un progreso de la lógica formal que no encuentra precedente desde la época de los griegos.

La clave de este progreso se halla en las revolucionarias aportaciones del inglés Boole (hacia la mitad del siglo pasado) y del alemán Frege (último tercio del XIX) relativas a lo que suele denominarse la *matematización de la lógica*. Por «matematización» se entiende en metodología científica la subordinación de una ciencia al método de la matemática. De las ventajas inherentes a la matematización es claro ejemplo el caso de la física, que comenzó a marchar por el camino seguro del progreso científico desde que, en el siglo XVII, Galileo la sometió al rigor del método matemático.

De una matematización de la lógica puede hablarse en la medida en que ésta incorpora plena y eficazmente a sus técnicas de trabajo la exactitud y el rigor del método matemático. Condiciones necesarias de ello son la construcción de un lenguaje simbólico adecuado y la formulación precisa de las reglas de operación, que son la base de los cálculos.

---

[2] *Crítica de la razón pura,* B VIII.

§ 5. *El uso de símbolos*

En realidad, al uso de símbolos recurrieron ya los lógicos griegos, al emplear esquemas argumentales del tipo de: «Si A, entonces B; pero no B. Por tanto, no A» y otros similares. Pero tal simbolización quedaba restringida a los elementos *variables* de los esquemas lógicos. Los elementos *constantes* de dichos esquemas (esto es, las partículas lingüísticas del tipo de «todo», «es», «si..., entonces...», «no», «por tanto», etc., que constituyen, por así decirlo, el tema propio de la lógica) no fueron aún simbolizados. Y justamente una de las más radicales innovaciones que entraña la matematización de la lógica reside en la formalización o simbolización de esas constantes. Si se conviene, por ejemplo, en representar la partícula «si..., entonces» por una flecha: «$\rightarrow$», la partícula «no» por el símbolo: «$\neg$», y la partícula «por tanto» por el símbolo: «$\vdash$», y se toma el acuerdo de dejar a un lado de momento, por innecesaria, la palabra «pero», el esquema de argumento que se acaba de reseñar (y que es, como se indicó en página anterior, el clásico *modus tollens*) quedaría formulado así:

$$A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A.$$

Hasta qué punto la potencia operativa del cálculo depende de la formalización del lenguaje en que se apoya, es algo que puede comprobarse ensayando la realización de multiplicaciones y divisiones sin recurrir al simbolismo aritmético, con la sola ayuda del lenguaje ordinario. Aunque se dominen las reglas de operación, la falta de simbolismo adecuado dificulta extraordinariamente la marcha del cálculo.

Pero hay una segunda ventaja, no menos importante, que la matematización del cálculo lógico lleva consigo. El uso de un simbolismo adecuado no sólo permite un mayor grado de seguridad y exactitud en la construcción de argumentos, sino también una mayor precisión en la formulación de las reglas que los gobiernan. De hecho, la expresión «$A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$», no es, propiamente hablando, un argumento, sino una «regla» de argumento, o mejor , la formulación precisa y exacta de la estrategia lógica que sirve de base a los argumentos del tipo *modus tollens*, y que se enuncia verbalmente así: si de una hipótesis se sigue una consecuencia y esa consecuencia no se da,

la hipótesis en cuestión debe ser rechazada. La distinción, asimismo introducida por la nueva lógica entre «lengaje objeto», o lenguaje acerca del cual se habla, y «metalenguaje», o lenguaje en el cual se habla acerca de otro lenguaje, ayuda a establecer con más nitidez la diferencia entre un razonamiento y sus reglas.

La matematización de la lógica ha tenido como resultado un mayor y más perfecto control técnico en la práctica del razonamiento, un mejor conocimiento teórico de las leyes lógicas y el descubrimiento de nuevos y variados sistemas de reglas de razonamiento que de otro modo no es fácil que hubieran sido detectados.

En el actual desarrollo de la ciencia y la tecnología informáticas la lógica simbólica ha cumplido una importante función.

§ 6. *Lógica tradicional y lógica simbólica*

A la lógica formal tal y como ha venido siendo clásicamente cultivada, desde Aristóteles a Kant, se le suele dar el nombre de *lógica tradicional*. A la lógica formal en su actual estado de matematización o plena formalización, se le han dado los nombres de *lógica simbólica, lógica matemática* y *logística* (a propuesta de COUTURAT, ITELSON y LALANDE en el Congreso Internacional de Filosofía de Ginebra de 1904), y también el de *álgebra lógica*[3].

La cuestión de las relaciones entre la lógica tradicional y la lógica simbólica divide a los autores. Hay quienes opinan que la única lógica que merece el nombre de ciencia es la lógica tradicional y la lógica simbólica es tan sólo un arte tan enrevesado como superfluo. El punto de vista opuesto está representado por los que piensan que las enseñanzas de la lógica tradicional son o inútiles o falsas. Probablemente sea más sensato considerar que las relaciones entre la lógica tradicional y la lógica simbólica no son de oposición, sino de evolución: las que hay entre una ciencia en su estado inicial de constitución y esa misma ciencia en su estado de madurez, como las que se dan entre la matemática de

[3] Las denominaciones «lógica matemática» y «logística» se remontan a LEIBNIZ. La denominación «lógica simbólica» tiene su origen en VENN. La de «álgebra lógica» se debe a BOOLE.

Pitágoras o Euclides y la moderna matemática. (Aunque tampoco se puede descartar el punto de vista de que la lógica de Aristóteles y la lógica de Boole y Frege representan paradigmas del razonamiento humano que no son del todo conmensurables.) La etiqueta «lógica simbólica» o «lógica matemática» no es, pues, sino una nueva manera de denominar la lógica formal, aludiendo a su actual estado de desarrollo, es decir, a la lógica formal *formalizada*.

En un sentido más preciso, sin embargo, cabría distinguir las denominaciones de «lógica simbólica» y «lógica matemática», entendiendo por esta última la aplicación o extensión de la lógica simbólica a cuestiones matemáticas.

§ 7. *Sumario*

* Un *argumento* es una serie de proposiciones en la cual de la aceptación de las que preceden se sigue necesariamente la aceptación de la que va al final.

* Una *proposición* o *enunciado* (en términos gramaticales: una *oración declarativa*) es una frase que tiene sentido completo y puede ser afirmada con verdad o falsedad.

* El uso de argumentos es uno de los rasgos más característicos del animal racional que es el hombre y le sirve de ayuda en la vida práctica y en el estudio científico de la naturaleza.

* La *forma* es un factor decisivo en el diseño de los argumentos.

* La *lógica formal* es la ciencia que estudia la forma y la valoración de los argumentos.

* La lógica formal fue creada y desarrollada por ARISTÓTELES y los filósofos ESTOICOS hace más de dos mil años.

* Desde la segunda mitad del siglo pasado y gracias a la revolución científica protagonizada por BOOLE y FREGE, que tomó por modelo pautas metodológicas del simbolismo matématico, la lógica formal ha alcanzado como LÓGICA SIMBÓLICA O MATEMÁTICA un desarrollo comparable al que experimentó la física en el siglo XVII gracias a la revolución científica protagonizada por GALILEO.

CAPÍTULO II

EL LENGUAJE DE LA LÓGICA

A. DEL LENGUAJE ORDINARIO AL LENGUAJE LÓGICO

§ 1. *Lenguaje natural y lenguaje formal. Constantes y variables*

La lógica coincide con la gramática en su interés por el lenguaje, y de ahí que el análisis lógico sea también, en cierto modo, análisis lingüístico.

Pero el lenguaje que interesa a la lógica no es sólo, ni principalmente, el lenguaje *natural* u ordinario, siempre relativo a una comunidad histórica de hablantes más o menos numerosa y sembrado de redundancias, lagunas y ambigüedades. La lógica formal pretende ser una ciencia universal, tan rigurosa como la matemática, que suministre la capacidad de realizar operaciones y cálculos de modo exacto. Ello prerrequiere la confección de un lenguaje *artificial*. De un modo muy general, puede decirse que toda ciencia ha de recurrir al empleo de un lenguaje artificial, del que forma parte, por ejemplo, el repertorio de términos técnicos propio de cada una. Pero en el caso de la matemática y la lógica, el lenguaje artificial requerido es *formal* o *simbólico*. Un lenguaje de esta índole implica dos cosas. Una de ellas es el uso de símbolos abstractos, que se dividen en dos grandes categorías: símbolos *constantes*, con un sentido fijo dentro del lenguaje en cuestión, como es el caso, por ejemplo, de los signos «+» e «=» en aritmética elemental, y símbolos *variables*, cuyo sentido es oscilante, pues cambia de unos casos a otros según el contexto, como sucede, por ejemplo, con las letras «*x*» e «*y*» en las expresiones aritméticas. La otra es un repertorio de reglas explícitas por las que se establezca el uso de los términos y la formación y transformación de fórmulas o enunciados.

El lenguaje artificial de la nueva lógica, del que hoy existe una amplia gama de variantes dialectales, fue establecido en sus líneas básicas por FREGE en 1879. El propósito de este capítulo es exponer ese lenguaje, al que se acostumbra a dar el nombre técnico de *lenguaje formal de primer orden*. Primero lo introduciré gradualmente, considerando en qué medida pudiera proceder y en qué difiere del

lenguaje natural ordinario, y luego resumiré sintéticamente su gramática.

§ 2. *Predicaciones (enunciados atómicos)*

a. Sujetos y predicados

Es un hecho que el uso del lenguaje nos da la posibilidad de: (a) designar objetos o individuos del universo, trátese de personas, cosas o sucesos, mediante palabras que la gramática llama *nombres propios*; y (b) designar propiedades o notas de los objetos mediante palabras que la gramática llama *nombres comunes*.

Así por ejemplo:

Lenin, Támesis

son nombres propios de objetos; y

bolchevique, río

son nombres comunes, denotativos de propiedades de objetos. Conviene advertir que por «nombre común» se entienden aquí no sólo los así llamados en gramática ordinaria, como «hombre» o «piedra», sino también adjetivos y verbos, como «blanco» o «quema».

A los nombres propios les llamaremos también, en terminología lógica, *sujetos*; y a los nombres comunes, *predicados* o *predicadores*. Tanto los sujetos como los predicados han recibido tradicionalmente la común denominación de *términos*, aunque hoy se tiende a llamar así sólo a los sujetos.

b. Predicados absolutos y relativos

Por su parte, el concepto de predicado requiere una nueva precisión. Unas veces la nota designada por el predicado es una cualidad o rasgo que conviene o puede convenir simplemente a un objeto: tal es el caso de los predicados «bolchevique», «río» que se acaban de aducir. Pero otras veces la nota designada por el predicado es una relación que se da entre dos o más objetos: tal es el caso, por ejem-

plo, de los predicados «matar», «estar al norte de», «ser mayor que», «estar entre», y otros similares.

A los predicados del primer tipo los llamamos predicados *absolutos* o, siguiendo a QUINE y PEIRCE, *monádicos*. A los del segundo tipo los llamamos *relativos* o *poliádicos*.

A su vez los predicados poliádicos se pueden dividir en diádicos, triádicos..., *n*-ádicos, según que la relación por ellos designada ponga en conexión dos, tres o *n* objetos. Por ejemplo, el predicado «ser mayor que» es diádico, mientras que «estar entre» es triádico.

c. *Enunciados atómicos*

En nuestro uso ordinario del lenguaje atribuimos propiedades a objetos mediante la unión o composición de nombres propios con nombres comunes para formar enunciados [1] de estructura muy simple. A la expresión resultante de este tipo de composición le damos el nombre de *enunciado atómico* o *proposición atómica* [2], y también el de *predicación* o *proposición simple* o *primitiva*. Así por ejemplo, las expresiones:

Lenin es bolchevique
El Támesis es un río

son enunciados atómicos.

[1] Un *enunciado* es, como ya se dijo en el capítulo anterior, una frase que tiene sentido completo y que puede ser verdadera o falsa (véase capítulo I, § 1).

Sinónimos de «enunciado» pueden considerarse también las palabras «oración», «sentencia» y «proposición», aunque no todos los autores modernos estén de acuerdo en ello. Los autores ingleses suelen distinguir entre *sentence* (sentencia, oración) y *proposition* (proposición). Una oración (sentencia) sería la expresión, oral o gráfica, de una proposición; y una proposición, el contenido expresado por una oración. Por ejemplo, las tres expresiones «il pleut», «it is raining» y «llueve» son tres oraciones distintas que expresan una sola proposición. Los autores alemanes utilizan normalmente la palabra *Aussage* (enunciado) en el sentido del inglés *sentence*. En este mismo sentido se utilizará preferentemente «enunciado» en el curso del presente libro. Pero sin excluir, en ocasiones, el uso sinónimo de la palabra «proposición».

Recientemente la palabra inglesa *statement* (cuya traducción puede ser «enunciado») es utilizada por varios autores en un sentido distinto tanto de *sentence* como de *proposition*. Un «enunciado» en este sentido sería lo significado por dos oraciones como «yo tengo calor» y «tú tienes calor», cuando la persona a la que se refieren los pronombres «yo» y «tú» es la misma. Sobre la diferencia entre oración, enunciado y proposición, véase Susan HAACK, *Filosofía de las lógicas*, Colección Teorema, Cátedra, Madrid, 1981, Cap. 6, §2.

[2] El concepto de «proposición atómica» procede de RUSSELL, y fue utilizado también, aunque en distinto sentido, por WITTGENSTEIN.

De acuerdo con la terminología establecida en la sección anterior, diremos que si un enunciado atómico (una predicación) se compone de sujeto y predicado, podemos considerar éstos como elementos subatómicos [3].

La tarea de formalizar enunciados atómicos se reduce a elegir dos tipos de símbolos, denotativos, respectivamente, de objetos individuales y de propiedades, y a ponerse de acuerdo en el modo de combinarlos.

Convengamos en utilizar como símbolos denotativos de objetos a las primeras letras minúsculas del alfabeto:

a, b, c, etc.;

y como denotativos de propiedades y relaciones a las mayúsculas

P, Q, R, etc.

A los primeros los llamaremos *constantes subjetivas* o *individuales*; y a los segundos, *letras predicativas*. Tales símbolos desempeñarán en el lenguaje simbólico las funciones respectivas de los nombres propios y los comunes en el lenguaje natural.

Y convengamos, en segundo lugar, en construir el enunciado mediante la mera yuxtaposición de los símbolos correspondientes, estipulando que vaya por delante el símbolo predicativo, lógicamente principal.

De acuerdo con este criterio, y si se conviene en utilizar el siguiente esbozo de diccionario simbólico:

a como constante individual denotativa del objeto individual Lenin,
b como constante individual denotativa del objeto individual Támesis,
P como letra predicativa para denotar la propiedad de ser bolchevique,
Q como letra predicativa para denotar la propiedad de ser un río,

cabe formalizar los dos enunciados atómicos citados concatenando al efecto los símbolos denotativos de sus respectivos elementos:

---

[3] En nuestro análisis hemos comenzado diciendo qué es sujeto y qué es predicado antes de decir qué sea una predicación (enunciado atómico). Pero no es seguro que este orden de ideas sea el natural y espontáneo del conocimiento. En el orden natural, es probable que sean primero conocidas las predicaciones como entidades lingüísticas de una sola pieza y luego, por reflexión, las descompongamos conscientemente en sus elementos, que son los términos.

Lenin es bolchevique .... *Pa*
El Támesis es un río .... *Qb*.

Las expresiones formales «*Pa*» y «*Qb*», se leen: «*P* de *a*» y «*Q* de *b*», respectivamente [4].

En el caso de enunciados atómicos cuyos predicados sean poliádicos, como

Bruto mató a César.
Londres está al norte de Madrid.
Tres es mayor que dos.
Suiza está entre Italia y Alemania.

la formalización se efectúa colocándo después de la letra predicado correspondiente las constantes individuales que procedan en el mismo orden en que habitualmente aparezcan sus respectivos correlatos en el lenguaje natural. Así «Bruto mató a César» se simbolizaría (eligiendo *R, a, b* para representar, respectivamente, la acción de matar y los individuos Bruto y César):

$$Rab.$$

Y «Suiza está entre Italia y Alemania» (siendo *S*: estar entre; *c*: Suiza; *d*: Italia y *e*: Alemania) quedaría simbolizada así:

$$Scde.$$

[4] Algunos autores prefieren escribir: $P(a)$, $Q(b)$, etc., encerrando entre paréntesis los símbolos del individuo. Este criterio de anteponer, en sentido inverso al orden del lenguaje natural, la letra predicado a la constante individual, como también la lectura de esas expresiones, se inspira en el sistema de notación de funciones usual en matemática. Según dicho sistema, las expresiones de función tales como

$$f(x)$$

o

$$g(x, y)$$

presentan primero los símbolos que juegan el papel determinante («*f*» o «*g*» en estos dos casos), mientras que los elementos determinados («*x*», en el primer caso, «*x*», «*y*» en el segundo) figuran detrás.

d. *Verdad y falsedad. Principio de bivalencia*

Un enunciado atómico es verdadero cuando es conforme con los hechos, esto es, cuando la propiedad designada por el predicado corresponde realmente al objeto u objetos individuales de que se trate. En caso contrario el enunciado es falso. Así por ejemplo, el enunciado atómico «El Támesis es caudaloso» será verdadero si el río Támesis posee realmente la propiedad de ser caudaloso, y será falso si no es ese el caso. La cuestión de decidir acerca de la verdad o falsedad de un enunciado atómico no es, como gustaba advertir WITTGENSTEIN, un problema de análisis lógico, sino de información empírica, porque el enunciado atómico dice siempre algo sobre los hechos, y no es la lógica, sino la experiencia la que informa sobre la verdad o falsedad de un enunciado de esa índole.

De las nociones fundamentales de *verdad* y *falsedad* nos ocuparemos más a fondo ulteriormente, en los capítulos de semántica. Por el momento nos limitaremos a introducir los siguientes términos técnicos: cuando un enunciado sea verdadero, se dirá de él que tiene *valor de verdad positivo*; y cuando sea falso, que tiene *valor de verdad negativo*. A la verdad y falsedad de los enunciados se les dará, pues, el nombre común de *valores de verdad* [5]; la primera es el valor de verdad positivo y la segunda el negativo. (Esta terminología, como también el principio a que se alude a continuación, es aplicable a cualquier enunciado aunque no sea atómico.)

Tradicionalmente la lógica se ha dejado gobernar por un principio o supuesto básico según el cual *todo enunciado es verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez*. Este principio, que es de origen aristotélico, recibe el nombre de *principio de bivalencia*. La lógica simbólica lo ha seguido dando por válido hasta el presente siglo, en que se ha planteado sistemáticamente el problema de su no aceptación, lo cual lleva consigo una serie de consecuencias filosóficas y técnicas del mayor interés, entre ellas el surgimiento de las llamadas *lógicas no clásicas* [6]. A la lógica, sea o no tradicional, que se con-

---

[5] La idea de designar la verdad y la falsedad como «valores de verdad», por la que se extiende al orden lógico la terminología usual en la teoría matemática de funciones, procede de PEIRCE y FREGE.

[6] Entre las lógicas no clásicas figuran las *lógicas multivalentes*, que consideran que el número de valores de verdad de los enunciados puede ser superior a dos («verdadero», «falso», «indeterminado», etc.). Estas lógicas tienen aplicación, entre otros campos, en la formalización de las teorías indeterministas de la física cuántica.

forme al principio aristotélico de bivalencia, se la llama *clásica*. En el presente libro se adopta el punto de vista de la lógica clásica.

e. *Variable individual. Forma enunciativa*

Dada la siguiente serie de enunciados atómicos:

Picasso es pintor
Dalí es pintor
Chagall es pintor,

cabe distinguir en ellos una porción común a todos, que permanece invariante, a saber el predicado «es pintor» y un elemento variable, que es el sujeto en cada una (Picasso, Dalí, Chagall).

Si quisiéramos destacar o especificar la parte común a dichas proposiciones, dejando en blanco o sin especificar el espacio destinado a la parte variable, el esquema resultante sería, por ejemplo:

— es pintor

o también

x es pintor.

Este proceso puede ser reflejado en nuestro lenguaje simbólico. Representando el predicado «es pintor» por la letra «*P*» y eligiendo tres constantes individuales que correspondan a los tres sujetos mentados (Picasso, Dalí, Chagall), los tres enunciados atómicos en cuestión se simbolizarían:

Pa
Pb
Pc,

y el esquema especificativo de la parte común a ellos sería:

Px

donde «*x*» no es una constante individual, sino una variable. Un esquema de esta índole hace uso de una nueva categoría de símbolos,

las *variables individuales* o *subjetivas*, que se representarán, de aquí en adelante, mediante las últimas letras minúsculas del alfabeto: x, y, z.

La variable individual es un símbolo ambiguo, porque no designa a un individuo concreto o determinado, sino, indeterminada o imprecisamente, a *cualquiera* de los individuos integrantes de un *universo*, esto es, de un conjunto, clase o dominio que se da por supuesto al utilizar la variable; y de cada uno de los individuos que lo integran se dice que es un *valor* de la variable. En nuestro ejemplo, el dominio de x puede estar integrado por los tres individuos cuyo nombre propio se adujo; o también, si así se conviniese, por el conjunto de los artistas, o por el más amplio de los seres humanos, esto es, por cualquier conjunto de cuyos individuos pueda predicarse con sentido, ya sea verdadera ya sea falsamente, la propiedad de ser pintor.

La variable individual desempeña en el lenguaje simbólico un papel semejante al del pronombre en el lenguaje natural. En la expresión «él es pintor», la partícula «él» es una especie de variable, que puede tomar diversos valores según el contexto. Las incógnitas de las ecuaciones matemáticas son también elementos similares a las variables lógicas de individuo.

Forma enunciativa. Adviértase que la expresión anteriormente construida: «Px», no es, propiamente hablando, un enunciado, sino una *forma* o matriz de enunciado. Empleando términos de filosofía kantiana, podría hablarse a este respecto de «concepto vacío». Ese vacío se llenaría introduciendo en el lugar de «x» el símbolo de un individuo determinado del universo que se haya dado por supuesto. Sólo entonces puede decirse que la expresión en cuestión se convierte en enunciado y es susceptible de ser considerada verdadera o falsa.

Para designar esquemas como «Px» y otros similares utilizaremos el nombre técnico de *forma enunciativa* o *función proposicional* [7], a la que se puede definir así: una expresión que contiene variables individuales y que se convierte en proposición cuando las variables individuales son sustituidas por valores de sus correspondientes dominios. Conviene advertir que el concepto de función proposicional vale para cualquier esquema de proposición, atómica o no.

Aplicando esta definición a nuestro esquema: «Px» es una función proposicional,

---

[7] El concepto de *función proposicional*, que es una extensión al orden lógico del concepto matemático de función, es original de FREGE y fue incorporado por WHITEHEAD y RUSSELL al sistema lógico de los *Principia mathematica*. Una consideración más detenida de los conceptos de función matemática y función lógica tendrá lugar en los Capítulos IV y XII. Sobre el concepto de forma lógica y su diferencia con respecto al de función lógica, puede consultarse A. CHURCH, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, 1956, pp. 10 ss. y 19 ss.

porque es una expresión que contiene una variable individual (a saber, «*x*») y que se convierte en proposición cuando ésta es sustituida por valores de su dominio (en nuestro caso cuando «*x*» es sustituida por «*a*», «*b*» o «*c*»).

§ 3. *Conectores*

a. La composición de enunciados

Un fenómeno común al lenguaje ordinario y al lenguaje científico es la composición de enunciados. Dados dos o más enunciados cualesquiera, por ejemplo, este par: «Freud vivió en Viena», «Freud publicó su *Interpretación de los sueños* en 1900», es posible combinarlos mediante partículas tales como «y», «o» y otras similares para formar enunciados *compuestos* o *moleculares*, verbigracia, en este caso: «Freud vivió en Viena y publicó su *Interpretación de los sueños* en 1900».

La parte de la lógica que se ocupa del estudio de la composición de enunciados mediante el empleo de partículas tales como «y», «o» y otras similares, recibe el nombre de *lógica de enunciados* o *lógica proposicional* (y también el de *lógica composicional*). La lógica de enunciados es la parte más elemental y básica de la lógica [8].

El estudio de la composición de enunciados deberá distinguir, obviamente, entre los enunciados a componer y los nexos composicionales, o partículas lingüísticas que permiten establecer la composición.

Dichos nexos o partículas coinciden, más o menos, con las partes de la oración que la gramática tradicional estudia bajo el título de «conjunciones» —aunque, en rigor, no toda conjunción gramatical tiene el mismo grado de interés para la lógica deductiva, pues hay muchas de ellas, como, por ejemplo, las partículas «pero» o «sin embargo», cuya función es más retórica que lógica—. Las conjunciones gramaticales y partículas afines a ellas cuyo estudio tiene interés en esta parte de la lógica son, sobre todo, cuatro: «no», «y», «o», «si..., entonces...». A estas partículas, y a otras similares a ellas, se les dará en nuestra teoría el nombre técnico de *conectivas* o *conectores* o, también, *juntores* [9].

---

[8] La lógica de enunciados fue descubierta y sistematizada por los estoicos. Los tratados de lógica tradicional se han solido ocupar de ella en los capítulos dedicados a la «teoría de la proposición compuesta». Pero sólo desde BOOLE y FREGE ha alcanzado esta teoría un nivel de plena formalización.

[9] El término *juntor* se debe al lógico alemán LORENZEN.

Objeto de la lógica de enunciados es formalizar y definir los juntores y estudiar las leyes de combinación y deducción de los enunciados fundadas en tales nexos. A la lógica de enunciados la llamamos también, más propiamente, *lógica de conectores*.

A continuación procederemos al examen de cada uno de los conectores, con vistas a la construcción de un lenguaje formal de enunciados cuyas constantes sean, justamente, estas partículas. A los elementos variables del mismo (los enunciados) los designaremos mediante las letras del alfabeto en minúscula: *p*, *q*, *r*... A estas letras les daremos el nombre de *letras enunciativas* o *proposicionales*.

b. Negador

El símbolo «¬» recibe el nombre de *negador*, y puede ser considerado como la traducción al lenguaje formal de la partícula «no» del lenguaje ordinario. (En los *Principia mathematica* se usa como símbolo la tilde: «~»).

Al adosar el negador a una expresión enunciativa cualquiera, por ejemplo, a la variable «*p*», el resultado es la negación de ésta: «¬*p*», que se lee «no *p*» o «no es cierto que *p*» o «es falso que *p*».

El negador tiene, como se acaba de indicar, el mismo significado que la partícula «no» del lenguaje ordinario. Al negar un enunciado, nuestra intención es decir que ese enunciado es falso. Semejante función guarda un cierto parecido con la del signo «—» en álgebra ordinaria: *si un enunciado es verdadero* (valor de verdad positivo) *su negación es falsa* (valor de verdad negativo); *y si un enunciado es falso* (valor de verdad negativo) *su negación es verdadera* (valor de verdad positivo).

Las condiciones de verdad de la negación se pueden representar en una tabla del siguiente modo:

p	¬*p*
V	F
F	V

La columna inicial recoge los posibles valores de verdad de un determinado enunciado, *p*. La columna siguiente indica los valores

de verdad que corresponden, consecuentemente, a la negación de ese enunciado. «V» y «F» son abreviaturas de «verdadero» y «falso».

c. *Conjuntor*

El símbolo $\wedge$ recibe el nombre de *conjuntor*, y puede ser considerado como la versión formal de la partícula del lenguaje ordinario «y».

La combinación de dos expresiones, por ejemplo, de las dos variables proposicionales «p», «q» mediante el conjuntor es la *conjunción* de ellas: «$p \wedge q$», que se lee «p y q».

El significado del conjuntor es idéntico al de «y» en lenguaje ordinario. *Una conjunción afirma la verdad de sus componentes. Es verdadera, pues, cuando sus dos componentes son verdaderos; cuando uno de ellos es falso, y por tanto, también cuando los dos son falsos, la conjunción es falsa.*

Así, por ejemplo, la proposición «Napoléon invadió Rusia en 1812 y murió en la isla de Elba» es una conjunción falsa, porque aunque el primero de sus miembros es verdadero, el segundo es falso (Napoleón no murió en la isla de Elba, sino en Santa Elena). Análogamente, la fórmula «$p \wedge q$» será verdadera sólo si cada uno de sus componentes «p» y «q» lo son.

El conjuntor recibe también el nombre de símbolo del *producto lógico*. En los *Principia mathematica* se lo representa por un punto «.», por analogía con el producto aritmético.

Las condiciones de verdad de la conjunción se pueden representar en una tabla de análoga confección a la expuesta para la negación. En las dos primeras columnas se indican ordenadamente las cuatro combinaciones posibles de verdad y falsedad de las proposiciones «p» y «q». La tercera columna indica los valores de verdad que convienen, para cada uno de esos cuatro supuestos, a la conjunción de ambas proposiciones.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

d. Disyuntor

El símbolo «∨» recibe el nombre de *disyuntor*, y se lo puede considerar como una traducción al lenguaje formal, aunque sólo parcial e incompleta, de la partícula del lenguaje ordinario «o». Se lo denomina también el símbolo de la *suma lógica*.

La correspondiente composición de expresiones, por ejemplo, de las letras preposicionales «*p*», «*q*», es la *disyunción* de ellas: «$p \vee q$», que se lee: «*p* o *q*».

El significado del disyuntor es el siguiente: *la disyunción de dos proposiciones es verdadera cuando una al menos de esas dos proposiciones es verdadera* —y por supuesto cuando ambas lo son—; *es falsa*, en cambio, sólo *cuando ambas son falsas*. Así por ejemplo, la disyunción «$p \vee q$» (representando «*p*» a la proposición «Kant nació en Königsberg» y «*q*» a la proposición «Kant nació en Berlín») es, según lo dicho, verdadera, porque uno de sus componentes (el primero) es cierto, aunque el otro sea falso.

Es fácil ver que las condiciones de verdad de la disyunción son, por así decirlo, la imagen invertida de las condiciones de verdad de la conjunción. Para probar la verdad de una conjunción hace falta probar la de todos y cada uno de sus miembros; para probar la verdad de la disyunción, basta probar la de uno. Recíprocamente sucede con la falsedad: la falsedad de una conjunción se establece con sólo probar la de uno de sus miembros; mientras que la falsedad de una disyunción requiere probar la de todos y cada uno.

Aludiendo a ello, el disyuntor en nuestro lenguaje formal: «∨» representa la imagen tipográfica inversa del conjuntor «∧».

Las condiciones de verdad del disyuntor se pueden representar en una tabla así:

p	*q*	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción exclusiva y disyunción inclusiva

Conviene insistir en que el significado del disyuntor coincide sólo parcialmente con el significado de la partícula «o» en el lenguaje ordinario.

La partícula «o» del lenguaje ordinario tiene dos sentidos:

a) Uno de ellos es el llamado *exclusivo*, según el cual la disyunción establece que uno de sus miembros es verdadero y el otro falso, con lo que se excluye, por tanto, la posibilidad de una simultánea verdad de ambos.

Así, por ejemplo, cuando un juez pregunta al jurado si un hombre es culpable o no culpable, se entiende, por lo general, que el sentido de la partícula «o» es exclusivo.

b) Otras veces, en cambio, el uso vulgar de la partícula «o» no excluye la verdad simultánea de los dos miembros de una disyunción. Es decir, al combinar dos proposiciones mediante la referida partícula, se indica que una al menos de esas dos proposiciones es verdadera, pero no se dice nada respecto de la otra, con lo cual no se excluye la posibilidad de que esa otra sea también verdadera.

He aquí un ejemplo: «para estudiar filosofía en la Universidad de Valencia es preciso saber inglés o alemán». Con esta cláusula se indica que el conocimiento de al menos uno de los dos idiomas citados es condición necesaria del estudio de la filosofía en la Universidad de Valencia, pero no se excluye, ni mucho menos, la posibilidad de que sea admitida para tal estudio una persona que conozca tanto el inglés como el alemán.

A este segundo uso de la partícula «o» se le llama *no exclusivo*, y también *inclusivo*.

La diferencia entre uno y otro sentido de la partícula «o» la expresa claramente el latín mediante dos palabras distintas: *vel* («o» inclusiva) y *aut* («o» exclusiva).

En lógica de juntores el símbolo «∨» *es la versión formal de la* «o» *inclusiva*. El sentido de «$p \vee q$» es, por tanto, «una de las dos proposiciones que componen esta disyunción, o acaso ambas, es verdadera».

La idea que encierra la disyunción exclusiva es, en cambio, «uno de los dos extremos de la disyunción es verdadero, pero no ambos». Con ayuda del disyuntor («o» inclusiva), del negador y del conjuntor, y recurriendo al uso de paréntesis, esa idea se podría expresar formalmente así:

$$(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q).$$

e. Implicador

El símbolo «→» recibe el nombre de *implicador* o *condicionador* y puede ser considerado como una formalización, aunque sólo parcial e incompleta, de la partícula del lenguaje ordinario «si..., entonces...» En los *Principia mathematica* y en muchos tratados anglosajones el símbolo del implicador es una herradura « ⊃».

La unión de dos expresiones enunciativas, por ejemplo «p» y «q» mediante implicador es la *implicación* de ellas: «$p \rightarrow q$», que se lee: «si p, entonces q», o también «p implica q». La expresión que precede al implicador se denomina *antecedente*, y la que le sucede, *consecuente* o *consiguiente*.

El sentido del implicador es el siguiente: *una implicación es verdadera siempre que no se dé el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso; y falsa cuando ese sea el caso.* La implicación es verdadera, por tanto, cuando ambos extremos son verdaderos, cuando ambos son falsos, y cuando el primero es falso y el segundo verdadero. Otra manera de decir lo mismo: una implicación es verdadera cuando su antecedente es falso o cuando su consecuente es verdadero.

Ejemplo: sea «p» un símbolo representativo del enunciado «3 es mayor que 2», del que sabemos que es verdadero; y sea «q» un símbolo representativo del enunciado «la Tierra es redonda», del que sabemos también que es verdadero. En tales circunstancias es claro que de las cuatro implicaciones siguientes

1. $p \rightarrow q$
2. $p \rightarrow \neg q$
3. $\neg p \rightarrow q$
4. $\neg p \rightarrow \neg q$,

sólo la segunda: «$p \rightarrow \neg q$» es falsa, pues sólo en ella, y teniendo en cuenta la interpretación establecida, se da el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Las condiciones de verdad del implicador se pueden resumir en la siguiente tabla:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La definición que se acaba de dar del implicador parece chocar con el uso ordinario de la partícula «si…, entonces…», que suele envolver la idea de que existe algún tipo de relación interna entre el contenido del antecedente y el contenido del consecuente. A la luz de esa idea antójase, cuando menos, extravagante, la combinación mediante implicador de proposiciones que nada tienen que ver entre sí.

Ello puede aclararse un tanto si se considera que el criterio o punto de vista de la lógica de juntores se atiene estrictamente al valor de verdad de las proposiciones y no tiene en cuenta para nada el contenido de éstas ni las posibles relaciones de contenido entre ellas. A este criterio se le llama *extensional.* Con tal criterio, el problema de saber si dos proposiciones se implican, se resuelve mecánicamente, tan pronto se posea

información acerca del valor de verdad de éstas, incluso aunque se ignore su contenido [10].

Por lo demás, hay siempre una coincidencia, al menos parcial, entre el uso extensional y el uso ordinario de la partícula «si..., entonces...». Por de pronto, jamás se da por válida en lenguaje ordinario una implicación que viole la regla mentada, es decir, que posea un antecedente verdadero y un consecuente falso. Por otra parte, hay veces en que el habla cotidiana conecta, mediante esa partícula, proposiciones verdaderas cuyo contenido no guarda entre sí aparentemente relación; imagínese un individuo que termina enfáticamente su declaración diciendo: «si dos y dos son cuatro, todo cuanto he afirmado es cierto». Tampoco faltan ocasiones en el lenguaje ordinario en que se vinculen por la misma partícula proposiciones cuya falsedad se conoce o se supone, pero que, por razón de su contenido, tampoco parecen guardar relación entre sí; por ejemplo en este caso: «si tú eres Napoleón, entonces yo soy el zar de Rusia».

Algunos autores proponen con C. I. LEWIS que se distinga entre la implicación *material*, que sería la implicación entendida con criterio extensional, tal y como se la define en la tabla del implicador que se acaba de exponer, y la implicación *formal o estricta*, cuyo sentido estaría más próximo a la implicación del lenguaje ordinario. La implicación formal o estricta podría definirse: una proposición implica a otra cuando la verdad de la primera es incompatible con la falsedad de la segunda, es decir, cuando no sólo no es, sino que no puede darse el caso de que la primera sea cierta y la segunda falsa [11].

---

[10] El carácter extensional del implicador así definido se pone de relieve con el siguiente ejemplo (tomado de LEWIS). Supóngase un sombrero en cuyo interior se arrojan una serie de etiquetas, cada una de las cuales informa sobre el valor de verdad de una proposición distinta. Supóngase asimismo que se extraen al azar dos etiquetas del sombrero. Para decidir si las proposiciones correspondientes a esas etiquetas se implican extensionalmente, tomándolas por el orden de extracción basta aplicar mecánicamente la regla del implicador: si la primera etiqueta lleva la marca «F» entonces ya se sabe de antemano que la segunda proposición, cualquiera que sea la marca de su etiqueta, está implicada por la primera; y si la segunda etiqueta lleva la marca «V», entonces también se sabe de antemano, con esta simple noticia, que se da la implicación. Si la primera etiqueta ostentase una «V» y la segunda una «F», la respuesta, obviamente, habría de ser negativa.

[11] Un interesante antecedente histórico de la moderna distinción entre implicación material e implicación formal se encuentra en la escuela megárica griega, contemporánea de Aristóteles. FILÓN DE MEGARA sostenía que para que dos proposiciones se impliquen basta con que no se dé el caso de que la primera sea verdadera y la segunda falsa; así por ejemplo, la proposición «si es de noche, entonces discuto», es verdadera cuando sea de día, aunque no discuta (implicación material con antecedente falso, y, por tanto, verdadera, diríamos nosotros hoy) y cuando discuto, aunque no sea de noche (implicación material con consecuente verdadero y, por tanto, verdadera). DIODORO CRONO, maestro de FILÓN, no aceptaba semejante punto de vista, porque le parecía absurdo que la proposición condicional «si es de noche, entonces discuto», se convirtiese circunstancialmente en verdadera durante el día. Para DIODORO, si una proposición condicional es verdadera, es preciso que lo sea siempre, esto es, que sea imposible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. La implicación diodórica viene a ser lo que hoy se define como implicación formal.

f. Coimplicador

En el lenguaje matemático no formalizado es frecuente el uso de la partícula «si y sólo si», que se considera sinónimo de «cuando y solamente cuando», y también de «equivale». Dicha partícula suele emplearse en el establecimiento de definiciones y equivalencias y en la expresión de condiciones necesarias y suficientes.

El conector que formaliza dicha partícula es el *coimplicador*: «$\leftrightarrow$». En los *Principia mathematica* se emplea con tal sentido el símbolo «$\equiv$». Al coimplicador se le puede llamar también *bicondicionador* o *equivaledor*.

La función resultante de combinar dos enunciados, por ejemplo «p», «q», mediante el coimplicador es una *coimplicación, bicondicional* o *equivalencia* (más precisamente: equivalencia material): «$p \leftrightarrow q$», que se lee: «p si y sólo si q», o también: «p cuando y solamente cuando q», o también «p equivale a q».

El sentido del coimplicador es el siguiente: *una coimplicación es verdadera cuando sus dos componentes tienen el mismo valor de verdad*, esto es, cuando ambos son verdaderos o ambos son falsos; y *es falsa en caso contrario*, esto es, cuando uno de ellos, no importa cuál, es verdadero y otro falso.

Ejemplo: sea «p» el símbolo de la proposición «el número dos es el menor de todos los números pares», y «q» el símbolo de la proposición «el número dos es el menor de todos los números primos».

Ambas proposiciones son verdades elementales de aritmética. De acuerdo con ello, resulta que de las cuatro coimplicaciones que siguen:

1. $p \leftrightarrow q$
2. $p \leftrightarrow \neg q$
3. $\neg p \leftrightarrow q$
4. $\neg p \leftrightarrow \neg q$,

la primera y la cuarta son verdaderas y la segunda y la tercera falsas.

Las condiciones de verdad de la coimplicación se resumen en la siguiente tabla.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

§ 4. *Cuantificadores*

a. La cuantificación de enunciados

Los enunciados compuestos o moleculares hasta ahora definidos se han basado en la combinación de enunciados preexistentes mediante el empleo de conectores. Así el enunciado compuesto «lloverá o no lloverá» es el resultado de combinar mediante la partícula «o» el enunciado atómico «lloverá» y el enunciado compuesto «no lloverá» (resultado a su vez de combinar la partícula «no» con el enunciado «lloverá»).

Un tipo distinto de enunciados compuestos o moleculares son los que se basan en el empleo de las partículas *todo* y *alguno*, como «todo hombre es animal» o «algunos animales viven en el agua». Las proposiciones que se fundan en el empleo de la partícula «todo» reciben el nombre de *generales o universales*, y las que se fundan en el empleo de la partícula «alguno» son denominadas *particulares* o *existenciales*.

De la formalización de este tipo de proposiciones y del estudio de las relaciones deductivas entre ellas se ocupa una nueva parte de la lógica elemental, llamada *lógica de predicados* o *lógica de términos*. El desarrollo inicial de la lógica de predicados se encuentra en la silogística aristotélica. La primera formalización completa de la misma se debe a Frege.

Obviamente, las partículas «todo» y «alguno» desempeñan un papel estratégico en esta parte de la lógica. Los símbolos formales de dichas partículas reciben el nombre de *cuantificadores*, o también *cuantores* [12], cuyo análisis sigue a continuación. De ahí que a la lógica de predicados se la llame también *lógica cuantificacional*.

[12] El término *cuantor* procede de HILBERT y es hoy sistemáticamente utilizado por la escuela de LORENZEN.

b. Generalizador

De acuerdo con lo indicado en la sección 2.*e* del presente capítulo, la expresión:

x gira en torno al Sol

no es, propiamente hablando, una proposición, sino una función proposicional, esto es, una expresión «abierta» que contiene una variable individual «x». Sustituyendo esa variable por el nombre de uno cualquiera de los planetas del sistema solar, por ejemplo «Júpiter», la citada función proposicional queda «cerrada» y pasa a convertirse en proposición:

Júpiter gira en torno al Sol.

Pero, por lo que se refiere a nuestro ejemplo, cualquier otro planeta solar, como Marte, Venus o La Tierra, podría ocupar el lugar de «x» con idéntico resultado. Ello puede expresarse en lenguaje ordinario con la proposición:

Todos giran en torno al Sol,

donde se da, naturalmente, por sobreentendido, que «todos» se refiere a los planetas del sistema solar. Subrayando, con ayuda de la variable «x», la alusión a esos individuos sobreentendidos, podríamos escribir:

para todo x (x gira en torno al Sol).

Una formalización más completa de la misma proposición se obtendría representando el predicado «girar en torno al Sol» por la letra predicativa «P» y eligiendo un símbolo especial para la partícula «todo», que puede ser «$\land$». El resultado sería:

$$\land x(Px),$$

o también, economizando paréntesis:

$$\land xPx,$$

que se lee: «para todo x, P de x».

El símbolo «$\wedge x$» recibe el nombre de *generalizador* o *cuantificador universal*. En los *Principia mathematica* el símbolo del generalizador es «(x)». GENTZEN y KLEENE utilizan «$\forall x$». Otros autores emplean el símbolo «Πx».

Al anteponer el generalizador a una expresión, por ejemplo, a «Px», se obtiene una nueva expresión a la que se denomina *generalización* o *cuantificación universal*.

Una definición más precisa del generalizador podría ser ésta: el símbolo «$\wedge x$» indica —sea verdadera, sea falsamente— que la expresión que le sigue es válida para todos los valores de la variable «x».

Aplicando esta definición a nuestro ejemplo de los planetas del sistema solar, tendríamos que el resultado de generalizar la función proposicional «Px», a saber, «$\wedge xPx$», es una expresión indicativa, en este caso con verdad, de que al sustituir «x» en «Px» por cualquiera de los valores de su dominio, se obtiene una proposición que es siempre verdadera.

c. *Particularizador*

La partícula «alguno» se simboliza por «$\vee x$», y recibe el nombre de *particularizador* o *cuantificador existencial*. En los *Principia mathematica* el particularizador se representa mediante el símbolo «$(\exists x)$»; HILBERT utiliza el símbolo «(Ex)», y otros autores el símbolo «Σx». Al anteponer el particularizador a una expresión, por ejemplo a «Px», se convierte ésta en una *particularización* o *cuantificación existencial*: «$\vee xPx$» que se lee: «para algún x, P de x», o también «existe (o hay) un x tal que P de x», o también «existe (o hay) al menos un x tal que P de x».

Una definición más precisa del particularizador podría ser ésta: «$\vee xPx$» indica, verdadera o falsamente, que al sustituir «x» en «Px» por algún valor de x, resulta una proposición que es válida, al menos para un caso.

Si se vuelve al ejemplo del conjunto de los planetas del sistema solar, pero representando ahora por P la cualidad de «ser mayor que la Tierra», la proposición «$\vee xPx$», viene a decir que hay por lo menos un planeta del sistema solar que es mayor que la Tierra —proposición que es de hecho verdadera—.

(El lector habrá reparado en que ni «ser mayor que la tierra» ni

«girar en torno al Sol» son, en rigor, predicados absolutos, sino relativos. Se los podría haber formalizado, respectivamente, como *Pxa*, *Qxb*, nombrando con «*a*» a la Tierra y con «*b*» al Sol.)

§ 5. *Interpretación y verdad lógica*

a. Interpretación y traducción

Entre las ideas sobre el universo circulantes en la antigua Grecia figuraban, por ejemplo, estas dos: que todas las cosas son en general materia y que se componen de cuatro elementos, agua, aire, tierra y fuego. Imaginemos un viejo pensador presocrático exponiendo estas teorías. Si convenimos en representar simbólicamente así las siguientes palabras:

materia	M
agua	A
aire	A'
tierra	T
fuego	F,

y utilizamos los símbolos lógicos ya conocidos (conectores y cuantificadores) y las constantes «a, b, c...» y variables «x, y...» denotativas de individuos, podríamos interpretar las siguientes fórmulas como fragmentos de la ontología de ese personaje:

Fórmula	Interpretación
Ma	Esto es materia
Tb	Eso es tierra
Ac	Aquello es agua
$Ta \vee Aa \vee Fa$	Esto es tierra o agua o fuego
$\bigvee x \neg A'x$	Hay cosas que no son aire
$Ma \wedge Mb \wedge Mc$	Esto, eso y aquello son materia
$\bigwedge x\, Mx$	Todo es materia
$Ma \rightarrow Aa \vee A'a \vee Ta \vee Fa$	Si esto es materia, entonces o es agua o aire o tierra o fuego
$Aa \vee A'a \vee Ta \vee Fa \rightarrow Ma$	Si esto es agua o aire o tierra o fuego, entonces es materia
$Ma \leftrightarrow Aa \vee A'a \vee Ta \vee Fa$	Esto es materia si y sólo si es agua o aire o tierra o fuego.

Una fórmula es un segmento de lenguaje simbólico. Dada una fórmula o conjunto o serie de ellas, hablamos de *interpretación* al poner en correspondencia esa fórmula o serie de fórmulas con un *universo*, con una situación o un escenario determinados.

¿Es la interpretación una *traducción*? En un primer sentido diríamos que no. Al formalizar una proposición de lenguaje natural, estamos sin duda efectuando una traducción de ella al lenguaje lógico. Recíprocamente, podemos hablar también de traducción al pasar una fórmula o un conjunto de fórmulas a lenguaje natural. Pero por interpretación no entendemos aquí la correspondencia de un lenguaje con otro lenguaje, sino con hechos o situaciones, es decir, con una ontología. Si convenimos en interpretar la fórmula

$$p$$

como

Llueve

no estamos entendiendo sólo que la letra proposicional «*p*» se traduzca por la palabra española «llueve», sino que la fórmula en cuestión está en correspondencia con el hecho físico de llover, cualquiera que sea el lenguaje natural en que lo expresemos.

En un segundo sentido, sin embargo, si considerásemos que la interpretación pone en correspondencia los elementos de un conjunto lingüístico con los elementos de otro conjunto, pero dejáramos al mismo tiempo sin especificar la circunstancia de si ese otro conjunto es o no lingüístico, desaparecería la diferencia entre interpretar y traducir.

b. Satisfacción y verdad lógica

Una vez interpretada, una fórmula se convierte en una proposición, que puede ser verdadera o falsa. Cuando sucede lo primero, esto es, cuando la interpretación de una fórmula hace de ésta una proposición verdadera, decimos que esa interpretación *satisface* dicha fórmula, o que es *modelo* de ella. Y lo mismo podemos decir con relación a un conjunto de fórmulas: una interpretación que las hace a todas verdaderas satisface dicho conjunto, del que es modelo. Recíprocamente, de la fórmula o serie de fórmulas que admiten por

lo menos una interpretación que las satisfaga decimos que son *consistentes* o *satisfacibles*.

Suponiendo, por ejemplo, que fuese cierta la concepción del mundo de nuestro filósofo presocrático, podríamos decir que al interpretar la fórmula «Ma» como:

Esto es materia

hacemos de ella una proposición verdadera, y que al poner en correspondencia el conjunto de fórmulas arriba escrito con dicha concepción del mundo éstas se tornan proposiciones verdaderas. Esa concepción del mundo es una interpretación que satisface al conjunto de fórmulas en cuestión y constituye así un modelo de ellas.

Consideremos en cambio la fórmula

$$\neg (p \wedge \neg p)$$

De ella no es posible imaginar una interpretación que la convierta en falsa. Cuando una fórmula es tal que no es posible encontrar una interpretación que la falsifique, decimos que es *lógicamente verdadera*, o también que es una *verdad lógica*. De hecho la fórmula indicada es una representación simbólica del famoso *principio de no contradicción* que Aristóteles y Kant consideraron ley suprema de la lógica.

c. Sumario

- La construcción de un *lenguaje formal*, basado como el matemático en el uso de *símbolos constantes* y *variables*, es útil para el análisis lógico de argumentos.

- La *predicación es una* operación fundamental del lenguaje natural por virtud de la cual atribuimos con verdad o falsedad propiedades y relaciones a personas y cosas, uniendo los nombres propios de éstas (*sujetos*) con nombres comunes significativos de propiedades y relaciones (*predicados*).

- Las proposiciones así resultantes (llamadas *simples, atómicas* o *primitivas*) son expresadas en lenguaje lógico anteponiendo letras predicativas (*P, Q, R*) a letras que simbolizan sujetos (*a, b, c*).

- Una segunda operación fundamental del lenguaje natural, la composición de proposiciones complejas mediante el uso de conjunciones gramaticales, es expresada en lenguaje lógico empleando los símbolos llamados *conectores*:

$\neg$ (no), $\wedge$ (*y*), $\vee$ (*o*), $\rightarrow$ (si…, entonces…), $\leftrightarrow$ (si y sólo si)

para construir con ellos fórmulas y proposiciones lógicamente complejas a partir de otras más simples, susceptibles de ser representadas mediante las letras proposicionales (*p, q, r*).

- En el lenguaje natural las partículas «todo» y «alguno» son determinantes en la formación de proposiciones generales y particulares.

- La función de esas partículas es representada en lenguaje lógico mediante dos símbolos constantes denominados *cuantificadores*, que encabezan a modo de prefijo la fórmula a la que afectan y van seguidos de un símbolo *variable* de individuo (*x, y, z*). Uno es el *cuantificador universal*:

$\bigwedge x$ (léase: para todo x)

y otro el *cuantificador particular* o *existencial:*

$\bigvee x$ (léase: hay o existe un x tal que).

- Los cinco conectores ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), los dos cuantificadores ($\bigwedge$, $\bigvee$), las letras proposicionales (*p, q, r*), predicativas (*P, Q, R*) y constantes y variables individuales (*a, b, c…, x, y, z*) constituyen todo el vocabulario del lenguaje de la nueva lógica, cuyas líneas básicas fueron establecidas por FREGE en 1879.

- Construimos el lenguaje formal lógico (nuestro «lenguaje objeto») desde un *metalenguaje* que es el español ordinario ayudado de *metavariables* o *esquemas* (A, B, C…) de símbolos y fórmulas del lenguaje objeto.

- La *interpretación* pone en correspondencia las fórmulas del lenguaje lógico con un *universo* o situación.

- Una interpretación *satisface* una fórmula si la convierte en proposición verdadera, y a esa interpretación se la llama *modelo* de la fórmula.

- Una fórmula es *satisfacible (consistente), insatisfacible (inconsistente)* o *verdad lógica* según que alguna, ninguna o toda interpretación sea modelo de ella.

B. LENGUAJE FORMAL DE PRIMER ORDEN

§ 6. *Las categorías de un lenguaje formal*

En las páginas que siguen se expondrán las bases del *lenguaje formal de la lógica elemental* [13]. Casi todos los símbolos y clases de expresiones a cuya exposición se dedica este capítulo han sido mencionados ya en el anterior apartado de este capítulo. Pero el modo de presentación del lenguaje formal a partir de ahora será sintético y, en principio, independiente de sus relaciones con el lenguaje informal.

Un lenguaje formal debe contar con tres órdenes de categorías:

a) Una *tabla de símbolos formales*, en la que se hace inventario de los signos, constantes y variables en que se basa el lenguaje en cuestión. Esta tabla viene a ser un equivalente del alfabeto en los lenguajes naturales.

b) Una relación de *reglas de formación de fórmulas*. Las gramáticas de los lenguajes naturales suministran reglas que permiten distinguir entre frases bien construidas y mal construidas. Algo análogo sucede con los lenguajes formales, pero con la diferencia de que en ellos las reglas de construcción de fórmulas (que son el equivalente de las oraciones en los lenguajes naturales) han de ser absolutamente rígidas, de modo que permitan decidir de manera mecánica si una expresión está o no bien formada. (Por ejemplo: la posición de la partícula negativa en los lenguajes naturales es ambigua, puesto que la negación de frase se efectúa poniendo unas veces el «no» al principio (como en «no llueve») y

[13] La *lógica elemental* o *de primer orden* comprende la lógica de conectores y la lógica de cuantificadores, mientras éstos se apliquen únicamente a variables individuales. La *lógica de orden superior* admite la cuantificación de letras predicativas. (Véase Capítulo XIV, § 2, n. 3.)

otras en medio de la expresión negada (como en «Juan no ha venido»); en cambio en el lenguaje formal el negador tiene, invariablemente, situación de prefijo, respecto de la expresión por él afectada.)

c) Finalmente hay una tercera categoría, las *reglas de transformación de fórmulas*, que permiten pasar de unas expresiones a otras, a la manera como permiten determinadas reglas gramaticales pasar de la forma activa a la forma pasiva de una oración.

En este capítulo se tratan las dos primeras categorías, para el lenguaje formal de la lógica elemental. En el capítulo siguiente se estudiará la tercera.

§ 7. *Símbolos formales*

Los símbolos de un lenguaje formal, realizado con vistas al cálculo lógico, se dividen en *lógicos* y *no lógicos*. Los primeros son las constantes lógicas (juntores y cuantores). Los segundos son las letras referentes a enunciados, a predicados y a individuos, divididas éstas en variables y constantes. A la clase de símbolos no lógicos se añade la de símbolos auxiliares o paréntesis.

Nuestro lenguaje lógico se basa en la siguiente:

TABLA DE SÍMBOLOS FORMALES

A. *Símbolos lógicos*

1. Conectores . . . . $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
2. Cuantificadores . . . . $\bigwedge, \bigvee$.

B. *Símbolos no lógicos*

3. Letras enunciativas . . $p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots, \ldots$
4. Letras predicativas . . $P, Q, R, \ldots, P_1, Q_1, R_1, \ldots, P^n_m, Q^n_m, R^n_m, \ldots$
5. Letras individuales:
   - 5.1. Variables . . . . . $x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots, \ldots$
   - 5.2. Constantes . . . $a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots, \ldots$
6. Letras funtoriales . . . $f, g, h, \ldots, f_1, g_1, h_1, \ldots, f^n_m, g^n_m, h^n_m, \ldots$

C. *Símbolos auxiliares*

7. Paréntesis .... (,)

Observaciones

1.º Las comas que separan unos signos de otros no son símbolos formales.

2.º Se da por supuesto que para cada uno de los diferentes tipos de símbolos no lógicos se dispone de una lista, potencialmente infinita, de ellos, y que es posible enumerarlos mediante subíndices. Por lo que se refiere a las letras predicativas como *P, Q, R*, ..., se entiende además que, en caso de que convenga especificar si el predicado en cuestión es monádico, diádico, triádico, etc., se anotará a modo de exponente el número indicativo de la concreta estructura *n*-posicional que corresponda. Por ejemplo, si se conviene en que *P* sea un predicado triádico, ello se podrá especificar escribiendo: P^3. En general, la letra P^n_m será la que ocupe el lugar *m* en la lista de símbolos predicativos *P* y que sea representativa de una relación *n*-ádica. Análogamente sucede con las letras funtoriales.

3.º Es evidente que para construir la lógica de juntores bastará una tabla que conste exclusivamente de: 1. Conectores; 2. Letras enunciativas; y 3. Paréntesis.

4.º De las letras funtoriales no se hará uso alguno hasta el final del cálculo cuantificacional (Cap. XII, § 1).

5.º La diferencia entre variables y constantes no siempre resulta satisfactoria. Por eso algunos autores prefieren distinguir entre variables susceptibles de cuantificación, o *variables* propiamente dichas, y no susceptibles de cuantificación, o *parámetros*. Todo símbolo no lógico de la tabla (Grupo B), salvo 5.1, es parámetro.

§ 8. *Lenguaje y metalenguaje*

En las ciencias que versan sobre el lenguaje es útil distinguir entre el lenguaje por ellas investigado, al que se llama *lenguaje objeto*, y el lenguaje en el que se desenvuelve la investigación, al que suele llamarse *metalenguaje*. En una gramática del idioma inglés para lectores de habla castellana, el lenguaje objeto es el inglés, y el metalenguaje el castellano.

Al construir un lenguaje formal para el cálculo lógico, nuestro lenguaje objeto estará integrado por los símbolos y expresiones formales del cálculo. Pero nuestro metalenguaje será el castellano usual, acompañado, eventualmente, de abreviaturas y símbolos auxiliares.

Convendrá, pues, saber distinguir, por de pronto, entre fórmulas o expresiones formales del lenguaje objeto y nombres y esquemas de tales fórmulas, que pertenecen al metalenguaje. Por ejemplo, la expresión

$$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

puede ser considerada como una *fórmula* del lenguaje objeto. Pero supóngase que he de referirme varias veces a ella y que para abreviar, por razones de comodidad, convengo en denominarla A. Este símbolo A no es ya, en rigor, una fórmula del lenguaje objeto sino el *nombre* o la etiqueta metalingüística de ella.

Otro ejemplo: dado que las tres fórmulas

$$p \rightarrow q$$
$$(p \vee q) \rightarrow (q \vee r)$$
$$r \rightarrow s$$

obedecen a un patrón común (implicador central que conecta un antecedente y un consecuente distintos entre sí), ello se podría resumir en la expresión metalingüística

$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$

que no es una fórmula, sino un *esquema de fórmula*.

A la diferencia entre lenguaje y metalenguaje, suele añadirse la distinción entre *uso* y *mención*. Una palabra o una expresión son *usadas* cuando se las emplea teniendo en cuenta lo que significan. Por ejemplo, en el enunciado:

RUSSELL es coautor de los *Principia mathematica,*

la palabra «RUSSELL» es usada porque se sobreentiende que designa al conocido filósofo inglés. Pero cuando una palabra o una expresión son consideradas meramente en su materialidad de fila de signos, se dice que son *mencionadas*. Por ejemplo, en el enunciado:

«RUSSELL» es un nombre propio y tiene siete letras,

esa misma palabra no es usada, sino mencionada.

Como señal indicativa de esta diferencia entre uso y mención (que se corresponde con la famosa distinción medieval entre *suppositio formalis* y *suppositio materialis*, respectivamente), es costumbre, desde TARSKI, encerrar entre comillas los signos, palabras y expresiones cuando son objeto de mención. El empleo de comillas con este fin es de suma utilidad en la clarificación de problemas lingüísticos complicados, como es el caso, por ejemplo, de las *paradojas*. Pero cuando no hay tal complicación, resulta un tanto engorroso. Hasta el momento, el presente libro ha venido ateniéndose, más o menos, a dicho empleo. Pero ahora que tenemos claro qué sea uso y qué sea mención, podemos prescindir de las comillas, salvo en casos de interés. Algunos autores se atienen al sencillo criterio de considerar que, por lo general, un símbolo o una fórmula que ocurra en un párrafo separada del texto es usada, y cuando ocurra dentro del texto es mencionada. Uno de nuesros criterios preferenciales será utilizar cursivas para los símbolos y fórmulas del lenguaje objeto y letras normales (no cursivas) para los símbolos y esquemas de fórmula del metalenguaje.

§ 9. *Fórmulas*

A continuación se dará la definición de fórmula. Previamente a ella deberá establecerse la definición de fórmula atómica [14].

---

[14] Si se utilizan en el cálculo letras funtoriales (véase Capítulo XII, § 1) será preciso introducir, previamente a la definición de fórmula atómica, la definición de

Fórmula atómica. 1. Una letra predicativa n-ádica seguida de n constante individuales (siendo $n \geq 1$) es una fórmula atómica. 2. Una letra enunciativa es una fórmula atómica.

Ejemplos de fórmulas atómicas:

$$P^1a, \quad Q^2ab, \quad Q^3aaa, \quad p, \quad q.$$

Los tres primeros casos se obtienen por aplicación de la cláusula 1; los dos últimos, por aplicación de la cláusula 2.

Fórmula. Una fórmula o expresión bien formada de nuestro lenguaje es un símbolo o una serie de símbolos de la tabla que se atiene estrictamente a las siguientes reglas de formación:

R1. Una fórmula atómica es una fórmula.

R2. Si A es una fórmula, entonces $\neg$A es una fórmula.

R3. Si A y B son fórmulas, entonces A $\wedge$ B, A $\vee$ B, A $\rightarrow$ B y A $\leftrightarrow$ B son fórmulas.

R4. Si A es una fórmula, y A* resulta de cambiar en A una constante individual por x, entonces $\bigwedge$xA* y $\bigvee$xA* son fórmulas.

Ejemplos de fórmulas:

$$p \rightarrow q, \quad \bigvee xPx, \quad \bigvee xPx \vee \neg \bigvee xPx.$$

Para designar fórmulas cualesquiera se utilizarán en adelante, como variables metalingüísticas, las mayúsculas iniciales del alfabeto: A, B, C, ... (eventualmente con subíndices: A_1, B_1, C_1,...) [15].

Término: 1. Una constante individual es un término. 2. Una letra funtorial n-ádica seguida de n términos, siendo $n \geq 1$, es un término.

Ejemplos de términos: a, b, fa, ffa, g^2ab, g^2fab.

(La primera cláusula puede ser reducida a la segunda exigiendo en esta última que $n \geq 0$ y considerando que una constante individual es un término construido sobre la base de una letra funtorial de 0-posiciones).

La definición de término obliga a modificar la definición de fórmula atómica, reemplazando en la primera cláusula de esta última la expresión «constantes individuales» por la palabra «términos».

[15] En general, reservaremos las letras de tipografía itálica (cursiva) para el lenguaje objeto, y las letras de imprenta para el metalenguaje. Por ejemplo, de estas dos expresiones:

$$\bigwedge xPx, \quad \bigwedge \mathrm{xPx},$$

la primera pertenece al lenguaje objeto y la segunda al metalenguaje (otros autores utilizan letras griegas para el metalenguaje y latinas para el lenguaje objeto).

Como definidor o igualador *semiótico*, esto es, como símbolo metalingüístico que permite identificar definido y definiente en un sistema de símbolos, usaremos con LORENZEN: $\leftrightharpoons$ [16].

Para designar *secuencias* o series finitas de fórmulas se utilizarán las mayúsculas del alfabeto griego: Γ, Δ, Θ, ... (Tales secuencias pueden, eventualmente, ser vacías).

Clases de fórmulas. Las fórmulas se dividen en *atómicas* (ya definidas en la página anterior) y *moleculares*, que son aquellas que incluyen uno o más símbolos lógicos (o más sencillamente: las que no son atómicas) [17].

Una fórmula atómica puede recibir también el nombre de *predicación* [18].

Las fórmulas inmediatamente resultantes de la aplicación de las reglas R2, R3 o R4 son siempre moleculares.

Una fórmula inmediatamente resultante de la aplicación de la regla R2 recibe el nombre de *negación*.

Una fórmula inmediatamente resultante de la aplicación de la regla R3 recibe, según el caso, el nombre de *conjunción, disyunción, implicación* o *coimplicación*.

Una fórmula inmediatamente resultante de la aplicación de la regla R4 recibe, según el caso, el nombre de *generalización* o *particularización*. A la generalización y a la particularización se les da el nombre común de *cuantificación*.

§ 10. *Uso de paréntesis*

Para mejor entender la estructura de las fórmulas se requiere a veces el uso de paréntesis. Este uso debe ajustarse, en principio, a normas rigurosas, pero en la práctica basta el empleo intuitivo de los mismos, al modo acostumbrado en matemática.

---

[16] Por ejemplo, la expresión

$$A \rightarrow B \leftrightharpoons p \vee q \rightarrow r \vee s$$

permite denominar abreviadamente mediante $A \rightarrow B$ la fórmula $p \vee q \rightarrow r \vee s$, o si se quiere puede ser interpretada también como la definición del contenido de la expresión $A \rightarrow B$.

[17] Esta terminología guarda cierta afinidad con el lenguaje de la química, donde los símbolos de moléculas son más complejos que los símbolos de átomos y se construyen por asociación de éstos (así H es un símbolo atómico y H_2O molecular).

Algunas obras de lógica utilizan una terminología más próxima a la matemática y hablan en el mismo sentido, respectivamente, de fórmulas *primas* y *compuestas*.

[18] En este sentido, y por reducción, la letra enunciativa queda asimilada a la predicación.

Una predicación es, normalmente, la concatenación de una letra predicativa n-ádica con n constantes individuales (o eventualmente, términos), siendo $n \geq 1$. Pero si se cambia la condición $n \geq 1$ por $n \geq 0$, entonces cabe entender que una letra enunciativa es también una predicación, construida sobre la base de un predicado de 0-posiciones. Con ello la noción de fórmula atómica se identifica totalmente con la de predicación.

En todo caso, y para economizar innecesarios paréntesis puede convenirse en:

(1) suprimir paréntesis exteriores, escribiendo, por ejemplo, $p \rightarrow q$, en lugar de $(p \rightarrow q)$;

(2) omitir paréntesis internos en casos de reiteración de conjunciones o de disyunciones, escribiendo, por ejemplo, $p \wedge q \wedge r$, en lugar de $p \wedge (q \wedge r)$, y $p \vee q \vee r$ en lugar de $p \vee (q \vee r)$, aunque no se puede escribir, por el contrario, $p \wedge q \vee r$ en lugar de $p \wedge (q \vee r)$ o de $(p \wedge q) \vee r$, porque en tales casos no es indiferente la situación de los paréntesis;

(3) otorgar una cierta preponderancia al implicador y al coimplicador sobre el conjuntor y el disyuntor, entendiendo, por ejemplo, que en una fórmula como ésta: $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ «domina» el implicador, sin necesidad de escribir: $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$; en cambio en esta otra fórmula: $p \vee (q \rightarrow p)$ son imprescindibles los paréntesis para indicar que el signo dominante en ella es el disyuntor [19].

§ 11. *Nociones adicionales*

Grado lógico. El grado lógico de una fórmula es el número de símbolos lógicos que contiene. El grado lógico de una fórmula A constituye una función que mide el nivel de composición lógica de dicha fórmula y que se puede expresar así:

$$G(A) = n,$$

donde n representa el número de símbolos lógicos de A y ha de ser igual o mayor que cero. (Los símbolos repetidos se cuentan tantas veces como aparezcan.)

Ejemplos: sean las fórmulas $A \leftrightharpoons p$, $B \leftrightharpoons \neg (p \vee q)$, y $C \leftrightharpoons \vee x(Px \rightarrow Qx)$; sus respectivos grados lógicos son $G(A) = 0$; $G(B) = 2$; $G(C) = 2$.

Signo principal. El signo principal de una fórmula (molecular) es el último símbolo lógico que interviene en su construcción, suponiendo que ésta se haya realizado a partir de fórmulas atómicas, por sucesivas aplicaciones de las reglas de formación de fórmulas. Volviendo a los tres ejemplos anteriores: el signo principal de la fórmula B es un negador; y el de la fórmula C, un particularizador. (La fórmula A no es molecular.)

Subfórmula. A las partes de una fórmula que sean fórmulas se las puede llamar subfórmulas. Por ejemplo, p es una subfórmula de $p \vee q$ [20].

Alcance. El alcance de un símbolo lógico está integrado por la o las subfórmulas o seudofórmulas cuyo signo principal es. Por ejemplo, p y q constituyen el alcance de $\vee$ en $p \vee q$, Px constituye el alcance de $\vee x$ en $\vee xPx$.

Estructura de la cuantificación. Un cuantificador es, en rigor, solamente el sím-

[19] Algunos autores emplean un sistema de puntos (*interpunción*) en lugar de paréntesis. La interpunción consiste en colocar un punto por cada par de paréntesis en el lugar más estratégico o significativo con vistas a la separación de los símbolos. Por ejemplo, en lugar de $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ se escribiría $p \rightarrow q \,.\rightarrow.\, q \rightarrow p$. La acumulación, redundante o no, de puntos indica el orden jerárquico entre los distintos paréntesis. Por ejemplo $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$, se podría escribir $p \rightarrow q \,.\rightarrow.\, p :\rightarrow: p$.

[20] A una expresión del tipo de Px o Qxy, es decir, con variables individuales no cuantificadas, la llamamos *seudofórmula*.

bolo $\wedge$ o el símbolo $\vee$. Las variables individuales que se adosan a estos símbolos son índices suyos. El cuantificador más el índice constituye un *prefijo cuantificacional*; y la parte de fórmula afectada por el prefijo en una cuantificación recibe el nombre de *matriz cuantificacional*. Por ejemplo, en las fórmulas $\wedge xPx$, $\vee xQx$, los prefijos son $\wedge x$ y $\vee x$, y las matrices Px y Qx. Un prefijo puede agrupar varios cuantificadores con sus correspondientes índices, y una matriz puede, por su parte, encerrar cuantificadores; por ejemplo: $\vee x \vee y \vee z\ (Px \vee \vee xQx \vee Qy \vee Pz)$.

Variables libres y ligadas (reales y aparentes). Se dice que una variable x, o una ocurrencia de ella, es o está *ligada* cuando es el índice de un cuantificador o cuando ocurre dentro del alcance de éste y es además idéntica a la que ocurre como índice del mismo.

Por ejemplo: la variable x está ligada en $\vee x$
la variable y está ligada en $\vee y(Py \vee Qx)$

En caso contrario se dice que la variable, o la ocurrencia de ella, es o está *libre*.

Por ejemplo: la variable x está libre en Px
la variable y está libre en $\vee x(Px \vee Qy)$.

A las variables libres se las llama también *reales*; y a las ligadas, *aparentes*.

Prioridad de alcance cuantificacional. Cuando una variable x se encuentra dentro del alcance de dos cuantificadores que la lleven adosada como índice, queda ligada por el más cercano a ella de los dos, esto es, el de menor alcance. Por ejemplo, en la fórmula

$$\wedge x(Py \vee \vee xQx \vee Rx)$$

la ocurrencia de x en Qx está ligada por el particularizador, pero no por el generalizador, que liga, en cambio, la ocurrencia de x en Rx.

CAPÍTULO III

DEDUCCIÓN Y CONSECUENCIA

§ 1. *Argumento deductivo*

En el capítulo primero de este libro se introdujo y definió ya la palabra *argumento*: conjunto de enunciados tal que uno de ellos, llamado *conclusión*, se sigue de los otros, a los que se llama *premisas*.

Algunos lógicos distinguen entre argumentos *deductivos* y argumentos *inductivos*. Es tópico, aunque no del todo acertado, decir a este respecto que en los primeros se va de lo general a lo particular (como cuando se pasa del enunciado «todo inglés es europeo» al enunciado «algún inglés es europeo»), y en los segundos a la inversa (como cuando se pasa del enunciado «este cuervo, y éste, y éste... son negros» al enunciado «todos los cuervos son negros»). Mejor sería, tal vez, decir que un argumento es deductivo cuando el paso de las premisas a la conclusión es *analítico* (necesario), y que es inductivo cuando ese paso es *sintético* (no necesario).

En cualquier caso la cuestión de saber si hay realmente dos clases de argumentos, de los que, consecuentemente, se ocuparían dos partes de la lógica: una la *lógica deductiva* y otra la *lógica inductiva* [1], es una cuestión sobre la cual no hay acuerdo entre los distintos autores. Pero todos convienen en reconocer que el argumento deductivo si no es el único, es el principal objeto de la lógica formal. No hay, pues,

[1] La lógica inductiva surge en la Edad Moderna como un intento de estudiar el método propio de la ciencia empírica, para el cual servía de muy poco la teoría aristotélica del silogismo. Francis BACON escribió con esa intención su *Novum Organum* en el siglo XVI. En la misma línea se sitúan en el siglo XIX John Stuart MILL con su *Sistema de lógica inductiva* y W. WHEWELL con su *Filosofía de las ciencias inductivas* (una de cuyas partes lleva por título *Novum Organum Renovatum*).

Estas obras constituyen la base de la lógica inductiva tradicional. La formalización completa y la discusión crítica de este tipo de lógica ha tenido lugar en el siglo XX, primero con KEYNES, VON MISES y KOLMOGOROV, y más recientemente con REICHENBACH y CARNAP.

gran inconveniente en considerar, prácticamente, la palabra «argumento» como sinónimo de «argumento deductivo». En el mismo sentido emplearemos también las palabras «deducción» e «inferencia».

Por otra parte conviene advertir lo siguiente: que si bien los argumentos constan de proposiciones, no son, sin embargo, como las proposiciones, verdaderos o falsos, sino bien construidos o mal construidos, *correctos o incorrectos*. Al argumento bien construido se le llama también *válido*; y al mal construido, *inválido*.

Pero utilizando los conceptos de verdad y falsedad cabe definir un *argumento correcto* o *válido* como un conjunto de enunciados tal que no es posible que los primeros (las premisas) sean verdaderos y el último (la conclusión) falso. Dicho de otro modo: en un argumento bien construido, la verdad de las premisas es incompatible con la falsedad de la conclusión.

Obsérvese que esta definición no excluye la posibilidad de argumentos que tengan una o más premisas falsas y conclusión falsa, y sin embargo, sean correctos, como, por ejemplo, éste:

> La Luna es mayor que el Sol y el Sol es mayor que la Tierra.
> Por tanto, la Luna es mayor que la Tierra,

ni tampoco la posibilidad de argumentos cuyas premisas contengan alguna falsedad, pero cuya conclusión sea verdadera, y sin embargo, sean también correctos, como, por ejemplo, éste:

> La Luna es menor que el Sol y el Sol es menor que la Tierra.
> Por tanto, la Luna es menor que la Tierra.

Porque en ninguno de estos dos casos se incumple la condición esencial del argumento correcto: la incompatibilidad de la verdad de las premisas con la falsedad de la conclusión. Si en cualquiera de estos dos argumentos nos constase que ambas premisas fuesen verdaderas, podríamos estar seguros de que la conclusión lo sería también, y no sólo por azar, sino por exigencia lógica, porque así lo exige la estructura formal del argumento.

§ 2. *Deducción directa e indirecta. Tipos y estrategias clásicas de deducción*

Deducción directa. Hay deducciones en las cuales las premisas llevan a la conclusión de un modo directo y positivo. He aquí un ejemplo: supóngase que se me pide establecer la conclusión de que «algunos marxistas no son leninistas»; y supóngase también que poseo o adquiero la información de que el grupo revolucionario constituido por los «espartaquistas» se caracterizó precisamente por su oposición al leninismo y por su expresa profesión de marxista. En tal caso podría alegar a título de premisas:

ningún espartaquista es leninista
todo espartaquista es marxista

de donde se sigue de un modo directo y, por así decirlo, positivo la conclusión:

algunos marxistas no son leninistas.

A una deducción de esta clase se la puede llamar *directa*.

Deducción indirecta (*reductio ad absurdum*). A veces, sin embargo, sucede que los intentos de obtener directamente una conclusión no dan resultado. Entonces cabe apelar a una especie de rodeo que consiste en lo siguiente:

1.° Dar por supuesta la falsedad de la conclusión (es decir, la negación de lo que se desea probar);
2.° obtener, a partir de ese supuesto, una contradicción;
3.° rechazar, en vista de semejante resultado, dicho supuesto; y
4.° afirmar, como consecuencia de ello, la conclusión deseada.

Este método, tradicionalmente denominado *reductio ad absurdum* (reducción al absurdo o imposible), se inspira en la idea, que es crucial para la lógica, de que una contradicción es inadmisible: si una proposición da lugar a contradicción, entonces debe ser rechazada. De acuerdo con este método probó KANT, en su *Crítica de la razón pura*, las tesis y antítesis que componen las «antinomias de la razón pura».

He aquí, abreviadamente, la prueba kantiana por reducción al absurdo de una de esas tesis:

tesis: el mundo tiene un principio en el tiempo;

demostración:

1.º Supóngase que el mundo no tiene un principio en el tiempo.
2.º Pero entonces existe un momento en el tiempo, por ejemplo, el actual, en el cual puede decirse que se ha recorrido una eternidad, es decir, una serie infinita de estados sucesivos del mundo.
Ahora bien: es contradictorio y, por tanto, imposible que una serie infinita sea recorrida en el tiempo.
3.º De donde se sigue que no es cierta la hipótesis de que el mundo no tiene un principio en el tiempo.
4.º Y puede afirmarse la tesis que se pretendía demostrar.

En la cuestión de saber si esta tesis debe ser aceptada no entramos aquí. Seguramente el lector estará informado de que KANT exhibió la demostración de la tesis contraria, en la página contigua de la *Crítica de la razón pura*. En el presente contexto lo único que interesa es hacer ver que esa prueba es un caso de utilización del método de reducción al absurdo.

Otras estrategias clásicas de deducción. Los filósofos estoicos catalogaron entre sus estrategias dos fundamentales que descansan en la estructura de la implicación. Una de ellas consiste en extraer de una implicación su consecuente después de haber logrado establecer su antecedente. Por ejemplo:

si hay humo, entonces hay fuego
pero hay humo
por tanto hay fuego.

Es el tipo de argumento que la tradición posterior llamaría *modus ponens*. Emparentada con él está la estrategia inversa, luego denominada *modus tollens*, consistente en negar el antecedente de una implicación si se cuenta con la negación de su consecuente. A esta estrategia se ajusta, según Popper, el llamado *método hipotético-deductivo*

de la ciencia empírica: si de una hipótesis o teoría científica se deduce una consecuencia predictible y observando la naturaleza constatamos que esa predicción no se cumple, podemos descartar la teoría.

Otra estrategia argumentativa clásica es el *dilema*, que presenta mediante una disyunción dos alternativas, llamadas cuernos del dilema, de las cuales se siguen determinadas consecuencias. El famoso argumento de Bías contra el matrimonio que circulaba en la antigüedad griega responde a esa estructura:

O te casas con una mujer hermosa o te casas con una fea
Si es hermosa, la compartirás con otros
Si es fea, será un castigo
Pero ninguna de estas cosas es deseable
Luego no te cases

§ 3. *Los supuestos de la deducción. Deducción axiomática y deducción hipotética*

Es claro que la conclusión de una deducción supone, por una parte, las premisas, y, por otra, las reglas de inferencia. En este sentido puede decirse que tanto las unas como las otras son supuestos de la deducción.

Sin embargo, aquí emplearemos la palabra *supuestos* en un sentido más restringido. Por supuestos o hipótesis de una deducción entenderemos todos aquellos enunciados que no hayan sido deducidos o justificados previamente.

A este orden de supuestos pertenecen, por lo general, los enunciados de que se parte en muchos argumentos. Por ejemplo, en el siguiente caso:

Si el conductor ha sobrepasado los 200 km por hora (Premisa 1) debe ser sancionado con la pérdida del carné.

Pero el conductor ha sobrepasado los 200 km por (Premisa 2) hora.

Luego
debe ser sancionado con la pérdida del carné (Conclusión),

las premisas indicadas no son susceptibles de ser establecidas por métodos puramente lógicos, sino empíricos, porque su contenido es

empírico. Para darlas por ciertas habría que determinar si en el código de circulación existe o no la prohibición que se indica en la primera premisa y si, de hecho, el conductor se excedió en velocidad, tal y como se afirma en la segunda premisa. La tarea de determinar la verdad de proposiciones de contenido empírico excede el ámbito de la lógica formal que se ocupa tan sólo, por lo que se refiere a semejantes proposiciones, de extraer de ellas las conclusiones procedentes. A los supuestos de este tipo les llamaremos *hipótesis, supuestos* o *premisas iniciales*, o también, simplemente *premisas*.

Pero hay un segundo tipo de supuestos, en la acepción restringida que aquí damos a esta palabra, que conviene mencionar también: son los *supuestos provisionales* o *subsidiarios*, que sirven momentáneamente de apoyo en el curso de la deducción, pero de los cuales resulta posible desembarazarse antes del establecimiento de la conclusión. A la eliminación de un supuesto de esta índole la llamamos *descarga* o *cancelación* del mismo. Un caso típico de empleo de supuestos subsidiarios es la reducción al absurdo, pues en ella se introduce provisionalmente una hipótesis (la negación de la conclusión) que se elimina antes de que la deducción llegue a su fin (véanse pp. 65 y 66). Obviamente, todos los supuestos provisionales de una deducción deben ser cancelados antes de que se extraiga la conclusión, pues de otro modo quedaría ésta condicionada por ellos.

Una deducción que parte de supuestos iniciales (no subsidiarios) recibe el nombre de *deducción hipotética*.

A la deducción hipotética se opone la llamada *deducción axiomática* o *apodíctica*, que está exenta de supuestos iniciales, en el sentido restringido que aquí damos a esta palabra. La deducción axiomática se apoya, por su parte, en supuestos de carácter privilegiado a los que se da el nombre de *axiomas*. Los axiomas son proposiciones no deducidas, pero sí previamente aceptadas de acuerdo con un determinado criterio de control racional. La conclusión resultante de una deducción efectuada con criterio axiomático es un *teorema*.

Una *demostración* o una *prueba* es una deducción sin supuestos iniciales. Claramente, las deducciones de tipo axiomático son demostraciones; pero no toda demostración es deducción axiomática.

§ 4. *Esquemas de argumentos. Reglas de inferencia*

El análisis lógico de las deducciones requiere la explicitación de nuevos elementos que se añadirán a nuestro repertorio metalingüístico.

El modo tradicional de exponer los argumentos consiste en aducir primero las premisas y después la conclusión, ligada a ellas mediante la partícula «luego», «por tanto», «por consiguiente», etc. He aquí un ejemplo:

Si suben los salarios, entonces suben los precios;
si suben los precios, entonces baja el poder adquisitivo de la moneda.
Es así que suben los salarios.
Luego baja el poder adquisitivo de la moneda.

Haciendo uso de los conocimientos del lenguaje formal que hasta ahora se poseen, este ejemplo se podría formalizar así (significando p la subida de los salarios, q la subida de los precios, y r la baja del poder adquisitivo de la moneda):

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$
p
Luego r.

La partícula «luego», como cualquiera de sus sinónimos empleados al efecto en la exposición de argumentos, representa una *relación lógica*, existente entre las premisas y la conclusión. Algunos manuales y tratados de lógica formal simbolizan esta relación mediante tres puntos dispuestos en triángulo: «∴», con cuya ayuda el anterior argumento se expondría así:

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$
p
$\therefore r$

Por nuestra parte, haremos uso también, ocasionalmente, de esta práctica, pero utilizaremos de preferencia el símbolo: «⊢», al que daremos el nombre de *deductor*. El deductor será, en nuestro lenguaje, el símbolo (metalingüístico) representativo de la relación formal de deducción [2]. Mediante este símbolo, que se lee: «da lugar a», «se sigue

[2] Y que no es, en rigor, la relación denotada por «∴», sino su fundamento.

de», «se deduce de», la formalización de un argumento puede ser expuesta linealmente escribiendo primero la serie de premisas, separadas por comas, y después, tras el deductor, la conclusión. El anterior ejemplo se escribiría:

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$$

lo que se lee: «$p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, y p dan lugar a r» o «r se sigue o se deduce de $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, y p».

Pero conviene reparar en el hecho de que la tarea de una teoría de la deducción no se reduce a la formalización de argumentos, si por tal se entiende la mera escritura de ellos en forma simbólica. Tarea capital de la lógica deductiva es también el estudio y la formulación explícita y rigurosa de las reglas que gobiernan las operaciones deductivas. Estas reglas reciben el nombre de *reglas de inferencia*, y constituyen, en nuestro lenguaje formal lógico, el tercer orden de categorías formales a que se aludió en el § 6 del Capítulo II (las *reglas de transformación* de fórmulas).

El ejemplo citado de argumento se basa en una sola regla deductiva. Es la regla, conocida ya desde los estoicos, que los medievales llamaron *modus ponens*, y que se podría enunciar diciendo: *si de una hipótesis se sigue una consecuencia y esa hipótesis se da, entonces, necesariamente, se da la consecuencia.*

La formulación de una regla de inferencia pertenece al plano del metalenguaje (que no excluye, según ya sabemos, el empleo de símbolos). Una formulación precisa de una regla de inferencia se puede construir utilizando variables de fórmulas y símbolos lógicos y representando mediante una línea horizontal el tránsito de los antecedentes al resultado de la deducción.

Así, el esquema de los argumentos de tipo *modus ponens* sería:

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B \\ A\end{array}}{B}$$

A una regla así formulada se le llama *esquema* o *figura de deducción*. Los esquemas de fórmula que aparecen encima de la línea horizontal reciben el nombre de *premisas* de la regla. El esquema de fórmula que hay debajo de la línea es la *conclusión* de la regla.

En toda regla *el orden de las premisas es indiferente.*

El paso de las premisas a la conclusión en una regla recibe el nombre de *inferencia inmediata*.

Pero volviendo a nuestro anterior ejemplo:

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r,$$

la solución del mismo mediante la regla [3] *modus ponens* transcurre en dos fases:

a) En una primera fase se reparará en que las premisas primera y tercera:

$$p \rightarrow q$$
$$p$$

permiten inferior inmediatamente por dicha regla:

$$q;$$

y *b*) en una segunda fase se advertirá que la premisa segunda del argumento juntamente con la fórmula recién obtenida:

$$q \rightarrow r$$
$$q$$

---

[3] La diferencia entre la expresión formal de una deducción y la formulación de la regla o reglas que la gobiernan, tiene gran importancia desde el punto de vista metodológico. Esta diferencia se patentiza advirtiendo que las expresiones formales constitutivas de la deducción pertenecen al plano del lenguaje objeto, y la formulación de las reglas al plano del metalenguaje. A propósito de esta distinción entre las premisas y las reglas de un argumento, puede leerse la ingeniosa parábola de Lewis CARROLL *Lo que la tortuga le dijo a Aquiles*, donde el filosófico animal, cuya celeridad mental sobrepuja considerablemente la de Aquiles, plantea una serie infinita de hipótesis que deja paralizado al veloz guerrero. En un determinado momento de la discusión, la tortuga interpola una regla entre las premisas y la conclusión de un argumento de geometría:

«A. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
B. Los dos lados de este triángulo son iguales a un tercero.
C. Si *A* y *B* son verdaderas, *Z* es necesariamente verdadera.
Z. Los dos lados de este triángulo son iguales entre sí.»

La respuesta de Aquiles es representativa de la mente lógica de un guerrero «Deberías llamarle D y no Z. Es una proposición que viene *inmediatamente* después de las precedentes». (Este relato fue publicado por primera vez en la revista *Mind*, en 1894, con el título «What the Tortoise said to Achilles». Una versión castellana del mismo puede leerse en Lewis CARROLL, *El juego de la lógica y otros escritos*, selección, prólogo y traducción de Alfredo Deaño, Alianza, Madrid, 1972.)

permiten inferir por idéntico mecanismo:

que es la conclusión buscada.

§ 5. *Consecuencia lógica. Teoría de la prueba y teoría de modelos*

Llamamos, como ya se ha indicado, *correcto* o *válido* a un argumento cuando no es posible aceptar sus premisas sin aceptar su conclusión. Pero si se pregunta por el fundamento de la relación de *inferencia*, que nos obliga a aceptar en ese caso la conclusión, la opinión de los lógicos no es unánime. La teoría tradicional de que la fuerza de un argumento está en su forma conserva su antiguo crédito. Pero si se quiere precisar algo más la respuesta a esa pregunta los lógicos actuales adoptan una doble perspectiva.

Hay quienes insisten, por una parte, en la *corrección formal* del argumento. Para ellos un argumento es convincente en la medida en que se ajusta a las reglas que lo gobiernan. Si hay un símbolo (metalingüístico) propio de la inferencia es el deductor lógico

$$\vdash.$$

Ésta es la perspectiva *sintáctica* en la explicación de la estructura del argumento, defendida por Hilbert y Gentzen y conocida por el nombre de *teoría de la prueba*.

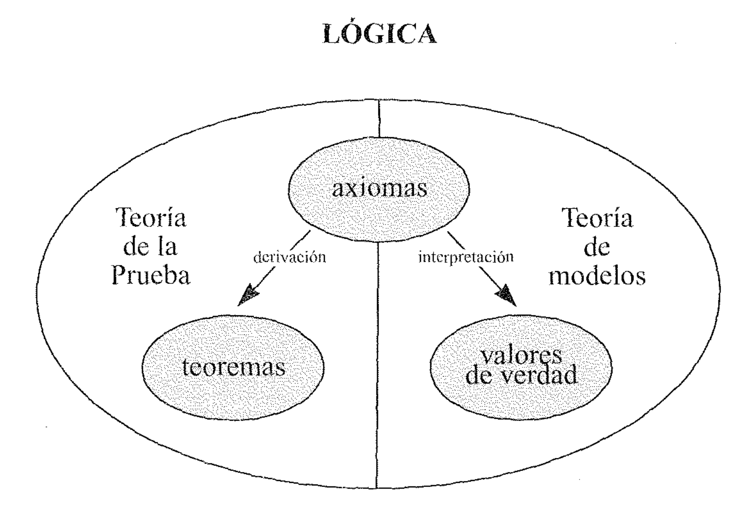
Otros opinan, por el contrario, que la cuestión no es de forma, sino de fondo, que no es en definitiva la *corrección* sino la *validez* lo que más importa y que ésta se funda en la noción semántica de *verdad*. Un argumento es válido cuando no es posible imaginar un mundo o modelo en el que las premisas fuesen verdaderas y la conclusión falsa. Éste es el contenido de la noción semántica de *consecuencia lógica*, que podemos representar gráficamente mediante el símbolo metalingüístico

$$\models.$$

Si la sintaxis es la parte de la *semiótica* (teoría de los signos) que se ocupa de las relaciones de los signos entre sí, la *semántica* se interesa por las relaciones de los signos con sus significados y con el mundo. A la perspectiva semántica en la concepción de los argu-

mentos, defendida por Gödel y Tarski, se la llama *teoría de modelos*.

El esquema adjunto ilustra las relaciones entre ambas perspectivas.



Dos perspectivas de la lógica (Christopher John Hogger, *Essentials of Logic Programming*, Clarendon, Oxford, 1990, p. 2.) Para la perspectiva sintáctica (teoría de la prueba) las conclusiones se deducen o derivan de las premisas por aplicación correcta de reglas de inferencia. Para la perspectiva semántica (teoría de modelos) el fundamento de la inferencia está en las nociones de interpretación y verdad.

LÓGICA DE ENUNCIADOS
(CÁLCULO DE CONECTORES)

CAPÍTULO IV

TAUTOLOGÍAS

§ 1. *Funciones veritativas*

En este capítulo nos ocuparemos con más detención, desde el punto de vista de la lógica de enunciados, de las nociones semánticas de *interpretación* y *verdad lógica* ya esbozadas en nuestra aproximación al lenguaje formal.

Allí se acordó decir de un enunciado que tiene valor de verdad positivo si es verdadero, y negativo si es falso. Representaremos por V lo primero y por F lo segundo [1].

Sea una fórmula atómica: p, y convengamos en asignarle valor de verdad positivo. Diremos entonces que p está interpretada y que como resultado de esa interpretación se ha convertido en una fórmula verdadera.

Sea ahora una fórmula molecular: $p \rightarrow q$, y convengamos en atribuir a p valor de verdad positivo y a q negativo. Si el lector tiene mentalmente presente la definición del implicador estará de acuerdo en que para esa interpretación la fórmula molecular en cuestión se convierte en una implicación de antecedente verdadero y consecuente falso y cobra, por tanto, el valor de verdad F.

Hablando en términos más generales: *en lógica de conectores es posible determinar exactamente el valor de verdad de una fórmula molecular a partir del valor de verdad de sus componentes atómicos,* puesto que una vez obtenida la información pertinente sobre estos datos basta con aplicar a los mismos las operaciones indicadas por la definición de cada conector.

En este sentido se dice que las fórmulas de lógica de conectores son funciones lógicas [2], o más específicamente, *funciones de verdad* o *funciones veritativas,* dando a entender con tal nombre que los valores que estas funciones adoptan son valores de verdad.

El concepto de función veritativa tal vez requiera alguna aclara-

[1] También es costumbre representar los valores de verdad y falsedad por los símbolos 1 y 0, respectivamente.

[2] Sobre el concepto general de función y el más especial de función lógica véase Cap. XII, § 1.

ción. Toda función, sea matemática o lógica, es una operación que pone en correspondencia elementos de un conjunto (las variables o «argumentos» de la función, en nuestro caso las letras enunciativas o las fórmulas ligadas por conectores) con elementos de otro conjunto (los «valores» de la función, en nuestro caso los valores de verdad).

Veamos un ejemplo. Sean las fórmulas

$$\neg p, \qquad p \rightarrow q, \qquad \neg p \rightarrow q.$$

Cada una de ellas es una función veritativa, puesto que representa una operación que se aplica a unos determinados argumentos para obtener un determinado valor. Ello se apreciará mejor empleando una notación similar a la de las funciones matématicas. Sea f_1 un funtor denotativo de la operación lógica consistente en la aplicación del negador, y sea f_2 el funtor denotativo de la operación lógica consistente en la aplicación del implicador; y convengamos en que el valor de verdad de p sea V y el de q F.

Las notaciones

$$f_1(p) = F$$
$$f_2(p, q) = F$$
$$f_2(f_1(p), q) = V$$

representan, respectivamente, cada una de las tres fórmulas anteriores con el resultado obtenido después de asignar a las variables p y q los referidos valores de verdad. El primer miembro de la primera igualdad es una función veritativa de un argumento, cuyo valor es de signo contrario al de dicho argumento; el primer miembro de la segunda igualdad es una función veritativa de dos argumentos, que tiene el valor de verdad positivo cuando no se dé el caso de que el primero de ellos lo tenga y el otro no; y el primer miembro de la tercera es esa misma función, teniendo esta vez como primero de sus argumentos la función f_1.

§ 2. *Tablas de verdad*

En general, las funciones matemáticas pueden ser gráficamente representadas mediante tablas. También sucede así con las funciones veritativas, que son igualmente susceptibles de representación me-

diante las llamadas *tablas de verdad* (véase Cap. II, § 3). La siguiente tabla exhibe las condiciones de verdad de la función «negación» (véase Cap. II, § 3):

p	$\neg p$
V	F
F	V

Y esta otra tabla exhibe conjuntamente las condiciones de verdad de las funciones veritativas correspondientes a la conjunción, la disyunción, la implicación y la coimplicación

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Para construir la tabla de verdad de una fórmula cualquiera de lógica de conectores, convendrá poner en práctica lo siguiente:

1.° Calcular el número de filas de la tabla. Este número se calcula a partir del número de variables enunciativas que intervienen en la fórmula; para n variables será 2^n el número de filas [3] de que ha de constar la tabla.

2.° Confección de columnas iniciales. Una vez calculado el número de líneas, se encabezarán con cada una de las variables (por orden alfabético si no procede otro mejor) sendas columnas que serán las iniciales de la tabla. Estas columnas iniciales se dedicarán, línea por línea, a la distribución sistemática de las combinaciones de los valores de verdad de las variables.

Llamamos *atribución veritativa* a cada conjunto de asignaciones de verdad al conjunto de variables enunciativas de una fórmula. Sea, por ejemplo, la fórmula $p \rightarrow q$; a esta fórmula, o lo que es lo mismo al conjunto de sus variables, p y q, le corresponden cuatro atribuciones veritativas, a saber

---

[3] En efecto, repárese en que a la primera letra se le puede asignar o bien el valor V o bien el valor F, es decir, dos posibilidades; pero a su vez cada una de estas dos posibilidades puede combinarse con cada una de las dos posibilidades de la segunda letra, y así sucesivamente: $2 \times 2 \times 2$ ... n veces, esto es, 2^n.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

3.º Confección de columnas intermedias. Una vez distribuidos en las columnas iniciales los posibles valores de verdad de las variables, se desglosa la fórmula en sus componentes principales, y éstos en los suyos, hasta llegar a fórmulas de grado uno, cada una de las cuales encabezará, por orden de aparición en la fórmula total (si no procede otro mejor), una nueva columna hacia la derecha. Cada una de estas columnas se cubrirá introduciendo en cada línea el valor que corresponda a la fórmula que la encabece suponiendo que las variables tengan el asignado por la atribución veritativa de la línea en cuestión.

Luego se continúa de la misma forma con las fórmulas de grado dos, y así sucesivamente.

4.º Confección de la columna final. De este modo la última columna a la derecha queda encabezada por la fórmula total. Las columnas encabezadas por fórmulas complejas se cubrirán siempre introduciendo en cada línea los valores que les correspondan de acuerdo con los ya asignados en columnas precedentes a sus componentes inmediatos.

A continuación siguen unos cuantos ejemplos de tablas de verdad de funciones de dos variables.

EJEMPLOS DE TABLAS DE VERDAD DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Ejemplo 1: $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejemplo 2: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejemplo 3: $(\neg p \to q) \wedge (\neg q \to p)$

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$\neg q$	$\neg q \to p$	$(\neg p \to q) \wedge (\neg q \to p)$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	F

Para distribuir sistemáticamente las distintas combinaciones de valor veritativo de las variables de la fórmula a analizar, se puede adoptar el siguiente criterio: una vez se haya determinado el número de filas, se construirá la primera columna dividendo por 2 el número de filas y colocando el símbolo V en cada casillero de la primera mitad, y el símbolo F en cada casillero de la segunda mitad; la segunda columna se construye dividiendo por dos cada una de las anteriores mitades y cubriendo por modo semejante con V o F alternadamente los segmentos resultantes, y así sucesivamente hasta llegar a una columna en que V y F se alternen sin interrupción.

(Otro modo de hacerlo sería que V y F se alternen simplemente en la primera columna, en grupos de dos en la segunda, de cuatro, de ocho, dieciséis, etc. en las siguientes, de forma que la última de las columnas iniciales quede dividida en dos mitades: una superior con V en todo casillero y otra inferior con F en todo casillero.)

EJEMPLOS DE TABLAS DE VERDAD DE FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Ejemplo 1: $A \leftrightarrows (p \wedge q \to r) \to (p \to \neg q \vee r)$

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \to \mathrm{r}$	$\neg q \vee r$	$\mathrm{p} \to \neg q \vee \mathrm{r}$	A
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	V

Ejemplo 2: $A \leftrightharpoons (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg r)$
$B \leftrightharpoons (\neg p \rightarrow \neg q)$
$C \leftrightharpoons (\neg q \rightarrow \neg r)$
$D \leftrightharpoons (\neg p \rightarrow \neg r)$
$A \leftrightharpoons B \wedge C \rightarrow D$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	B	C	D	$B \wedge C$	$B \wedge C \rightarrow D$
V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

§ 3. *Tautologías*

Si después de construir la tabla de verdad de una fórmula se considera la última columna de dicha tabla, se observará que pueden ocurrir dos casos límites:

1) esa columna consta sólo de signos V;
2) esa columna consta sólo de signos F;

y un caso intermedio:

3) en la columna final hay signos V y signos F, indistintamente.

Cuando la columna final de una tabla de verdad arroja invariablemente el signo V, la fórmula analizada por esa tabla recibe el nombre de *tautología* [4]. Cuando la columna final arroja sólo signos F, la fórmula en cuestión recibe el nombre de *contradicción*. Y cuando en esa columna alternan indistintamente los signos V con los signos F, la fórmula correspondiente es denominada *contingen-*

[4] La noción de tautología fue acuñada por WITTGENSTEIN, que dedica a ella una parte del *Tractatus logico-philosophicus* (1921). El método de las tablas de verdad fue introducido y desarrollado sistemáticamente a principios de los años veinte por POST, ŁUKASIEWICZ y WITTGENSTEIN. Antecedentes de dicho método hay en la obra de PEIRCE, a fines del siglo XIX.

cia. Si el lector construye las tablas de verdad de las fórmulas: $p \vee \neg p$, $\neg(p \vee \neg p)$, $p \vee q$, hallará, por este orden, un resultado de cada uno de los tres tipos.

La noción de tautología es, posiblemente, la noción central de toda la lógica de conectores. Una definición más rigurosa de este concepto puede obtenerse con ayuda de nociones semánticas previas, como las de interpretación y verdad o las de satisfacibilidad y atribución veritativa.

Una fórmula de lógica de conectores se denomina *tautología o identidad lógica* cuando es verdadera para toda interpretación; es decir, cuando toda atribución veritativa la satisface. Y se denomina *contradicción* cuando no es verdadera bajo ninguna interpretación; es decir, cuando ninguna atribución veritativa la satisface. La contradicción es, obviamente, la negación de la tautología. Finalmente diremos que una fórmula de lógica de conectores es una *contingencia* cuando no es ni tautológica ni contradictoria, es decir, cuando existe al menos una atribución veritativa que la satisfaga y otra que no la satisfaga.

Toda tautología es un enunciado analítico, o lógicamente verdadero. Pero no sucede a la inversa, pues hay enunciados analíticos que no son tautológicos. La ley de descenso cuantificacional, sin ir más lejos: $\bigwedge x Px \rightarrow \bigvee x Px$, es analítica y, sin embargo, no tautológica.

Propiedades de las tautologías

1. Las tautologías constituyen un conjunto de enunciados que es *decidible*. Un conjunto es decidible cuando existe un procedimiento mecánico para determinar cuáles son los elementos que le pertenecen y cuáles los que no le pertenecen. En lo que respecta al conjunto de las tautologías, es posible decidir de una manera mecánica si una fórmula determinada pertenece o no a tal conjunto. Basta aplicar el método de las tablas y consultar el resultado.

La decidibilidad de las tautologías trivializa de alguna manera el esfuerzo deductivo en lógica de conectores, donde no hace falta, por tanto, deducir una fórmula, ni menos aún insertarla en un sistema axiomático para saber si es lógicamente válida.

Pero la tabla no siempre es, de hecho, confeccionable, ya que su tamaño crece desmesuradamente con el número de variables. Un interesante procedimiento, sin embargo, para recorrer estratégicamente una tabla, por grande que sea, sin necesidad de construirla por entero es el *análisis de funciones de verdad*, ideado por QUINE, que lo expone en su obra *Métodos de la lógica*, P. I, § 5.

2. Las tautologías tienen la propiedad de la *sustitutividad*. Dada una tautología, si se sustituye en ella una letra enunciativa en todas sus ocurrencias por una fórmula cualquiera, el resultado es también una tautología. Por ejemplo, dada la fórmula tautológica:

$$p \rightarrow p,$$

puede sustituirse en ella la letra p en sus dos ocurrencias por la fórmula, elegida arbitrariamente, $p \wedge q$, dando por resultado una nueva tautología:

$$p \wedge q \rightarrow p \wedge q.$$

Esta operación de sustitución no preserva necesariamente el valor de verdad cuando la fórmula inicial no es tautología. (Sobre el uso de la sustitución como regla deductiva en sistemas axiomáticos, véase Capítulo XIV.)

3. Finalmente: las equivalencias tautológicas se sujetan a la ley de *intercambio* (véase Capítulo VII, § 7).

§ 4. *Interdefinibilidad*

Los conectores son interdefinibles. Si se toman como base el negador y cualquiera de los otros tres conectores principales ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) resulta posible definir los dos restantes. En cualquiera de los casos, por supuesto, será también definible el coimplicador.

A continuación sigue una relación de leyes semánticas de interdefinición. Cualquiera de ellas se comprueba fácilmente cambiando el igualador semántico por un coimplicador y efectuando la correspondiente tabla de verdad; el resultado revelará que se trata de una tautología.

Leyes de interdefinición con base $\neg$, $\wedge$:

$A \vee B \leftrightharpoons \neg(\neg A \wedge \neg B)$	Definición del disyuntor
$A \rightarrow B \leftrightharpoons \neg(A \wedge \neg B)$	Definición del implicador
$A \leftrightarrow B \leftrightharpoons \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$	Definición del coimplicador
$A \leftrightarrow B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Definición del coimplicador

Leyes de interdefinición con base $\neg$, $\vee$:

$A \wedge B \leftrightharpoons \neg(\neg A \vee \neg B)$	Definición del disyuntor
$A \rightarrow B \leftrightharpoons \neg A \vee B$	Definición del implicador
$A \leftrightarrow B \leftrightharpoons \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$	Definición del coimplicador
$A \leftrightarrow B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Definición del coimplicador

Leyes de interdefinición con base $\neg$, $\rightarrow$:

$A \wedge B \leftrightharpoons \neg(A \rightarrow \neg B)$	Definición del conjuntor
$A \vee B \leftrightharpoons \neg A \rightarrow B$	Definición del disyuntor

$A \vee B \leftrightharpoons \neg B \rightarrow A$	Definición del disyuntor
$A \vee B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \rightarrow B$	Definición del disyuntor
$A \vee B \leftrightharpoons (B \rightarrow A) \rightarrow A$	Definición del disyuntor
$A \leftrightarrow B \leftrightharpoons \neg ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg (B \rightarrow A))$	Definición del coimplicador
$A \leftrightarrow B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Definición del coimplicador

El lógico SHEFFER descubrió una partícula de lógica de juntores que representa la idea de incompatibilidad entre dos fórmulas. A esta partícula se la llama *funtor de* SHEFFER y el símbolo que le corresponde es una barra vertical: |.

El resultado de aplicar el funtor de SHEFFER a dos fórmulas A, B:

$$A \mid B$$

que se lee «A es incompatible con B», «A excluye a B» (también: «A implica no B», «no es cierto que A y B», «o A es falsa o B es falsa»), es una función que adquiere valor de verdad positivo cuando uno de sus componentes lo tiene negativo. Su tabla de verdad correspondiente es

A	B	A | B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

La idea que se encierra en una función de SHEFFER es exactamente la negación de la conjunción. Podríamos definirla, por tanto, así: $A \mid B \leftrightharpoons \neg (A \wedge B)$.

Pero a su vez el funtor de SHEFFER tiene la singular virtud de que tomándolo a él solamente por base resulta posible definir a todos los demás conectores

$\neg A \leftrightharpoons A \mid A$	
$A \rightarrow B \leftrightharpoons A \mid \neg B,$	o también: $A \mid (B \mid B)$
$A \vee B \leftrightharpoons \neg A \mid \neg B,$	o también: $(A \mid A) \mid (B \mid B)$
$A \wedge B \leftrightharpoons \neg (A \mid B),$	o también: $(A \mid B) \mid (A \mid B)$

Las leyes de interdefinición permiten reducir al máximo el número de símbolos lógicos de un lenguaje. De hecho, todo el vocabulario lógico del cálculo de conectores puede ser reducido a la barra de SHEFFER. Pero una tal reducción arrastra como consecuencia la *mayor longitud de las fórmulas y una mayor dificultad psicológica de lectura* de las mismas. Ello se advierte claramente considerando un par de ejemplos de reducción de fórmulas a otras equivalentes cuyo único símbolo lógico sea el funtor de SHEFFER.

Ejemplo 1. Sea la fórmula: $p \rightarrow p \vee q$.

$p \rightarrow p \vee q \leftrightharpoons p \mid \neg (p \vee q)$	(definición implicador mediante |)
$\leftrightharpoons p \mid (p \vee q \mid p \vee q)$	(definición negador)
$\leftrightharpoons p \mid ((\neg p \mid \neg q) \mid (\neg p \mid \neg q))$	(definición disyuntor)
$\leftrightharpoons p \mid [((p \mid p) \mid (q \mid q)) \mid ((p \mid p) \mid (q \mid q))]$	

Ejemplo 2. Sea la fórmula: $p \wedge q \rightarrow p$

$$p \wedge q \rightarrow p \leftrightharpoons ((p \mid q) \mid (p \mid q)) \mid (p \mid p).$$

Una partícula con virtud similar al funtor de SHEFFER es el *funtor de* PEIRCE que expresa la idea de negación de disyunción y se simboliza: $\downarrow$. $A \downarrow B$ se lee: «ni A ni B», y es la negación conjunta de A y B. Esta función es únicamente verdadera cuando sus dos componentes son falsos. Se la puede definir así: $A \downarrow B \leftrightharpoons \neg (A \vee B)$.

*§ 5. *Sistema total de conectores binarios*

Todos los conectores hasta ahora tratados son, a excepción del negador, funtores veritativos binarios, puesto que requieren la intervención de dos variables o argumentos. Las condiciones de verdad de cada uno de ellos podrían resumirse en la tabla:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \mid B$	$A \downarrow B$
V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V	V	V

A la vista de esta tabla, puede plantearse el siguiente problema. ¿Es posible saber si hay todavía otras funciones o «conjunciones» de similar estructura que el lenguaje natural o nuestro lenguaje formal no hayan utilizado aún? Y, si es ése el caso, ¿existe algún medio de hacer un inventario completo de todas ellas?

La respuesta a ambas preguntas es afirmativa. Sabemos ya que, siendo *n* el número de argumentos de una función veritativa, el número de atribuciones veritativas que corresponde a dicha función es 2^n. En el caso concreto en que la función sea binaria (dos argumentos), ese número será $2^2 = 4$. Ahora bien, para cada una de las atribuciones veritativas en cuestión caben, en principio, dos posibilidades, puesto que el casillero correspondiente de la última columna de la tabla puede resultar cubierto o bien por V o bien por F. Ello exige que el número 2 sea elevado a la cifra anterior. Puede decirse, pues, que para todo número natural *n*, siendo este el número de argumentos, el número de funciones veritativas n-posicionales es 2^{2^n}. Y tratándose, como en nuestro caso, de funciones veritativas binarias, diremos que el número posible de ellas es

$$2^{2^2} = 16.$$

La tabla que contiene el sistema total de las 16 funciones veritativas binarias posibles puede construirse del siguiente modo. Las dos primeras columnas contienen las correspondientes atribuciones veritativas. Las 16 columnas siguientes se llenarán así: la primera fila de dichas columnas constará de ocho signos V, todos ellos seguidos, y otros tantos signos F, igualmente seguidos; en la segunda fila los signos V y los signos F se sucederán en grupos de cuatro en cuatro; en la tercera lo harán en grupos de dos; y en la cuarta se alternarán simplemente. Representaremos por la letra f con el correspondiente subíndice, de 1 a 16, a cada una de estas funciones.

A	B	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2	f_{16}^2
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

En esta tabla podemos reconocer los cuatro conectores binarios con los que ya estamos familiarizados:

f_8: VFFF es la conjunción: $A \wedge B$;
f_2: VVVF es la disyunción: $A \vee B$;
f_5: VFVV es la implicación material o condicional: $A \rightarrow B$;
f_7: VFFV es la coimplicación o equivalencia material: $A \leftrightarrow B$.

Otros conectores que no nos son familiares, aunque alguno de ellos sea ya conocido, corresponden a estas funciones:

f_9 : FVVV es la función de SHEFFER (no conjunción): $A \mid B$
f_{15}: FFFV es la función de PEIRCE (no disyunción): $A \downarrow B$
f_{10}: FVVF es la disyunción exclusiva (no equivalencia)
f_3 : VVFV es la implicación conversa: $A \leftarrow B$
f_{12}: FVFF es la negación de implicación
f_{14}: FFVF es la negación de implicación conversa.

CAPÍTULO V

ESTRATEGIAS DE DEDUCCIÓN NATURAL

§ 1. *Preliminares*

En este capítulo se inicia la exposición de un sistema, tipo GENTZEN, de reglas de cálculo de deducción natural de conectores.

Los conceptos previos de cálculo y regla de inferencia han sido estudiados en el Capítulo III. El lenguaje formal necesario para este sistema es sólo un segmento o estrato muy reducido del lenguaje de primer orden expuesto en el apartado B del Capítulo II [1]. La noción de conector fue tratada en el apartado A, § 3, de ese mismo capítulo.

Las reglas que aquí se llaman *básicas*, y en las cuales se apoya todo el cálculo, son las ocho seleccionadas por GENTZEN [2] en su famosa contribución de 1934, dos para cada uno de los cuatro conectores:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow.$$

Si la regla básica en cuestión introduce en su conclusión un conector que no aparezca en sus premisas, será una regla de *introducción* de ese mismo signo. Y si elimina en su conclusión un conector

---

[1] Este segmento se reduce a un *alfabeto* compuesto por: 1) los conectores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$; 2) las letras enunciativas p, q, r, ..., p_1, q_1, r_1..., y 3) los paréntesis; y a las siguientes *reglas de formación de fórmulas*: 1) una letra enunciativa es una fórmula (atómica); 2) la negación de una fórmula es una fórmula; 3) dadas dos fórmulas, la unión de ellas mediante conjuntor, disyuntor o implicador es una fórmula. El coimplicador «$\leftrightarrow$» puede, indiferentemente, ser añadido a la lista de conectores o definido como símbolo derivado: $A \leftrightarrow B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

[2] Los cálculos de deducción natural son sistemas deductivos ideados por JASKOWSKI y GENTZEN en 1934, y se caracterizan por aproximar extraordinariamente la deducción formal a la deducción intuitiva (a diferencia de lo que sucede con la deducción axiomática, que es más bien «no natural»). La fuente más importante al respecto es el artículo de Gerhard GENTZEN, «Untersuchungen über das logische Schliessen» [«Investigaciones sobre la deducción lógica»], *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39 (1934), pp. 176-210. Una traducción francesa de este artículo, con comentario de R. FEYS y J. LADRIÈRE apareció en P.U.F., París, 1955.

que aparece en sus premisas, será una regla de *eliminación* de ese signo.

Por ejemplo, la regla

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

es una regla de «eliminación de conjuntor», mientras que la regla

$$\frac{A}{A \vee B}$$

es una regla de «introducción de disyuntor». A cada uno de los cuatro conectores citados corresponde en este cálculo una regla básica de introducción y otra de eliminación.

A continuación pasaremos al estudio detallado de cada una de las reglas básicas. Seguirá luego una tabla de las mismas y una discusión de su empleo, con aplicación al análisis de argumentos.

§ 2. *Reglas básicas de implicación*

Comenzamos el estudio de las reglas básicas del cálculo de conectores por las reglas correspondientes al implicador. De ellas expondremos primero la de eliminación, con la que estamos ya un tanto familiarizados desde el Capítulo III.

Regla de eliminación del implicador. La regla de eliminación del implicador tiene la siguiente estructura:

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ A \end{array}}{B}$$

y puede ser verbalmente enunciada así: supuesta una implicación, y supuesta también la fórmula que hace en ella de antecedente, puédese afirmar entonces, independientemente y por separado, la fórmula que hace de consecuente en la referida implicación.

El efecto de esta regla es la eliminación o abolición del implicador que aparecía en una de sus premisas, y de ahí el nombre de «regla de eliminación de implicador», que abreviamos **EI**. Pero tam-

bién puede considerarse como efecto de dicha regla el hecho de que el consecuente de la implicación, que se encontraba en esta última condicionado por el antecedente, se libera de tal condición para ponerse *independiente* o separadamente en la conclusión de la regla. De ahí que se dé a ésta también el nombre de *regla de separación*.

Por lo demás, ya se indicó en la sección 3 del capítulo tercero que la regla cuya figura se acaba de esbozar no es otra que el famoso *modus ponens* de la lógica estoica. En atención a ello la designaremos también por las iniciales **MP**.

El ejemplo siguiente:

> Si el Sol luce, entonces es de día;
> es así que el Sol luce;
> luego es de día,

es cabalmente un argumento que se funda en la aplicación de la regla **MP**.

Regla de introducción del implicador. Supóngase que se ha logrado establecer que una determinada proposición se sigue de una determinada hipótesis. Es intuitivamente obvio que en tal caso es correcto construir una implicación que tenga por antecedente esa hipótesis y por consecuente la proposición mentada. A ello responde la regla de introducción del implicador, cuya estructura es:

$$\frac{\left[\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ B \end{array}\right.}{A \rightarrow B}$$

lo que quiere decir: si tengo una hipótesis cualquiera A y de ella se sigue B, puedo escribir como nueva fórmula: $A \rightarrow B$. Utilizaremos como abreviatura de esta regla las iniciales **II** (introducción de implicador) y también **TD**, alusivas al rótulo *teorema de deducción*, como también se la llama, en atención a una formulación de ella debida a HERBRAND, que subrayó su carácter de clave de bóveda en la lógica deductiva.

Esta regla constituye, como su figura lo indica, un caso típico de empleo de suposición subsidiaria, la cual es la hipótesis de la que se parte, que es finalmente descargada o cancelada, cuando pasa a ser antecedente de una implicación.

El uso del teorema de deducción reviste especial interés para la solución de aquellos argumentos cuya conclusión haya de ser una implicación. Porque en esos casos puede darse por supuesto, provisional o *subsidiariamente*, el antecedente de dicha implicación. Si a partir de ello resulta posible obtener el consecuente, puede darse por cancelada la suposición y por concluida la implicación de que se trate.

He aquí un ejemplo que sirve de ilustración para el empleo de las dos reglas básicas de implicador. Supóngase que se desea resolver el argumento

$$p \wedge q \rightarrow r, r \rightarrow s \vdash p \wedge q \rightarrow s.$$

La derivación discurriría así:

—1	$p \wedge q \rightarrow r$	
—2	$r \rightarrow s$	
┌3	$p \wedge q$	
│4	r	**MP** 1,3
└5	s	**MP** 2,4
6	$p \wedge q \rightarrow s$	**TD** 3-5

Las dos primeras líneas de esta derivación son los supuestos o premisas iniciales y llevan cada una a la izquierda la correspondiente marca distintiva. La tercera línea de la derivación es una suposición subsidiaria introducida con vistas al empleo de **TD**: pues dado que la conclusión a deducir es una implicación, cabe dar primero (provisionalmente) por supuesto al antecedente de la misma hasta lograr la obtención del consecuente. Esta tercera línea deberá ir marcada inicialmente a la izquierda con la señal en escuadra. Las líneas 4, 5 y 6 se obtienen por inferencia lógica de las anteriores y de ahí que su presencia pueda justificarse aludiendo, en el comentario de la derecha, a la regla que las justifica y los números de las líneas de derivación que han servido de premisas para la aplicación de la regla anotada. Así, la línea 4 procede de las líneas 1 y 3 por *modus ponens* y análogamente la línea 5 de las líneas 2 y 4. Pero esta línea 5 es, justamente, el consecuente de la implicación que se desea establecer. Cabe entonces apelar a la regla «teorema de deducción», construyendo una implicación entre la fórmula de la línea 3 y la fórmula de la línea 5: dicha implicación es la línea 6, cuya entrada significa la descarga de la suposición subsidiaria. Ello se indica: en las marcas izquierdas trazando una llave que ponga en con-

tacto el supuesto a descargar con la línea que permitirá su descarga (en este caso la línea 5); y en los comentarios de la derecha especificando tras las iniciales **TD** que no son sólo las premisas 3 y 5, sino todo el bloque comprendido entre ellas, esto es, el bloque 3-5 lo que queda cancelado.

§ 3. *Reglas básicas de conjunción*

Regla de introducción del conjuntor. Esta regla se basa en una inferencia intuitiva enteramente trivial: si en un determinado contexto, trátese del uso cotidiano o científico del lenguaje, se afirma primero una proposición y luego otra proposición, puédese afirmar también la conjunción de ambas.

Por ejemplo: si se me afirma que

el azufre es amarillo

y se me afirma también que

el cloro es verde,

puedo afirmar, por mi parte, la conjunción de ambas proposiciones:

el azufre es amarillo y el cloro es verde.

La estructura de la regla se esquematiza así:

$$\frac{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

Es evidente que el efecto de la misma es la introducción de un conjuntor en la conclusión. En los *Principia mathematica* se dio a esta regla el nombre de «LEY DEL PRODUCTO». Para designarla utilizaremos aquí indistintamente como abreviaturas **IC** (introducción conjuntor) y **Prod** (producto).

Regla de eliminación del conjuntor. Es la inversa de la anterior, y constituye, por así decirlo, la autorización para pasar del todo

a la parte: si se dispone de la conjunción de dos proposiciones, por ejemplo:

el azufre es amarillo y el cloro es verde

puédese introducir lógicamente en el cálculo la afirmación independiente o separada de cualquiera de los miembros que componen la conjunción, es decir, resulta posible afirmar en nuestro ejemplo tanto

el azufre es amarillo

como

el cloro es verde.

La figura correspondiente ofrece dos modalidades distintas según que la conclusión —en donde desaparece el conjuntor— esté formada por el primero o el segundo miembro de la conjunción:

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Ello puede explicitarse en la abreviatura de la regla añadiendo eventualmente un subíndice: $\mathbf{EC}_1$ o $\mathbf{EC}_2$ para cada caso. Esta regla recibe también el nombre de regla de simplificación que abreviaremos: **Simp** (con los correspondientes subíndices).

§ 4. *Reglas básicas de disyunción*

Regla de introducción del disyuntor. Esta regla se puede enunciar verbalmente así: dada una fórmula cualquiera, A, es lícito en el cálculo pasar a una fórmula nueva por el sencillo procedimiento de adicionarle mediante disyuntor el miembro que nos plazca, B (el cual puede ser cualquiera, incluso otra vez A, o también la negación de A).

El fundamento intuitivo de esta regla es que, mientras A sea verdadera, nada se pierde con añadirle mediante disyuntor otra fórmula B, cualquiera que ésta sea, porque la disyunción obtenida será también una fórmula verdadera.

El esquema de esta regla admite dos modalidades distintas, según que la fórmula añadida a la preexistente sea el primero o el segundo miembro de la disyunción resultante:

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}$$

Ello se explicitará convenientemente en las designaciones abreviadas mediante los correspondientes subíndices. A la regla de introducción del disyuntor se la llama en los *Principia mathematica* ley de *adición*. Nuestras abreviaturas serán: **ID** o **Ad** (**ID_1** o **Ad_1** para el primer esquema e **ID_2** o **Ad_2** para el segundo).

Regla de eliminación del disyuntor. Esta regla ofrece más dificultad que las anteriores, porque exige un mayor número de premisas y también porque implica el recurso a supuestos de carácter provisional.

Su sentido es el siguiente: supuesta inicialmente una disyunción, entonces —y a diferencia de lo que sucedería con una conjunción— no se está en principio autorizado a pasar a la afirmación de alguno de sus extremos en particular. Lo que en principio se infiere de la noticia de la verdad de una disyunción es que uno al menos de sus componentes, no se sabe cuál, es verdadero. Para determinar cuál sea el que efectivamente cumple tal condición o si ambos la cumplen se requiere nueva información. Por ejemplo: imagínese que se sabe de una persona que vendrá a Madrid un día determinado y que el medio de locomoción empleado por ella ha de ser el tren o el avión, pero ningún otro. En tal supuesto, la disyunción: «vendrá en tren o en avión» es, obviamente, verdadera; pero la noticia de esta verdad no autoriza a inferir sin más cuál sea efectivamente el medio elegido.

Sin embargo, aun cuando no se pueda pasar lógicamente de la verdad de una disyunción a la verdad de ninguno de sus extremos en particular, cabe apelar a un recurso, utilizado informalmente desde muy antiguo, que consiste en suponer cada uno de esos extremos con carácter provisional o subsidiario y por separado. Si del análisis de cada una de esas dos suposiciones se obtuviese un mismo resultado, ello querría decir que tal resultado se sigue lógicamente de la disyunción inicial, aunque continuemos careciendo de información precisa acerca de cuál sea el componente de ésta que cumpla la condición de ser verdadero. Y como la conclusión así obtenida es inde-

pendiente de esa información, los supuestos subsidiarios utilizados al efecto pueden ser cancelados.

Para continuar con nuestro anterior ejemplo. Imagínese que deseo tener una entrevista con el viajero que viene a Madrid y que esa entrevista tenga lugar la misma tarde de su llegada; imagínese, asimismo, que no me es posible obtener información acerca del medio de locomoción efectivamente elegido por él, pero sí averiguar que el avión llega a primera hora de la mañana y el tren a media mañana. Entonces puedo razonar así:

Supongamos que ha elegido el tren; en tal caso llegará a media mañana a Madrid y será posible tener con él la entrevista en la tarde de ese mismo día.

Y *supongamos* que ha elegido el avión; en tal caso llegará a Madrid a primera hora de la mañana y también será posible tener con él la entrevista por la tarde.

Por consiguiente, *en cualquier caso* será posible tener con él la entrevista por la tarde.

Este razonamiento se apoya en un conocido método de prueba informal: la *prueba por casos*, cuya marcha puede resumirse así:

Sea dada una disyunción: A v B.

Supóngase A: entonces se sigue C.

Supóngase B: entonces se sigue C.

Por consiguiente, se sigue C (absolutamente y en cualquier caso).

Ahora bien; la regla de eliminación de disyuntor es el esquema de ese proceso:

$$
\begin{array}{l}
A \vee B \\
\left[\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ C \end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l} B \\ \vdots \\ C \end{array}\right. \\
\hline
C
\end{array}
$$

Los supuestos son subsidiarios y deben ser cancelados, por consiguiente, antes del establecimiento de la conclusión. La eliminación de disyuntor se da, de hecho, en la conclusión de la regla. Utilizare-

mos como abreviaturas para designar ésta: **ED** (eliminación disyuntor) y **Cas** (casos) [3].

En esta regla se funda, como se verá más tarde, el famoso procedimiento argumental llamado *dilema*.

§ 5. *Reglas básicas de negación*

Regla de introducción de negador. La regla de introducción de negador se funda en la idea central del cálculo, cuya base intuitiva es obvia, de que una contradicción es inadmisible; toda proposición que dé lugar a ella debe ser negada o rechazada.

La estructura de la regla es como sigue

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ B \wedge \neg B \end{array}}{\neg A}$$

La proposición que dé lugar a la contradicción no puede ser nunca, como es indudable, una proposición aceptada, sino sólo provisionalmente supuesta. Tan pronto como se constate la contradicción, esa proposición debe ser negada (y con ello la suposición descargada).

Para designar esta regla utilizaremos la abreviatura **IN** (introducción negador). El uso de la regla **IN** cobra su pleno sentido en el contexto de una deducción indirecta o por *reducción al absurdo*, de la cual viene a ser precisamente el nervio.

De la reducción al absurdo se trató detenidamente en la sección 2 del Capítulo III [4]. Como se recordará, las etapas de la reducción al absurdo son las siguientes:

---

[3] Cuando se introduzca una línea de derivación en concepto de conclusión de esta regla, se añadirá a la derecha a guisa de comentario, junto a la abreviatura **Cas**, el número de línea de la disyunción que dio origen a la aplicación de la regla y los números de línea inicial y terminal de cada una de las dos deducciones subsidiarias. Un ejemplo de utilización de la regla **Cas** puede encontrarse en el ejercicio 2.º de la última sección de este capítulo.

[4] La reducción al absurdo era ya practicada por los matemáticos griegos. La célebre prueba, procedente de la escuela pitagórica de que el número $\sqrt{2}$ no es racional, se atiene a dicho método.

El uso filosófico del mismo se remonta a la escuela de Elea. En el poema de PARMÉNIDES y las aporías de ZENÓN se recurre a la reducción al absurdo sistemáticamente.

1. Se supone la negación de la conclusión que se desea obtener; por ejemplo, si la conclusión deseada es A, se supone $\neg$ A.
2. Se deduce a partir del supuesto, es decir, de $\neg$ A, una contradicción, por ejemplo B $\wedge \neg$ B.
3. Se niega el supuesto que ha dado lugar a la contradicción.
4. Se establece la conclusión deseada, A.

La simple inspección permite comprobar que el anterior esquema constituye la base de las deducciones por reducción al absurdo. Por esta razón denominaremos abreviadamente a la regla **IN** también **Abs** (absurdo) [5].

Regla de eliminación de negador. Esta regla apenas requiere comentario. Se basa en el dato, naturalmente intuitivo, de que negar doblemente algo es tanto como afirmarlo. Su uso permite pasar de la doble negación de una fórmula a la posición afirmativa de la misma, es decir, de $\neg \neg$ A a A. Su esquema contiene una sola premisa.

$$\frac{\neg \neg \mathrm{A}}{\mathrm{A}}$$

A esta regla la llamamos también de *doble negación*. Sus abreviaturas serán, correlativamente, **EN** o **DN**.

Obsérvese que, por el momento, no está autorizado en el cálculo el paso deductivo contrario, que va de la posición de una fórmula a su doble negación. (Este paso quedará establecido en el capítulo siguiente en la forma de una regla derivada.)

[5] Cuando se introduzca una línea de derivación en concepto de conclusión de esta regla, se añadirá a la derecha a guisa de comentario, junto a la abreviatura **Abs**, los números de las líneas inicial y terminal del correspondiente bloque subsidiario de premisas. Un ejemplo de utilización de la regla **Abs** puede encontrarse en el ejercicio 3.º de la última sección de este capítulo.

TABLA I

REGLAS BÁSICAS DEL CÁLCULO DE CONECTORES

(GENTZEN, 1934)

REGLAS DE INTRODUCCIÓN | REGLAS DE ELIMINACIÓN

IMPLICADOR

II (TD)

$$\frac{\left[\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ B \end{array}\right.}{A \rightarrow B}$$

EI (MP)

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

CONJUNTOR

IC (Prod)

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

EC$_1$ (Simp$_1$)

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

EC$_2$ (Simp$_2$)

$$\frac{A \wedge B}{B}$$

DISYUNTOR

ID$_1$ (Ad$_1$)

$$\frac{A}{A \vee B}$$

ID$_2$ (Ad$_2$)

$$\frac{B}{A \vee B}$$

ED (Cas)

$$\frac{\begin{array}{l} A \vee B \\ \left[\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} B \\ \vdots \\ C \end{array}\right. \end{array}}{C}$$

NEGADOR

IN (Abs)

$$\frac{\left[\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ B \wedge \neg B \end{array}\right.}{\neg A}$$

EN (DN)

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

§ 6. *Deducción formal (derivación)*

Antes de pasar a la resolución de argumentos puede serle útil al lector contar con una definición y un análisis preciso de lo que en adelante se ha de entender por deducción formal y un ejemplo ilustrativo de la misma.

Deducción formal (derivación). Una *deducción formal* es una secuencia finita de fórmulas tales que cada una de ellas sea (a) un supuesto inicial, o (b) un supuesto provisional, o (c) una fórmula que se derive lógicamente de otra o de otras anteriores por inferencia inmediata. (Inferencia inmediata es, según se ha dicho ya, la extracción de una fórmula a partir de otra o de otras por la aplicación de una sola regla de inferencia.)

A una deducción formal se le da también el nombre técnico de *derivación*. Cada fórmula de la secuencia constituye una *línea de derivación*. La última línea de derivación es la *conclusión*. Todas las líneas de derivación anteriores a la conclusión podrán ser llamadas *premisas* [6].

Los tres tipos de líneas de derivación. Según se indica en la definición de deducción formal, las líneas en una derivación pueden ser de tres tipos:

a) *Supuestos iniciales* o *premisas iniciales*, que son fórmulas que se consideran hipotéticamente dadas desde el principio de la derivación. En algunas derivaciones la cadena de premisas iniciales puede limitarse a una sola fórmula. También se da el caso de derivaciones exentas de supuestos iniciales como sucede con las pruebas o demostraciones, que pueden ser consideradas como derivaciones en las que el número de premisas iniciales es igual a cero.

b) Líneas que proceden de otra o de otras líneas anteriores por aplicación de una regla de inferencia. De estas líneas decimos que son *consecuencias lógicas inmediatas de otra o de otras anteriores*.

(Por ejemplo, si una línea de derivación está constituida por una implicación, $A \rightarrow B$, y otra línea de derivación, anterior o posterior a ella, está constituida por el antecedente A de esa implicación, entonces cabe introducir una nueva línea con la fórmula B (el consecuente de la implicación), que sería una consecuencia lógica inmediata de las dos precedentes, por aplicación de la regla *modus ponens*, a la que se aludió en la sección tercera de este capítulo.)

c) Líneas que se introducen provisional o subsidiariamente en el curso de la prueba y que deberán ser canceladas antes del establecimiento de la conclusión. A estas líneas les damos el nombre de *supuestos provisionales o subsidiarios*.

Notación simbólica de la deducción formal. Una deducción formal se indica o anota implícitamente exponiendo en hilera, y separándolos por comas, la secuencia de supuestos iniciales (si los hay) y a continuación de ellos el deductor seguido de la conclusión. Si se nos propone, por ejemplo, la tarea de deducir C a partir de las fórmulas $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $A \rightarrow B$ y A, ello se indicaría así:

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C$$

El desarrollo explícito o *derivación* propiamente dicha se efectúa colocando en columna, una debajo de otra, las premisas correspondientes a los supuestos iniciales y procediendo, en ese mismo orden, a extraer mediante inferencias inmediatas o por

[6] Muchos textos reservan esta palabra para denominar los supuestos iniciales de un argumento o los antecedentes de una *regla* de inferencia.

introducción de supuestos provisionales nuevas líneas de derivación con vistas al establecimiento de la conclusión, que será el último paso. Véase el ejemplo ilustrativo al final de esta sección.

Para ordenar e identificar las líneas de una derivación utilizaremos las siguientes convenciones:

1) *Numeración de líneas.* En el desarrollo de la deducción cada una de sus líneas irá numerada correlativamente por la izquierda a partir de 1, de suerte que el último número será el que corresponda a la conclusión.

2) *Señalización de líneas iniciales.* Las líneas del primer tipo llevarán a la izquierda, a modo de marca o señal, una línea horizontal. Por ejemplo, si la segunda línea de una derivación está constituida por la fórmula A y esa fórmula es un supuesto inicial, ello se indicaría así:

–2A

Obviamente, el significado de esta marca es el de: «*supóngase*, como línea 2, la fórmula A».

3) *Comentario adyacente a las consecuencias inmediatas.* Las líneas del segundo tipo irán seguidas por la derecha de un comentario justificativo de su presencia. En este comentario se indicará abreviadamente la regla de inferencia en que se funda esta presencia y el o los números de las líneas de derivación que hayan servido de antecedentes para la aplicación de la regla. Por ejemplo, supóngase que en una deducción han aparecido ya las líneas *m* y *n*, siendo *m* y *n* números enteros positivos cualesquiera:

$$\begin{array}{ll} \vdots & \\ m & A \rightarrow B \\ \vdots & \\ n & A \end{array}$$

Entonces es posible introducir como consecuencia lógica de ambas, y por aplicación de la regla *modus ponens*, una nueva línea de derivación de número $n + 1$ que esté constituida por el consecuente de $A \rightarrow B$, es decir, por B. Siendo **MP** una abreviatura denotativa de la mencionada regla, deberá escribirse inmediatamente debajo de la anterior columna de fórmulas

$n + 1$ B **MP** *m, n*

(Conviene advertir que para la aplicación de una regla es indiferente el orden en que hayan aparecido antes en la deducción las líneas que han servido de antecedentes. En nada se hubiera alterado nuestro ejemplo si la fórmula A hubiera aparecido a la altura *m* y la fórmula $A \rightarrow B$ a la altura *n*.)

4) *Señalización de supuestos provisionales.* Las líneas de derivación del tercer tipo deberán llevar como señal o marca, a la izquierda, una señal en escuadra mirando hacia abajo. Si la línea *n* de una derivación consiste en la fórmula A y esa fórmula es un supuesto provisional, ello se indicaría así:

┌ *n* A

Obviamente, el significado de esta marca es: *supóngase por el momento* como línea número n la fórmula A.

5) *Cancelación de supuestos provisionales.* El uso de suposiciones o supuestos subsidiarios requiere la *descarga o cancelación* de los mismos. Un supuesto provisional, situado en una línea m de una derivación, queda descargado o cancelado cuando más tarde, en una línea ulterior n de esa derivación, se obtiene una fórmula tal que permite la inferencia inmediata de otra buscada que es absolutamente independiente del referido supuesto y cuyo número de línea en la derivación será, por tanto, $n + 1$.

La última fórmula así inferida puede ser considerada como la conclusión de una deducción que comienza en la línea de derivación en que se introdujo el referido supuesto. Una tal deducción recibe el nombre de subsidiaria. Una deducción subsidiaria puede figurar aisladamente o en el contexto de una deducción de mayores dimensiones (subsidiaria o no). Las premisas de la deducción subsidiaria, o al menos las ocurrencias de las fórmulas que integran esas premisas, quedan afectadas por la cancelación del supuesto, puesto que de él dependen, y no deben ser utilizadas como antecedentes de nuevas inferencias.

En nuestra notación, ello se puede indicar de la siguiente forma. Una vez se haya obtenido la línea que da lugar a la inferencia de la fórmula independiente, se marcará dicha línea con una señal similar a la del supuesto, pero esta vez de modo que la escuadra mire hacia arriba. Imagínese, por ejemplo, que se dispone de una regla de inferencia según la cual si de un determinado supuesto se sigue una contradicción, se puede inferir la negación de ese supuesto. Sea el supuesto A introducido en la línea m de una determinada derivación; si más tarde apareciese en la línea n (siendo n mayor que m) una contradicción $B \wedge \neg B$, se podrá inferir inmediatamente como fórmula independiente la negación de dicho supuesto A. En tal caso se marcará la línea n con la referida escuadra hacia arriba:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \ulcorner\ m\ \ A \\ \vdots \\ \llcorner\ n\ \ B \wedge \neg B \end{array}$$

Después se construirá una nueva línea de derivación, de número $n + 1$, con la fórmula independiente, que en este caso sería $\neg$ A. Pero antes de ello se trazará desde el extremo izquierdo de la marca del supuesto al extremo izquierdo de la marca de la línea de derivación que antecede a la fórmula independiente, un trazo vertical continuo que cierre, a manera de llave, el bloque de líneas de derivación comprendido entre ambas marcas. Así quedará indicado que ese bloque, iniciado por el supuesto y dependiente de él, debe considerarse, en adelante, abolido o anulado. De este modo resultaría:

$$\begin{array}{lll} & \vdots & \\ \ulcorner & m & A \\ | & \vdots & \\ \llcorner & n & B \wedge \neg B \\ & n+1 & \neg A \end{array}$$

Ejemplo ilustrativo de una deducción formal. Resuélvase la tarea de deducir r a partir de las fórmulas $p \to (q \to r)$, $p \to q$, y p.

La deducción se indica como sigue:

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$$

Y el desarrollo de la derivación transcurre así:

– 1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
– 2	$p \rightarrow q$	
– 3	p	
4	$q \rightarrow r$	**MP** 1,3
5	q	**MP** 2,3
6	r	**MP** 4,5

Las tres primeras líneas de esta derivación son supuestos previos. La línea 4 se introduce por inferencia inmediata, considerando que las líneas anteriores 1 y 3 proporcionan la base adecuada para aplicar la regla *modus ponens*. Por idéntico mecanismo se introducen las dos restantes, tomando como antecedentes para la aplicación de dicha regla primero a las líneas 2 y 3, y luego a las líneas 4 y 5.

La confección de un cálculo lógico viene a posibilitar, como puede verse en este ejemplo, la realización del ideal deductivo soñado por LEIBNIZ. Una deducción realizada de acuerdo con el cálculo es, como gustaba decir FREGE, una construcción *lückenlos*, «sin agujeros» ni lagunas de ninguna clase, en donde todo paso está explicitado y no hay una sola pieza falta de justificación.

§ 7. *Resolución de argumentos*

El uso de las reglas básicas es, en principio, suficiente para resolver todo problema deductivo que tenga solución en lógica de conectores [7].

El empleo concreto de dichas reglas en la resolución de un argumento puede atenerse al siguiente plan:

1) En primer lugar hay que asegurarse de que el argumento está debidamente formulado. Si se encuentra expuesto en lenguaje informal, será conveniente traducirlo a lenguaje simbólico.

2) Una vez dispuestas en columna y debidamente numeradas las premisas iniciales, se intentará extraer de ellas por sucesivas inferencias inmediatas la conclusión o fórmulas que nos aproximen a ella.

3) Eventualmente, cabe el recurso a suposiciones subsidiarias de tipo directo:

---

[7] Esta afirmación quedará demostrada de modo satisfactorio en el Capítulo XV.

a) Si la conclusión o la fórmula que de momento interese establecer tiene la estructura de una implicación, puede introducirse como suposición provisional el antecedente de la misma, con lo cual se reduce el problema a obtener el consecuente de ella y luego establecer, por teorema de deducción, la fórmula deseada, al tiempo que se descarga el supuesto. (Si el consecuente en cuestión tuviese también la estructura de una implicación, se podría suponer también su antecedente, con lo cual el problema volvería a reducirse a la deducción de un consecuente más simple que antes, y así sucesivamente, mientras nos hallemos frente a implicaciones, cada una de las cuales quedará después establecida mediante la correspondiente aplicación del teorema de deducción.)

b) Si en las premisas a utilizar figura una disyunción, se darán provisionalmente por supuestos cada uno de sus extremos y se tratará de deducir de cada uno de ellos la conclusión o la fórmula que de momento interese establecer (prueba por casos).

4) Siempre que fallen otros intentos cabe recurrir a la deducción indirecta: se supone provisionalmente la negación de la fórmula que interese establecer y se intenta extraer de esa negación una contradicción; el rechazo de esta contradicción nos proporcionará la fórmula deseada.

A continuación sigue una serie de ejemplos de resolución de argumentos y deducciones mediante el empleo de reglas básicas de juntores.

Ejercicio 1.º Formalizar y resolver el siguiente argumento:

Si no hay un control de nacimientos, entonces la población crece ilimitadamente. Pero si la población crece ilimitadamente, aumentará el índice de pobreza. Por consiguiente, si no hay control de nacimientos, aumentará el índice de pobreza.

Formalización

p hay control de nacimientos;
q la población crece ilimitadamente;
r aumenta el índice de pobreza

$$\neg p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \vdash \neg p \rightarrow r$$

Derivación[8]

$$
\begin{array}{lll}
- & 1\ \neg p \rightarrow q & \\
- & 2\ q \rightarrow r & \\
\ulcorner & 3\ \neg p & \\
| & 4\ q & \textbf{MP}\ 1,3 \\
\llcorner & 5\ r & \textbf{MP}\ 2,3 \\
 & 6\ \neg p \rightarrow r & \textbf{TD}\ 3,5
\end{array}
$$

Ejercicio 2.º Resolver el siguiente argumento.

$$p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow r, r \rightarrow s \vdash p \rightarrow s$$

Derivación

$$
\begin{array}{lll}
— & 1\ p \rightarrow (q \vee r) & \\
— & 2\ q \rightarrow r & \\
— & 3\ r \rightarrow s & \\
\ulcorner & 4\ p & \\
| & 5\ q \vee r & \textbf{MP}\ 1,4 \\
|\ \ulcorner & 6\ q & \\
|\ | & 7\ r & \textbf{MP}\ 2,6 \\
|\ \llcorner & 8\ s & \textbf{MP}\ 3,7 \\
|\ \ulcorner & 9\ r & \\
|\ \llcorner & 10\ s & \textbf{MP}\ 3,9 \\
\llcorner & 11\ s & \textbf{Cas}\ 5,\ 6\text{-}8,\ 9\text{-}10 \\
 & 12\ p \rightarrow s & \textbf{TD}\ 4\text{-}11
\end{array}
$$

Observaciones. La línea 4 es la suposición del antecedente de la conclusión. El consecuente de ésta, *s*, se obtiene eliminando implicadores en las premisas iniciales mediante **MP**. La eliminación del primer implicador da por resultado una disyunción (línea 5), cuya descomposición ha de efectuarse por **Cas**, con introducción de dos nuevos supuestos provisionales (líneas 6 y 9), que ayudarán a la obtención del referido consecuente. En la línea 11 dicho consecuente queda independizado de los supuestos 6 y 9. Finalmente la conclusión se introduce por **TD**, al tiempo que se cancela el supuesto 4.

---

[8] Es fácil advertir que la resolución de este argumento puede realizarse con el exclusivo uso de las dos reglas básicas de implicación (**MP, TD**).

En efecto, la conclusión es una implicación, cuyo establecimiento tendrá lugar suponiendo primero, inmediatamente después de anotar las premisas iniciales, el antecedente (línea 3) y buscando después el consecuente. La obtención de éste se logra eliminando implicadores mediante **MP** en las premisas iniciales (líneas 4 y 5). Finalmente, por **TD** se construye la conclusión, al tiempo que se cancela la suposición provisional del antecedente de la misma.

Ejercicio 3.º Resolver, mediante el método de reducción al absurdo, el siguiente argumento

$$p \to \neg q, r \to q \vdash \neg (p \wedge r)$$

Derivación

– 1 $p \to \neg q$	
– 2 $r \to q$	
┌ 3 $p \wedge r$	
│ 4 p	**Simp**$_1$ 3
│ 5 r	**Simp**$_2$ 3
│ 6 q	**MP** 2,5
│ 7 $\neg q$	**MP** 1,4
└ 8 $q \wedge \neg q$	**Prod** 6,7
9 $\neg (p \wedge r)$	**Abs** 3-8

Ejercicio 4.º Demostrar la siguiente fórmula

$$\vdash (p \to r) \wedge (q \to s) \to (p \wedge q \to r \wedge s)$$ [9]

Demostración

┌ 1 $(p \to r) \wedge (q \to s)$	
│┌ 2 $p \wedge q$	
││ 3 $p \to r$	**Simp**$_1$ **1**
││ 4 p	**Simp**$_1$ **2**
││ 5 r	**MP** 3,4
││ 6 $q \to s$	**Simp**$_2$ **1**
││ 7 q	**Simp**$_2$ **2**
││ 8 s	**MP** 6,7
│└ 9 $r \wedge s$	**Prod** 5,8
└ 10 $p \wedge q \to r \wedge s$	**TD** 2-9
11 $(p \to r) \wedge (q \to s) \to (p \wedge q \to r \wedge s)$	**TD** 1-10

---

[9] El deductor en posición de prefijo indica que la fórmula en cuestión es absolutamente deducible, sin suposición previa alguna. La fórmula a deducir en este caso es una ley lógica a la que LEIBNIZ llamó *praeclarum theorema*.

El lector deberá recordar que por «demostración» se entiende una deducción exenta de suposiciones previas (véase Cap. III, § 3). Obsérvese que los supuestos introducidos en las líneas 1 y 2 son subsidiarios y quedan finalmente abolidos al obtener la conclusión.

Ejercicio 5.º Resolver el siguiente argumento:

Si los jóvenes socialistas alemanes apoyan a Brandt, entonces renuncian a su programa de reivindicaciones. Y si combaten a Brandt, entonces favorecen a Strauss. Pero una de dos: o apoyan a Brandt o lo combaten. Por consiguiente, habrán de renunciar a su programa de reivindicaciones o favorecer a Strauss.

Formalización [10]

A los jóvenes socialistas alemanes apoyan a Brandt;
R los jóvenes socialistas renuncian a sus reivindicaciones;
C los jóvenes socialistas alemanes combaten a Brandt;
F los jóvenes socialistas alemanes favorecen a Strauss

$$A \rightarrow R, C \rightarrow F, A \vee C \vdash R \vee F$$

Derivación [11, 12]

— 1 $A \rightarrow R$	
— 2 $C \rightarrow F$	
— 3 $A \vee C$	
┌ 4 A	
│ 5 R	**MP** 1,4
└ 6 $R \vee F$	**Ad**$_1$ 5
┌ 7 C	
│ 8 F	**MP** 2,7
└ 9 $R \vee F$	**Ad**$_2$ 8
10 $R \vee F$	**MP** 3,4-6, 7-9

[10] En adelante, y en los casos de resolución de ejercicios prácticos, será cómodo, desde el punto de vista de la retención memorística del contenido material de los argumentos, formalizar los enunciados de lenguaje natural eligiendo la letra inicial mayúscula de cualquier palabra significativa de los mismos.

[11] La clave de la solución se encuentra en el uso de la prueba por casos, con la intervención auxiliar del *modus ponens* y de la regla de introducción del disyuntor **(Ad)**.

Este argumento es un caso de *dilema*, modo clásico de razonamiento cuya estructura se analizará con detalle en el Capítulo VII.

[12] Véase nota 10.

Ejercicio 6.º Resolver el siguiente argumento.

Si dos gases tienen la misma temperatura, entonces sus moléculas tienen el mismo promedio de energía cinética. Volúmenes iguales de dos gases tienen el mismo número de moléculas. Las presiones de dos gases son iguales si es el mismo su número de moléculas y sus energías cinéticas son iguales. Por consiguiente, si dos gases tienen la misma temperatura y el mismo volumen, tienen la misma presión (ANDERSON-JOHNSTONE, *Natural Deduction*, p. 68).

Formalización [13]

T tener la misma temperatura;
E tener idéntico promedio de energía cinética;
V tener volúmenes iguales;
M tener el mismo número de moléculas;
P tener presiones iguales;

$$T \rightarrow E,\ V \rightarrow M,\ M \wedge E \rightarrow P \quad \vdash \quad T \wedge V \rightarrow P$$

Derivación [13]

–	1 $T \rightarrow E$	
–	2 $V \rightarrow M$	
–	3 $M \wedge E \rightarrow P$	
┌	4 $T \wedge V$	
│	5 T	**Simp**$_1$ 4
│	6 E	**MP** 1,5
│	7 V	**Simp**$_2$ 4
│	8 M	**MP** 2,7
│	9 $M \wedge E$	**Prod** 8,6
└	10 P	**MP** 3,9
	11 $T \wedge V \rightarrow P$	**TD** 4-10

[13] Las únicas reglas básicas a emplear en esta derivación son cuatro, las dos de implicación y las dos de conjunción, dado que la deducción es directa y los únicos signos lógicos que intervienen en las premisas iniciales y en la conclusión son implicador y conjuntor.

NOTA

(*Breve anticipación sobre el uso de reglas derivadas*)

La resolución de argumentos se facilita y abrevia si se añaden a las reglas básicas ya conocidas otras nuevas fundadas en ellas, que reciben por eso el nombre de *derivadas*. De la noción de regla derivada y del sistema total de reglas derivadas para el cálculo de conectores trata detenidamente el Capítulo VII. En esta nota se adelanta tan sólo una selección de las más útiles (algunas de ellas incompletamente formuladas), con un par de ejemplos que permitan comprobar al lector cómo el uso de tales reglas ahorra pasos deductivos.

Ley del silogismo hipotético **(Sil)**

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

Propiedad conmutativa conjunción **(CC)**

$$\frac{A \wedge B}{B \wedge A}$$

Propiedad conmutativa disyunción **(CC)**

$$\frac{A \vee B}{B \vee A}$$

Ley de contraposición **(Cp)**

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

Modus tollens **(MT)**

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

Silogismo disyuntivo **(SD)**

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B}$$

Dilema **(Dil)**

$$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C}$$

Definición del implicador **(DI_1)**

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg (A \wedge \neg B)}$$

Definición del implicador **(DI_2)**

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$$

Leyes de DE MORGAN

(DM$_1$)

$$\frac{\neg (A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$$

(DM$_2$)

$$\frac{\neg (A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$$

Ejercicio 7.º Resolver, por reducción al absurdo, este esquema de argumento:

$$A \rightarrow C, \neg (B \rightarrow C) \quad \vdash \quad \neg (B \rightarrow A)$$

Solución

Sin ayuda de reglas derivadas:

— 1	$A \rightarrow C$	
— 2	$\neg (B \rightarrow C)$	
┌ 3	$B \rightarrow A$	
│ ┌ 4	B	
│ │ 5	A	**MP** 3,4
│ └ 6	C	**MP** 1,5
│ 7	$B \rightarrow C$	**TD** 4,6
└ 8	$(B \rightarrow C) \wedge \neg (B \rightarrow C)$	**Prod** 7,2
9	$\neg (B \rightarrow A)$	**Abs** 3-8

Con ayuda de reglas derivadas:

— 1	$A \rightarrow C$	
— 2	$\neg (B \rightarrow C)$	
┌ 3	$B \rightarrow A$	
│ 4	$B \rightarrow C$	**Sil** 3,1
└ 5	$(B \rightarrow C) \wedge \neg (B \rightarrow C)$	**Prod** 4,2
6	$\neg (B \rightarrow A)$	**Abs** 3-5

Ejercicio 8.º Resolver, sin ayuda y con ayuda de reglas derivadas, el siguiente argumento:

Todo número entero o es primo o es compuesto. Si es compuesto, es un producto de factores primos, y si es un producto de factores primos es divisible por ellos. Pero si un número entero es primo, no es compuesto, aunque es divisible por sí mismo y por la

unidad, y, consiguientemente, también divisible por números primos. Por tanto, todo número entero es divisible por números primos.

Formalización

P ser número primo;
C ser número compuesto;
F ser producto de factores primos;
D ser divisible por números primos;
U ser divisible por sí mismo y por la unidad.

$$P \lor C,\ C \to F,\ F \to D,\ P \to \neg C,\ P \to U,\ U \to D \vdash D$$

Derivación

Con reglas básicas

—	1	$P \lor C$	
—	2	$C \to F$	
—	3	$F \to D$	
—	4	$P \to \neg C$	
—	5	$P \to U$	
—	6	$U \to D$	
┌	7	P	
│	8	U	**MP** 5,7
└	9	D	**MP** 6,8
┌	10	C	
│	11	F	**MP** 2,10
└	12	D	**MP** 3,11
	13	D	**Cas** 1, 7-9, 10-12

Con ayuda de reglas derivadas

—	1	$P \lor C$	
—	2	$C \to F$	
—	3	$F \to D$	
—	4	$P \to \neg C$	
—	5	$P \to U$	
—	6	$U \to D$	
	7	$C \to D$	**Sil** 2, 3
	8	$P \to D$	**Sil** 5,6
	9	D	**Dil** 1, 8, 7

Ejercicio 9.º Ejemplo de argumento fundado en la regla del silogismo disyuntivo (PURTILL, *Logic for Philosophers*, pp. 535-536).

En el diálogo platónico *Menón* (81a-86c) Sócrates trata de probar, con ayuda de la experiencia y de la lógica, su famosa «teoría de la reminiscencia», según la cual el aprendizaje del conocimiento científico se reduce al recuerdo o reminiscencia de la visión de las ideas en una vida extramundana.

La parte «experimental» de su prueba consiste en demostrar ante testigos que un joven esclavo, totalmente desprovisto de formación matemática, puede llegar por sí mismo, si se lo somete a un interrogatorio adecuado, al establecimiento de principios y teoremas de geometría.

A continuación Sócrates argumenta diciendo que o bien ese joven esclavo aprendió tales principios en alguna ocasión posterior a su nacimiento o, en caso contrario, se encuentra en posesión de conocimientos que no adquirió durante su vida.

Pero a Menón, que es el dueño del esclavo, le consta que jamás ese joven, desde que nació, tuvo ocasión de aprender geometría, lo cual induce a Sócrates a esgrimir la conclusión de que el joven en cuestión posee conocimientos no adquiridos durante su vida.

A esta conclusión (que es una de las tesis cardinales de la referida teoría platónica de la reminiscencia) se ha llegado por medio de un silogismo disyuntivo. Sin entrar en la crítica de las suposiciones de la metafísica platónica, el esquema formal del proceso de raciocinio, de acuerdo con el contexto del diálogo *Menón* [14], es como sigue.

Formalización

p el esclavo posee conocimientos de geometría;
q el esclavo adquirió esos conocimientos durante su vida;
r el esclavo posee conocimientos no adquiridos durante su vida.

$$p, p \to (q \vee r), \neg q \vdash r$$

Derivación

–	1 p	
–	2 $p \to (q \vee r)$	
–	3 $\neg q$	
	4 $q \vee r$	**MP** 2,1
	5 r	**SD** 4,3

[14] «SÓCRATES: Y ¿esta ciencia que tiene él ahora (p) no es necesario que, o bien la haya recibido en un cierto momento (en esta vida) (q), o bien la haya tenido siempre (fuera de esta vida) (r)?

MENÓN: Sí.

SÓCRATES: [...] ¿Acaso ha tenido él (en la presente vida) un maestro de geometría? [...] Imagino que tú debes saberlo bien, dado que ha nacido y se ha criado en tu casa.

MENÓN: Tengo la absoluta certeza de que jamás ha tenido maestro alguno.

SÓCRATES: Y, sin embargo, tiene estas opiniones, ¿no?

MENÓN: Parece indiscutible que las tiene, Sócrates.

SÓCRATES: Si no las adquirió en esta vida, es bien preciso que las haya tenido en otro tiempo y que de antemano estuviera provisto de ellas.

MENÓN: Es evidente» (*Menón*, 85 d-e).

CAPÍTULO VI

TABLAS SEMÁNTICAS

§ 1. *El método de las tablas semánticas. Reglas de implicación*

La deducción consiste, sucintamente hablando, en la extracción de conclusiones a partir de premisas. Pero esta extracción puede hacerse con un doble criterio:

1. Con un criterio *sintáctico*, que es el que hasta ahora ha prevalecido en nuestras consideraciones. Bajo un tal criterio el problema de la deducción es el problema de la derivación formal. Dado un argumento cualquiera, el modo sintáctico de resolverlo consiste en tratar de obtener la conclusión deseada, por aplicación de reglas de inferencia, y a partir de las premisas, pero sin tener en cuenta el valor de verdad de éstas. Así, por ejemplo, el argumento

$$p \to q$$
$$r \to \neg q$$
$$\therefore r \to \neg p,$$

se resolvería por derivación formal del siguiente modo:

```
— 1 p → q
— 2 r → ¬ q
┌— 3 r
│  4 ¬ q        MP 2, 3
└— 5 ¬ p        MT 1, 4
   6 r → ¬ p    TD 3-5.
```

2. Pero la deducción puede ser considerada también con un criterio *semántico*. El fundamento de este criterio es que si la deducción es correcta, no es posible, por definición, que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. De acuerdo con ello, cabe ensayar el intento de añadir a las premisas la hipótesis de la falsedad de la conclusión y buscar un *contraejemplo* o contramodelo, esto es, una interpretación que satisfaga las exigencias del tal conjunto de enunciados (haciendo así compatible la verdad de las premisas con la fal-

sedad de la conclusión). El hallazgo del contraejemplo invalidaría, obviamente, el argumento. Pero también puede suceder que la búsqueda termine ante una contradicción, en cuyo caso el problema de deducir la conclusión del argumento a partir de las premisas iniciales queda resuelto en sentido positivo.

El procedimiento de la busca de contraejemplos, que viene a ser una especie de versión semántica de la reducción al absurdo, ha sido utilizado en lógica desde antiguo para la invalidación de argumentos cuya corrección se pone en tela de juicio [1]. Pero el hallazgo del contraejemplo era algo que hasta el presente dependía prácticamente del azar. Sin embargo, desde 1955 se ha impuesto entre los lógicos, gracias a las investigaciones, llevadas a cabo separadamente, de E. W. BETH y J. HINTIKKA [2], un método que permite la búsqueda sistemática de la interpretación invalidadora del argumento. Ello ha dado lugar a nuevas técnicas de cálculo que reciben generalmente el nombre de *tablas semánticas*.

Estas técnicas se caracterizan por operar con un conjunto muy reducido de reglas, que es bastante similar al repertorio de reglas básicas de la deducción natural de GENTZEN. Ello puede alargar a veces el proceso de la deducción. A cambio de este inconveniente, el modo de operar con las reglas semánticas posee la ventaja de ser absolutamente mecánico y facilitar, por tanto, extraordinariamente la solución de problemas deductivos.

Un nuevo examen del anterior ejemplo puede servirnos de introducción al método de las tablas semánticas. El argumento en cuestión

$$p \rightarrow q$$
$$r \rightarrow \neg q$$
$$\therefore r \rightarrow \neg p$$

---

[1] De hecho Aristóteles hizo uso de este método para invalidar determinados modos incorrectos de silogismo; y al final del libro segundo de los *Primeros Analíticos* dedica un capítulo a la teoría de la ἔνστασις procedimiento de argumentación dialéctica consistente en aducir una *instancia* en contrario.

[2] Cfr. BETH 1955 (y BETH 1959), reimpreso en HINTIKKA 1969. Algunos manuales modernos basan exclusivamente sus cálculos en el uso de las tablas semánticas; así JEFFREYS 1967 y SMULLYAN 1968. En este capítulo me atengo principalmente al método de las «tablas analíticas» de SMULLYAN, en las que predomina la forma de árbol sobre la estructura tabular. El sistema de reglas propuesto por este autor es de una sencillez y elegancia difícilmente superables. También JEFFREYS toma de SMULLYAN la idea de convertir la tabla en árbol. Véase asimismo BENEYTO 1971. (La referencia completa de estas obras figura en la bibliografía.)

consta de tres implicaciones, en dos de las cuales interviene el negador.

Ahora bien, imagínese que se dispone de información semántica sobre el valor de verdad de esas implicaciones. En tal caso cabría hacer las dos siguientes inferencias:

(1) si una implicación es verdadera, entonces es que su antecedente es falso o que su consecuente es verdadero; y

(2) si una implicación es falsa, entonces su antecedente es verdadero y su consecuente falso.

El fundamento de estas dos inferencias se encuentra en la definición misma del implicador; la simple inspección de la tabla de verdad de una implicación es suficiente para asegurarse de que son correctas. Como ambas inferencias valen en general, para cualesquiera implicaciones, se las podría formular a manera de reglas así:

(1)
$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B}$$

(2)
$$\frac{\neg (A \rightarrow B)}{\begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array}}$$

La primera figura encierra en símbolos lo expresado en la primera inferencia. Se la puede denominar *regla de verdad de la implicación* (abreviadamente: **VI**). La barra vertical que separa los extremos $\neg$ A, B indica que en esta regla la inferencia es bifurcada, puesto que de esa premisa siguen en principio dos posibilidades diferentes, una al menos de las cuales, indistintamente, debe ser verdadera.

La segunda figura resume simbólicamente el contenido de la segunda inferencia. Se le puede dar el nombre de *regla de falsedad de la implicación* (en abreviatura: **FI**). La disposición de las fórmulas A, B en columna vertical bajo la raya indica que en esta regla la premisa permite inferir, una tras otra, dos expresiones distintas que deben ser verdaderas, cada una por separado.

Por lo que respecta al negador, basta con retener en la memoria la regla básica de doble negación:

DN

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Fuera de esta regla, podemos convenir en interpretarlo sin más como un indicador de la falsedad de la fórmula por él negada. Antepuesto, por ejemplo, a una implicación, indicaría que ésta es falsa y debe ser sometida a la regla **FI**. Si se lo encuentra, en cambio, adosado a una fórmula atómica, no será preciso eliminarlo, sino sólo tomar nota de su presencia por si antes o después, en el curso de la deducción, tiene lugar la afirmación de esa fórmula atómica por él negada. Ello significaría haber descubierto una contradicción.

En la práctica resulta cómodo efectuar mentalmente, sin necesidad de anotarlos, los pasos fundados en la regla **DN**. En el presente capítulo nos atendremos a este criterio. Así, por ejemplo, en lugar de escribir

1	$\wedge x \neg\neg Px$	
2	$\neg\neg Pa$	**VG** 1
3	Pa	**DN** 2

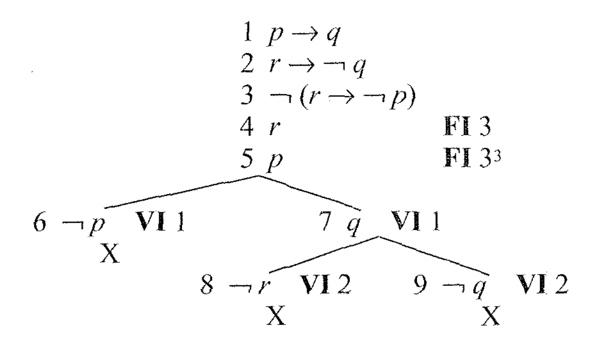
ahorraremos la inscripción del paso dos, y también del comentario que acompaña al paso 3, de la siguiente forma

1	$\wedge x \neg\neg Px$	
2	Pa	**VG** 1

Teniendo presentes las reglas que se acaban de enunciar, podemos proceder al análisis del anterior argumento del siguiente modo. Añadiremos a las premisas la negación de la conclusión y aplicaremos **VI, VF** y **DN** a estas fórmulas y a las que de ellas resulten por tal aplicación cuantas veces sea posible. Cuando la aplicación de una regla arrastre una bifurcación, como es el caso de **VI**, entonces se trazarán dos líneas oblicuas divergentes a partir de la premisa que haya dado lugar a dicha bifurcación y al final de cada trazo oblicuo se escribirá una de las dos fórmulas resultantes. A partir de ese momento la deducción queda escindida en dos trayectorias diferentes que son mutuamente independientes fuera de su común origen. Cuando en el curso de la deducción y dentro de una trayectoria con-

tinuada en sentido descendente, tenga lugar la afirmación de una proposición atómica en una línea y la negación de la misma en otra línea anterior o posterior, se entiende que ha quedado al descubierto una contradicción y puede darse por terminada o clausurada dicha trayectoria. La clausura de una trayectoria se efectúa marcando una X bajo la última fórmula. Cuando toda trayectoria de una deducción es clausurada, queda probado que el argumento que se pretende invalidar es correcto, puesto que todos los caminos del análisis desembocaron en contradicción (dicho en otras palabras: no es posible un contraejemplo que lo invalide).

De acuerdo con estas consideraciones, la tabla semántica del argumento expuesto al comienzo de la presente sección, sería



En la trayectoria que va de las premisas 1 a 6, hay contradicción entre 5 y 6; en la trayectoria que va de las premisas 1-5 a 7 y 8, hay contradicción entre las premisas 4 y 8; finalmente en la trayectoria que va de las premisas 1-5 a 7 y 9, hay contradicción entre estas dos últimas. Toda trayectoria termina en contradicción. Por tanto, el argumento analizado es correcto.

§ 2. *Reglas de conjunción y disyunción*

Si se extienden a la conjunción y a la disyunción las reflexiones

---

[3] De acuerdo con lo indicado en la página anterior, se da por sobreentendido un paso intermedio entre 4 y 5, y basado en la regla **DN**, que sería: $\neg\neg p$.

ya efectuadas sobre la implicación, habrá que tener en cuenta, por de pronto, estos cuatro hechos semánticos:

(1) si una conjunción es verdadera, entonces sus dos componentes son verdaderos;
(2) si una conjunción es falsa, entonces uno al menos de sus componentes es falso;
(3) si una disyunción es verdadera, entonces uno al menos de sus componentes es verdadero; y
(4) si una disyunción es falsa, entonces sus dos componentes son falsos.

La simple inspección de una tabla de verdad para una conjunción y de una tabla de verdad para una disyunción basta para asegurar estas cuatro proposiciones.

Las dos primeras sirven de fundamento intuitivo para la construcción de dos reglas semánticas de conjunción:

(1)
$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}$$

(2)
$$\frac{\neg (A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$$

A estas dos reglas se les puede dar el nombre, respectivamente, de *regla de verdad de la conjunción* (en abreviatura: **VC**) y *regla de falsedad de la conjunción* (en abreviatura: **FC**). La primera permite inferir de la verdad de una conjunción la de cada uno de sus componentes por separado. La segunda permite inferir de la fasedad de una conjunción la de uno de sus componentes, aunque no se sepa cuál. Por ello la aplicación de esta regla conduce a una bifurcación en el análisis del argumento.

Análogamente, las inferencias (3) y (4) sirven de fundamento intuitivo para la construcción de dos reglas semánticas de disyunción:

(3)
$$\frac{A \vee B}{A \mid B}$$

(4)
$$\frac{\neg (A \vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\\neg B\end{array}}$$

Se trata, respectivamente, de la *regla de verdad de la disyunción* (**VD**) y la *regla de falsedad de la disyunción* (**FD**). La primera entraña una bifurcación: de la verdad de una disyunción se sigue la de uno al menos de sus componentes, aunque se ignore, en principio, cuál de ellos sea. De la aplicación de la segunda regla, en cambio, resultan dos líneas en columna.

El lector reconocerá sin esfuerzo en las reglas **FC** y **FD** las leyes de DE MORGAN.

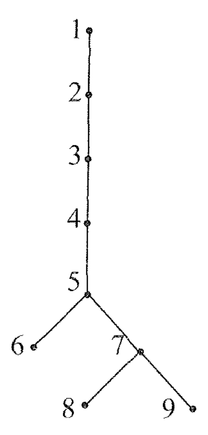
§ 3. *Construcción de tablas semánticas para lógica de enunciados*

Para construir la tabla semántica correspondiente a un argumento, se colocan en columna, una tras otra, las premisas iniciales y la negación de la conclusión.

Acto seguido se procede a la aplicación de las reglas a las distintas premisas, pero dando siempre preferencia, mientras sea posible, a las reglas que no dan lugar a bifurcación (**FI, VC, FD**). Sólo después de haber agotado estas posibilidades se aplicarán las reglas que entrañen bifurcación (**VI, FC, VD**).

Al bifurcarse, la tabla queda escindida en dos subtablas, cualquiera de las cuales puede a su vez escindirse en otras dos, y así sucesivamente. El análisis de cada una de las subtablas debe ser tramitado independientemente de las otras, salvo en lo que respecta al tronco o rama común de donde procedan. Si el análisis de una de las fórmulas pertenecientes a ese tronco o rama común exigiese una nueva bifurcación, ésta se introduciría en todas y cada una de las subtablas, cuya tramitación se encuentre en marcha.

La escisión de la tabla en subtablas obliga a distinguir diversas trayectorias en el curso de la deducción, tantas cuantas ramas se introduzcan por razón de las bifurcaciones. Una trayectoria quedará definida por el recorrido de las líneas que componen el tronco común y determinadas ramas y subramas, cuando las haya, siempre que este recorrido se efectúe de forma continua y en sentido descendente. El proceso de construcción de la tabla se puede representar esquemáticamente mediante un *árbol lógico*. La figura que sigue es un árbol representativo de la tabla construida al final de la primera sección de este capítulo. Los puntos o nudos representan las líneas de la deducción.



Toda trayectoria quedará cerrada o clausurada tan pronto surja una contradicción. En señal de ello se marca una X bajo la línea final del recorrido. Si todas las trayectorias quedan cerradas, se dice que la tabla está (totalmente) cerrada o clausurada, lo cual será prueba de que el argumento analizado es válido. En caso contrario, se dice que la tabla queda abierta.

Obviamente, el método de las tablas no solamente es útil para resolver el problema de si una fórmula es consecuencia de otras. También sirve para el análisis de una fórmula aislada (que, por lo demás, puede ser considerada como una conclusión de cero premisas). En el caso de la lógica de conectores, concretamente, la tabla semántica permite decidir si una fórmula es o no tautología. Basta colocar en primera línea la negación de esa fórmula y proceder a la aplicación de las reglas. La clausura de la tabla decide positivamente la cuestión.

A continuación sigue la resolución de una serie de ejemplos, y ejercicios, el primero de ellos comentado, de tablas semánticas para fórmulas de lógica de conectores. En la siguiente sección consideraremos las reglas de este método para lógica de cuantificadores, con los correspondientes ejemplos y ejercicios.

Ejemplo. Para decidir si la fórmula

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r \wedge s)$$

es o no una tautología, puede construirse la correspondiente tabla semántica anotando en primera línea la negación de esa fórmula y procediendo acto seguido a la aplicación de las reglas. Como la fórmula en

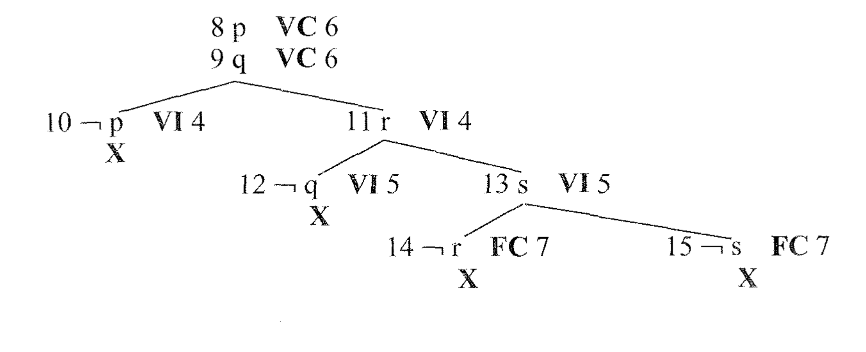
cuestión es una implicación, la negación de ella exige apelar a la regla **FI**, conforme a la cual se construirán las líneas 2, donde se afirma el antecedente de la implicación, y 3, donde se niega el consecuente:

1	$\neg [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r \wedge s)]$	
2	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)$	**FI** 1
3	$\neg (p \wedge q \rightarrow r \wedge s)$	**FI** 1

En la línea 2 se afirma una conjunción. La ley **VC** permite afirmar cada uno de los componentes por separado, con lo cual quedan construidas las líneas 4 y 5. Por su parte la línea 3 es la negación de una implicación. Vuelve a proceder la aplicación de la regla **FI**, merced a la cual se construyen las líneas 6, donde se pone el antecedente, y 7, donde se niega el consecuente:

4	$p \rightarrow r$	**VC** 2
5	$q \rightarrow s$	**VC** 2
6	$p \wedge q$	**FI** 3
7	$\neg (r \wedge s)$	**FI** 3

En este momento es claro que las líneas 1, 2 y 3 han sido ya utilizadas, y que las líneas 4, 5 y 7 exigen recurrir a reglas que implican bifurcación. La única línea por utilizar de acuerdo con una regla que no implique bifurcación es la 6, donde se afirma una conjunción. La regla **VC** permite afirmar sus componentes por separado, en las líneas 8 y 9. Pero a partir de esta línea se impone la introducción de bifurcaciones. Tomando ahora como base la línea 4, que es una implicación, la regla **VI** permite construir dos nuevas líneas, esta vez de distinta trayectoria. La primera de ellas (línea 10) pone de manifiesto una contradicción (con la línea 8), lo cual permite clausurar la trayectoria definida por las líneas 1-10. A partir de la línea 11, empero, debe seguir el análisis deductivo:



Partiendo, pues, de la línea 11, una nueva bifurcación resultante de disolver por la regla **FI** la línea 5 da lugar al nuevo par de líneas 12 y 13, asimismo de diferentes trayectorias. La primera de ellas pone de manifiesto una contradicción (con la línea 9), y permite así cerrar la trayectoria definida por las líneas 1 a 9 y 11 y 12. La última bifurcación a partir de la línea 13 se basa en la disolución de la línea 7, que es la negación de una conjunción, por la regla **FC**. Cada una de las nuevas líneas resultantes introduce una nueva contradicción, con lo cual la tabla queda totalmente clausurada y queda probado que la fórmula en cuestión es una tautología. De hecho se trata de la ley lógica que LEIBNIZ denominó *praeclarum theorema* y cuya derivación por deducción natural puede verse en el Capítulo V, ejercicio 4.º

Ejercicio 1.º Decidir si la fórmula $A \rightarrow A$ es tautología

1	$\neg (A \rightarrow A)$	
2	A	**FI** 1
3	$\neg A$	**FI** 1
	X	

Ejercicio 2.º Decidir si la fórmula $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ es tautología.

1	$\neg (A \rightarrow (B \rightarrow A))$	
2	A	**FI** 1
3	$\neg (B \rightarrow A)$	**FI** 1
4	B	**FI** 3
5	$\neg A$	**FI** 3
	X	

Ejercicio 3.º Decidir si la fórmula

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$ [4]

es tautología [5].

[4] Las fórmulas de estos tres ejercicios son las tres leyes lógicas de identidad, carga de premisas y distribución de disyuntor en conjunción, que se consideran también en el sistema de reglas derivadas del Capítulo VII, § 2 y § 3.

[5] La coimplicación es la conjunción de una implicación y su conversa. La negación de esa conjunción al principio de una tabla implica la inmediata escisión en dos subtablas. Dando por sobreentendida esta breve rutina inicial, podemos limitarnos a presentar por separado la tabla de cada una de las implicaciones resultantes de la mencionada escisión.

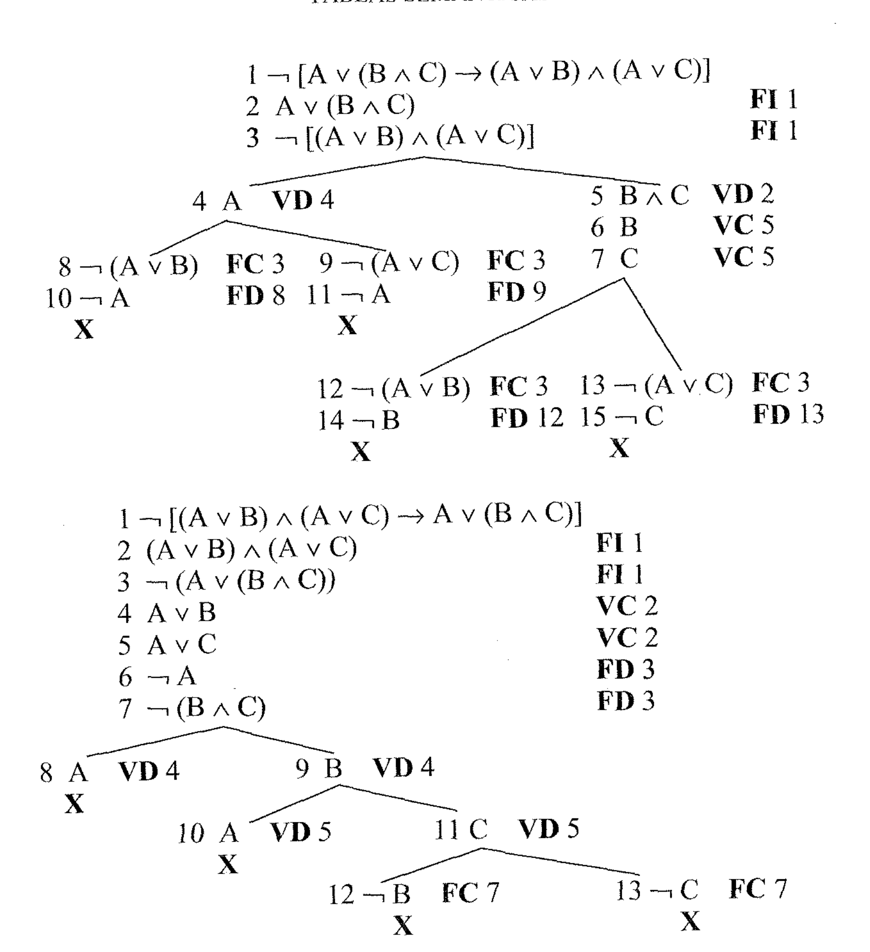

1 ¬ [A ∨ (B ∧ C) → (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)]
2 A ∨ (B ∧ C) FI 1
3 ¬ [(A ∨ B) ∧ (A ∨ C)] FI 1
4 A VD 4
5 B ∧ C VD 2
6 B VC 5
7 C VC 5
8 ¬ (A ∨ B) FC 3
10 ¬ A FD 8
X
9 ¬ (A ∨ C) FC 3
11 ¬ A FD 9
X
12 ¬ (A ∨ B) FC 3
14 ¬ B FD 12
X
13 ¬ (A ∨ C) FC 3
15 ¬ C FD 13
X
1 ¬ [(A ∨ B) ∧ (A ∨ C) → A ∨ (B ∧ C)]
2 (A ∨ B) ∧ (A ∨ C) FI 1
3 ¬ (A ∨ (B ∧ C)) FI 1
4 A ∨ B VC 2
5 A ∨ C VC 2
6 ¬ A FD 3
7 ¬ (B ∧ C) FD 3
8 A VD 4
X
9 B VD 4
10 A VD 5
X
11 C VD 5
12 ¬ B FC 7
X
13 ¬ C FC 7
X

TABLA IV

REGLAS SEMÁNTICAS

NEGACIÓN

DN

$$\frac{\neg \neg A}{A}$$

REGLAS DE VERDAD | REGLAS DE FALSEDAD

IMPLICACIÓN

VI

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B}$$

FI

$$\frac{\neg (A \rightarrow B)}{\begin{matrix} A \\ \neg B \end{matrix}}$$

CONJUNCIÓN

VC

$$\frac{A \wedge B}{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}$$

FC

$$\frac{\neg (A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$$

DISYUNCIÓN

VD

$$\frac{A \vee B}{A \mid B}$$

FD

$$\frac{\neg (A \vee B)}{\begin{matrix} \neg A \\ \neg B \end{matrix}}$$

CAPÍTULO VII

CÁLCULO DE REGLAS DERIVADAS

§ 1. *La noción de regla derivada*

Las ocho reglas de GENTZEN para la deducción natural de enunciados son por sí solas suficientes para resolver todo problema de deducción formal que se presente dentro de la lógica de juntores.

En la práctica, sin embargo, la resolución de argumentos con la exclusiva ayuda de estas reglas resulta demasiado lenta. Por ello se recomienda el recurso a un procedimiento consistente en anotar combinaciones, por así decirlo, «rutinarias» de aplicaciónes de las reglas básicas y construir con esas combinaciones nuevas reglas o figuras deductivas que llamaremos *derivadas*.

Por ejemplo: imagínese que, por alguna razón, se desea cambiar el orden de los componentes en una conjunción $A \wedge B$, siendo A y B fórmulas cualesquiera. Ello se podría efectuar mediante una deducción que se apoyase en una serie de aplicaciones de las reglas básicas de conjuntor **Simp y Prod** y que transcurriría, más o menos, así:

—	1 $A \wedge B$	
	2 B	**Simp**$_2$ 1
	3 A	**Simp**$_1$ 1
	4 $B \wedge A$	**Prod** 2,3

Pero si se tiene en cuenta que este proceso es rutinariamente valedero para cualquier caso de conjunción, puesto que A y B son fórmulas cualesquiera, podemos ahorrarnos esa rutina en el futuro con sólo añadir a nuestro arsenal de figuras deductivas esta otra, que resume dicho proceso:

$$\frac{A \wedge B}{B \wedge A}$$

Esta figura deductiva puede ser considerada como una nueva regla que no será ya básica, sino *derivada*, esto es, fundada en la apli-

cación de reglas básicas. La ayuda de esta regla nos permitiría permutar directamente el orden de los componentes de una conjunción cualquiera, sin necesidad de repetir el rodeo de cuatro pasos que acabamos de recorrer.

A continuación estudiaremos sistemáticamente las principales reglas derivadas para el cálculo de juntores. Cada una de estas reglas irá acompañada de su correspondiente fundamentación o reducción deductiva a reglas anteriores (que pueden ser también derivadas, pero que, en última instancia, al término final de la reducción serán siempre las básicas). A la fundamentación de una regla derivada en otras anteriores la llamaremos también «deducción», aunque un proceso de esa índole no sea, en rigor, una deducción formal, sino un esquema metalingüístico de deducción formal.

En cierto modo, cada una de las reglas de este cálculo puede ser considerada como la expresión de una ley lógica mediante una figura deductiva. La revisión de un sistema de las diferentes *reglas* de cálculo de conectores será una revisión de las diferentes *leyes* de esta parte de la lógica. La mayoría de esas reglas son conocidas por los lógicos desde muy antiguo, pero sólo la moderna lógica simbólica ha conseguido sistematizarlas de un modo completo y analizar satisfactoriamente sus recíprocas relaciones y nexos deductivos.

En el presente capítulo agruparemos las reglas derivadas del cálculo de conectores en leyes de implicación, leyes de conjunción y disyunción, y leyes de negación, a las que seguirán grupos adicionales de reglas de estructura más o menos compleja. Una visión sinóptica del sistema total de reglas derivadas que se consideran en el presente capítulo, se ofrece en la siguiente Tabla II.

La doble raya horizontal en algunas reglas indica que éstas valen también en sentido inverso.

Por lo general, la fundamentación de muchas de estas reglas irá acompañada de comentarios explicativos en los que sobreabundarán las repeticiones y redundancias, pero cuya lectura podrá ahorrarse, por superflua, el lector que haya estudiado a fondo el capítulo anterior. En todo caso, el análisis de cada una de estas fundamentaciones, con o sin ayuda de los comentarios, es tarea que se recomienda al lector, porque no sólo le suministrará una cierta información teórica acerca de la estructura de las leyes lógicas, sino que le servirá también de ejercicio y de práctica en el arte de deducir.

TABLA II

REGLAS DERIVADAS DEL CÁLCULO DE CONECTORES

REGLAS DERIVADAS DE IMPLICACIÓN

Sil

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C \end{array}$$

Mut

$$\begin{array}{c} A \rightarrow (B \rightarrow C) \\ \hline B \rightarrow (A \rightarrow C) \end{array}$$

Id

$$\begin{array}{c} A \\ \hline A \end{array}$$

CPr

$$\begin{array}{c} A \\ \hline B \rightarrow A \end{array}$$

REGLAS DERIVADAS DE CONJUNCIÓN Y DISYUNCIÓN

Propiedad conmutativa

CC

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline\hline B \wedge A \end{array}$$

CD

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \hline\hline B \vee A \end{array}$$

Propiedad asociativa

AC

$$\begin{array}{c} (A \wedge B) \wedge C \\ \hline\hline A \wedge (B \wedge C) \end{array}$$

AD

$$\begin{array}{c} (A \vee B) \vee C \\ \hline\hline A \vee (B \vee C) \end{array}$$

Propiedad distributiva

DC

$$\begin{array}{c} A \wedge (B \vee C) \\ \hline\hline (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \end{array}$$

DD

$$\begin{array}{c} A \vee (B \wedge C) \\ \hline\hline (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{array}$$

Propiedad de idempotencia

IdC

$$\begin{array}{c} A \land A \\ \hline\hline A \end{array}$$

IdD

$$\begin{array}{c} A \lor A \\ \hline\hline A \end{array}$$

Ley de absorción

AbsC

$$\begin{array}{c} A \land (A \lor B) \\ \hline\hline A \end{array}$$

AbsD

$$\begin{array}{c} A \lor (A \land B) \\ \hline\hline A \end{array}$$

REGLAS DERIVADAS DE NEGACIÓN

Reglas de contraposición y «modus tollens»

Cp

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \hline \neg B \to \neg A \end{array}$$

MT

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

Reglas de introducción de doble negador y «ex contradictione quodlibet»

IDN

$$\begin{array}{c} A \\ \hline \neg \neg A \end{array}$$

ECQ

$$\begin{array}{c} A \land \neg A \\ \hline B \end{array}$$

Principios de no contradicción y exclusión de tercero

PNC

$$\neg (A \land \neg A)$$

PTE

$$A \lor \neg A$$

REGLAS ADICIONALES DE CONJUNCIÓN Y DISYUNCIÓN

Leyes de importación y exportación

Imp

$$\begin{array}{c} A \to (B \to C) \\ \hline A \land B \to C \end{array}$$

Exp

$$\begin{array}{c} A \land B \to C \\ \hline A \to (B \to C) \end{array}$$

Silogismo disyuntivo

SD_1

$$\begin{array}{c} A \lor B \\ \neg B \\ \hline A \end{array}$$

SD_2

$$\begin{array}{c} A \lor B \\ \neg A \\ \hline B \end{array}$$

Dilemas

Dil_1

$$\begin{array}{l} A \lor B \\ A \to C \\ B \to C \\ \hline \quad C \end{array}$$

Dil_2

$$\begin{array}{l} \neg A \lor \neg B \\ C \to A \\ C \to B \\ \hline \neg C \end{array}$$

Dil_3

$$\begin{array}{l} A \lor B \\ A \to C \\ B \to D \\ \hline C \lor D \end{array}$$

Dil_4

$$\begin{array}{l} \neg A \lor \neg B \\ C \to A \\ D \to B \\ \hline \neg C \lor \neg D \end{array}$$

REGLAS DE COIMPLICACIÓN

ICO

$$\begin{array}{c} A \to B \\ B \to A \\ \hline A \leftrightarrow B \end{array}$$

ECO_1

$$\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ \hline A \to B \end{array}$$

ECO_2

$$\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ \hline B \to A \end{array}$$

Consecuencias inmediatas de la definición del coimplicador

$$\begin{array}{l} A \leftrightarrow B \\ A \\ \hline \quad B \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \leftrightarrow B \\ B \\ \hline \quad A \end{array}$$

Propiedades del coimplicador

Reflexividad

$$A \leftrightarrow A$$

Simetría

$$\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ \hline B \leftrightarrow A \end{array}$$

Transitividad

$$\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ B \leftrightarrow C \\ \hline A \leftrightarrow C \end{array}$$

INTERCAMBIO

$$A \leftrightarrow B, C_A \;\vdash\; C_B$$

LEYES DE INTERDEFINICIÓN

Definiciones de →

DI_1

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg (A \wedge \neg B)}$$

DI_2

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$$

Definiciones de ∧, ∨

DfC_1

$$\frac{A \wedge B}{\neg (A \rightarrow \neg B)}$$

DfD_1

$$\frac{A \vee B}{\neg A \rightarrow B}$$

DfC_2

$$\frac{A \wedge B}{\neg (\neg A \vee \neg B)}$$

DfD_2

$$\frac{A \vee B}{\neg (\neg A \wedge \neg B)}$$

LEYES DE DE MORGAN

DM_1

$$\frac{\neg (A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$$

DM_2

$$\frac{\neg (A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$$

---

§ 2. *Leyes de implicación*

Comenzaremos por la exposición de una serie de cuatro reglas en las que no interviene otro signo lógico que el implicador y que expresan, por tanto, leyes de implicación pura. Sus respectivas figuras y nombres, con la abreviatura correspondiente se indican a la izquierda de la página. A la derecha y paralelamente, se exhibe la fundamentación de cada una.

Ley del silogismo hipotético **(Sil)** — *Fundamentación*

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{array}}{A \rightarrow C}$$

— 1	$A \rightarrow B$	
— 2	$B \rightarrow C$	
┌ 3	A	
│ 4	B	**MP** 1,3
└ 5	C	**MP** 2,4
6	$A \rightarrow C$	**TD** 3-5

Ley de mutación de premisas **(Mut)** — *Fundamentación*

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$$

— 1	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	
┌ 2	B	
│┌ 3	A	
││ 4	$B \rightarrow C$	**MP** 1,3
│└ 5	C	**MP** 4,2
└ 6	$A \rightarrow C$	**TD** 3-5
7	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	**TD** 2-6

Ley de identidad **(Id)** — *Fundamentación*

$$\frac{A}{A}$$

— 1	A	
┌ 2	$\neg A$	
└ 3	$A \wedge \neg A$	**Prod** 1,2
4	$\neg \neg A$	**Abs** 2-3
5	A	**DN** 4

Ley de carga de premisa **(CPr)** — *Fundamentación*

$$\frac{A}{B \rightarrow A}$$

— 1	A	
┌ 2	B	
└ 3	A	**Id** 1
— 4	$B \rightarrow A$	**TD** 2-3

Observaciones. 1. Las Fundamentaciones de las reglas **Sil** y **Mut** son muy parecidas. Ambas reglas se deducen inmediatamente de las dos básicas de implicación (**MP** y **TD**) sin que sea precisa la intervención de ninguna otra. Además tanto **Sil** como **Mut** se caracterizan por concluir una implicación; y de ahí que, una vez anotados los supuestos iniciales, el primer paso estratégico en la fundamentación de cada una consista en suponer el antecedente de la conclusión, con vistas a una introducción final de ésta por **TD**, con cancelación de supuesto. Por otra parte, tanto en **Sil**

como en **Mut** las premisas iniciales son también implicaciones, y deberán ser disueltas por **MP** en el curso de la fundamentación para liberar sus respectivos consecuentes.

La principal diferencia entre ambas fundamentaciones se debe a que la conclusión en **Mut** es una cadena de dos implicaciones, cuya obtención obliga a suponer primero uno tras otro (líneas 2 y 3 de la fundamentación) el antecedente de cada una y correlativamente a recurrir al final dos veces a la regla **TD.** Ello da lugar al fenómeno de la «nidificación» de supuestos (una deducción subsidiaria dentro de otra deducción subsidiaria).

2. La fundamentación de la regla **Id** se efectúa, por reducción al absurdo, con intervención de las reglas **Prod, Abs** y **DN.**

3. La regla **Cpr** termina, como **Sil** y **Mut**, en una implicación. En su fundamentación procede también, por tanto, suponer el antecedente de esa implicación y buscar el consecuente. En la obtención de este último se hace uso por vez primera de una regla derivada **(Id),** que acorta el proceso (como podrá comprobar el lector si trata de fundamentar esta misma regla **Cpr** con la sola ayuda de las básicas). Finalmente, la implicación en cuestión se construye por **TD,** con descarga de supuesto.

§ 3. *Leyes de conjunción y disyunción*

Las operaciones lógicas de conjunción y disyunción guardan analogía con el producto y la suma, respectivamente, del álgebra ordinaria. Ello se manifiesta, entre otras cosas, en que dichas operaciones lógicas poseen una serie de propiedades similares a las de sus análogos en matemática, y susceptibles de ser expresadas mediante las siguientes equivalencias:

Propiedades de la conjunción.[1]	*Propiedades de la disyunción.*[1]
Conmutativa	
1. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$	2. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

[1] Las propiedades de la suma y el producto en matemática ordinaria son de sobra conocidas: *conmutativa* (el orden de los sumandos, o el de los factores, es indiferente, puesto que no altera, respectivamente, la suma o el producto):

$$a + b = b + a \qquad ab = ba,$$

asociativa (libertad de asociación entre los sumandos, o entre los factores):

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (ab)c = a(bc),$$

y *distributiva del producto respecto a la suma* (dado el producto de un factor cualquiera por una suma, es posible distribuir ese factor dentro de dicha suma, multiplicándolo directamente por cada uno de los sumandos):

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Asociativa

3. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ 4. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

Distributiva de la conjunción en disyunción

5. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Pero la conjunción y la disyunción poseen además otras propiedades que no tienen paralelo en el álgebra ordinaria. Estas propiedades son [2]:

Distributiva de la disyunción en conjunción

6. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Idempotencia

7. $A \wedge A \leftrightarrow A$ 8. $A \vee A \leftrightarrow A$

Absorción

9. $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$ 10. $A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

A continuación se estudiarán estas diez propiedades de la conjunción y disyunción en forma de reglas derivadas, que se reducirán a las básicas.

En la confección de figuras de deducción se indica con *doble raya horizontal* que es posible el tránsito lógico de las premisas a la conclusión y de la conclusión a las premisas. Una figura semejante no será, pues, sino la fusión de dos reglas de sentido inverso (o lo que viene a ser lo mismo: la traducción de una equivalencia lógica al lenguaje de reglas).

La fundamentación de figuras de deducción con doble raya horizontal se expondrá en doble columna de premisas, consecutivamente numeradas: una columna izquierda en la cual se deduce de las fórmulas superiores de la regla la fórmula inferior, y una columna derecha en que se lleva a cabo la deducción en sentido contrario.

Finalmente, es claro que al ser traducidas las diez equivalencias citadas al lenguaje de reglas , desaparecerán los coimplicadores para ser sustituidos por la doble línea horizontal de las correspondientes figuras de deducción. Comoquiera que los únicos signos lógicos que intervienen en dichas figuras son el conjuntor y el disyuntor, parece legítimo suponer que será posible fundamentarlas apoyándose tan sólo en las reglas básicas de esos dos signos.

---

[2] Ninguna de estas cinco propiedades se cumple con carácter general en matemática ordinaria. Observe el lector que, en lo que respecta a la distribución, es ley matemática la ya citada del producto en suma, pero no existe ley inversa que distribuya la suma en producto.

Ley conmutativa de la conjunción **(CC)**

$$\frac{A \wedge B}{B \wedge A}$$

Fundamentación

— 1 $A \wedge B$		— 5 $B \wedge A$	
2 B	**Simp$_2$** 1	6 A	**Simp$_2$** 5
3 A	**Simp$_1$** 1	7 B	**Simp$_1$** 5
4 $B \wedge A$	**Prod** 2,3	8 $A \wedge B$	**Prod** 6,7

Ley asociativa de la conjunción **(AC)**

$$\frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge (B \wedge C)}$$

Fundamentación

— 1 $(A \wedge B) \wedge C$		— 8 $A \wedge (B \wedge C)$	
2 $A \wedge B$	**Simp$_1$** 1	9 A	**Simp$_1$** 8
3 C	**Simp$_2$** 1	10 $B \wedge C$	**Simp$_2$** 8
4 A	**Simp$_1$** 2	11 B	**Simp$_1$** 10
5 B	**Simp$_2$** 2	12 C	**Simp$_2$** 10
6 $B \wedge C$	**Prod** 5,3	13 $A \wedge B$	**Prod** 9,11
7 $A \wedge (B \wedge C)$	**Prod** 4,6	14 $(A \wedge B) \wedge C$	**Prod** 13,12

Ley distributiva de la conjunción **(DC)**

$$\frac{A \wedge (B \vee C)}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$$

Fundamentación

— 1 $A \land (B \lor C)$	
2 A	**Simp**$_1$ 1
3 $B \lor C$	**Simp**$_2$ 1
— 4 B	
5 $A \land B$	**Prod,** 2,4
— 6 $(A \land B) \lor (A \land C)$	**Ad**$_1$ 5
— 7 C	
8 $A \land C$	**Prod,** 2,7
— 9 $(A \land B) \lor (A \land C)$	**Ad**$_2$ 8
10 $(A \land B) \lor (A \land C)$	**Cas** 3,4-6,7-9

— 11 $(A \land B) \lor (A \land C)$	
— 12 $A \land B$	
13 A	**Simp**$_1$ 12
14 B	**Simp**$_2$ 12
15 $B \lor C$	**Ad**$_1$ 14
— 16 $A \land (B \lor C)$	**Prod** 13, 15
— 17 $A \land C$	
18 A	**Simp**$_1$ 17
19 C	**Simp**$_2$ 17
20 $B \lor C$	**Ad**$_2$ 19
— 21 $A \land (B \lor C)$	**Prod** 18, 20
22 $A \land (B \lor C)$	**Cas** 11, 12-16, 17-21

Observaciones. 1. Las fundamentaciones de la ley conmutativa de la conjunción y la ley asociativa de la conjunción muestran una estructura similar y muy sencilla. En ambas es suficiente el solo uso de las reglas básicas de conjuntor **(Simp** y **Prod)**. Y en cada una de las dos columnas que integran cada fundamentación se repite la misma estrategia, consistente en descomponer mediante **Simp** la premisa inicial (que es en las cuatro columnas una conjunción) y recombinar luego mediante **Prod** los elementos resultantes para obtener la conclusión deseada. (La sola diferencia está en el mayor número de pasos de las columnas correspondientes a la fundamentación de la ley asociativa, que viene exigido por el mayor grado de complejidad de la premisa inicial y la conclusión de dicha ley.)

2. La fundamentación de la ley distributiva de la conjunción requiere, en cambio, el uso de las cuatro reglas básicas de conjuntor y disyuntor: **Simp, Prod, Ad, Cas.**

La premisa inicial de la columna izquierda es una conjunción que contiene una disyunción, y la premisa inicial de la columna derecha es una disyunción que contiene conjunciones. En la descomposición de ambas premisas intervienen, consiguientemente, las reglas **Simp** y **Cas** en el orden que proceda. La correspondiente recomposición de elementos, con vistas a obtener las respectivas conclusiones, se efectúa mediante **Prod** y **Ad.**

Ley de idempotencia de la conjunción (IdC)

$$\frac{A \land A}{\overline{A}}$$

Fundamentación

— 1 $A \land A$	
2 A	**Simp** 1

— 3 A	
4 A	**Id** 3
5 $A \land A$	**Prod** 3,4

Ley de absorción de la conjunción **(AbsC)**

$$\frac{A \wedge (A \vee B)}{A}$$

Fundamentación

— 1 $A \wedge (A \vee B)$		— 3 A	
2 A	**Simp**$_1$ 1	4 $A \vee B$	**Ad**$_1$ 3
		5 $A \wedge (A \vee B)$	**Prod** 3,4

Ley conmutativa de la disyunción **(CD)**

$$\frac{A \vee B}{B \vee A}$$

Fundamentación

— 1 $A \vee B$		— 7 $B \vee A$	
┌ 2 A		┌ 8 B	
└ 3 $B \vee A$	**Ad**$_2$ 2	└ 9 $A \vee B$	**Ad**$_2$ 8
┌ 4 B		┌ 10 A	
└ 5 $B \vee A$	**Ad**$_1$ 4	└ 11 $A \vee B$	**Ad**$_1$ 10
6 $B \vee A$	**Cas** 1,2-3,4-5	12 $A \vee B$	**Cas** 7,8-9,10-11

Ley asociativa de la disyunción **(AD)**

$$\frac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)}$$

Fundamentación

1	$(A \vee B) \vee C$	
2	$A \vee B$	
3	A	
4	$A \vee (B \vee C)$	**Ad**$_1$ 3
5	B	
6	$B \vee C$	**Ad**$_1$ 5
7	$A \vee (B \vee C)$	**Ad**$_2$ 6
8	$A \vee (B \vee C)$	**Cas** 2,3-4,5-7
9	C	
10	$B \vee C$	**Ad**$_2$ 9
11	$A \vee (B \vee C)$	**Ad**$_2$ 10
12	$A \vee (B \vee C)$	**Cas**$_1$ 1,2-8,9-11
13	$A \vee (B \vee C)$	
14	A	
15	$A \vee B$	**Ad**$_1$ 14
16	$(A \vee B) \vee C$	**Ad**$_1$ 15
17	$B \vee C$	
18	B	
19	$A \vee B$	**Ad**$_2$ 18
20	$(A \vee B) \vee C$	**Ad**$_1$ 19
21	C	
22	$(A \vee B) \vee C$	**Ad**$_2$ 21
23	$(A \vee B) \vee C$	**Cas** 17,18-20,21-22
24	$(A \vee B) \vee C$	**Cas** 13,14-16,17-23

Ley distributiva de la disyunción (DD)

$$\frac{A \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

Fundamentación

1	$A \vee (B \wedge C)$	
2	A	
3	$A \vee B$	**Ad**$_1$ 2
4	$A \vee C$	**Ad**$_1$ 2
5	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	**Prod** 3,4
6	$B \wedge C$	
7	B	**Simp**$_1$ 6
8	$A \vee B$	**Ad**$_2$ 7
9	C	**Simp**$_2$ 6
10	$A \vee C$	**Ad**$_2$ 9
11	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	**Prod** 8,10
12	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	**Cas** 1,2-5,6-11
13	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
14	$A \vee B$	**Simp**$_1$ 13
15	A	
16	$A \vee (B \wedge C)$	**Ad**$_1$ 15
17	B	
18	$A \vee C$	**Simp**$_2$ 13
19	A	
20	$A \vee (B \wedge C)$	**Ad**$_1$ 19
21	C	
22	$B \wedge C$	**Prod** 17,21
23	$A \vee (B \wedge C)$	**Ad**$_2$ 22
24	$A \vee (B \wedge C)$	**Cas** 18,19-20,21-23
25	$A \vee (B \wedge C)$	**Cas** 14,15-16,17-24

Observaciones. 1. Por lo que se refiere a la deducción de las propiedades conmutativa y asociativa de la disyunción, se advertirá que en cada una de las bandas o

columnas de cada fundamentación se repite un mismo proceso deductivo, consistente en la descomposición de una premisa inicial que tiene la estructura de una disyunción y en la recomposición de los elementos resultantes, con vistas a obtener una conclusión de estructura asimismo disyuntiva.

Hablando en términos generales, cuando la fórmula a descomponer es una disyunción, el recurso adecuado es la disolución hipotética del disyuntor mediante prueba por casos; y cuando la fórmula que se desee obtener a partir de elementos aislados sea una disyunción, el recurso es la regla de adición. De ahí que la fundamentación de las dos propiedades citadas se reduzca a una adecuada combinación de aplicaciones de las dos reglas básicas de disyunción **(Cas, Ad)**.

2. En la deducción de la regla de distribución intervienen, en cambio, las cuatro reglas **Cas, Ad, Simp** y **Prod.**

En la columna izquierda se trata de descomponer la premisa inicial (una disyunción que contiene una conjunción) para establecer como conclusión una conjunción de disyunciones. La descomposición de la referida premisa se efectúa mediante prueba por casos. En el primer caso (suposición de A), resulta fácil construir mediante **Ad** dos disyunciones cuya conjunción mediante **Prod** da (provisionalmente) la conclusión. En el segundo caso (suposición de A y B) se reduce primero mediante **Simp** la suposición a sus elementos aislados, que servirán de base para reconstruir después, mediante **Ad** y **Prod** (y provisionalmente aún) la conclusión, que será establecida por **Cas** en el paso siguiente, esta vez con carácter definitivo.

En la columna derecha se da una prueba por casos dentro de otra prueba por casos. La premisa inicial a descomponer es una conjunción de disyunciones. La regla **Simp** permite aislar el primero de sus factores el cual es una disyunción que se descompone por **Cas**. El análisis del primero es trivial. El análisis del segundo obliga a extraer mediante **Simp** el segundo factor de la premisa inicial, que deberá ser también descompuesto mediante una nueva prueba por casos. Obsérvese que, por así exigirlo el protocolo de las dos pruebas por casos, la conclusión final (línea 25) deberá ser derivada antes cuatro veces (líneas 16, 20, 23 y 24).

Ley de idempotencia de la disyunción (IdD)

$$\frac{A \vee A}{A}$$

Fundamentación

— 1 A ∨ A			— 7 A	
┌ 2 A			8 A ∨ A	**Ad**$_1$ 7
└ 3 A	**Id** 2			
┌ 4 A				
└ 5 A	**Id** 2			
6 A	**Cas** 1,2-3,4-5			

Ley de absorción de la disyunción **(AbsD)**

$$\frac{A \lor (A \land B)}{A}$$

Fundamentación

— 1 A ∨ (A ∧ B)		— 7 A	
┌ 2 A		8 A ∨ (A ∧ B)	**Ad**$_1$ 7
└ 3 A	**Id** 2		
┌ 4 A ∧ B			
└ 5 A	**Simp**$_1$ 4		
6 A	**Cas** 1,2-3,4-5		

§ 4. *Leyes de negación*

En este apartado consideraremos seis reglas derivadas de negación, cuyas respectivas fundamentaciones se efectuarán por el método de reducción al absurdo.

Dos de ellas lo son de implicador y negador: se trata de la ley de contraposición (que reviste cuatro modalidades) y del *modus tollens*.

Ley de contraposición **(Cp)**

Cp$_1$

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

Fundamentación

— 1 A → B	
┌ 2 ¬ B	
│ ┌ 3 A	
│ │ 4 B	**MP** 1,3
│ └ 5 B ∧ ¬ B	**Prod** 4,2
└ 6 ¬A	**Abs** 3-5
7 ¬ B → ¬ A	**TD** 2-6

Cp$_2$

$$\frac{A \to \neg B}{B \to \neg A}$$

— 1 $A \to \neg B$
— 2 B
— 3 A
4 $\neg B$ **MP** 1,3
5 $B \wedge \neg B$ **Prod** 2,4
6 $\neg A$ **Abs** 3-5
7 $B \to \neg A$ **TD** 2-6

Cp$_3$

$$\frac{\neg A \to B}{\neg B \to A}$$

— 1 $\neg A \to B$
— 2 $\neg B$
— 3 $\neg A$
4 B **MP** 1,3
5 $B \wedge \neg B$ **Prod** 4,2
6 $\neg \neg A$ **Abs** 3-5
7 A **DN** 6
8 $\neg B \to A$ **TD** 2-7

Cp$_4$

$$\frac{\neg A \to \neg B}{B \to A}$$

1 $\neg A \to \neg B$
— 2 B
— 3 $\neg A$
4 $\neg B$ **MP** 1,3
5 $B \wedge \neg B$ **Prod** 2,4
6 $\neg \neg A$ **Abs** 3-5
7 A **DN** 6
8 $B \to A$ **TD** 2-7

Modus tollens **(MT)** *Fundamentación*

$$\frac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A}$$

— 1 $A \to B$
— 2 $\neg B$
— 3 A
4 B **MP** 1-3
5 $B \wedge \neg B$ **Prod** 4,2
6 $\neg A$ **Abs** 3-5

Observaciones. 1. Las fundamentaciones de las cuatro modalidades de **Cp** siguen un patrón similar. Se supone primero el antecedente de la conclusión (con vistas a un establecimiento de ésta por **TD)** y después la contradictoria del consecuente (con vistas a su introducción por **Abs).**

Las modalidades tercera y cuarta de dicha regla **Cp** presentan en su conclusión un consecuente positivo, A. La deducción indirecta de A a partir de ¬A obliga a recurrir a la regla **DN**, lo que añade un paso más a la deducción.

2. La fundamentación de la regla **MT** que se acaba de exponer transcurre por reducción al absurdo. Una deducción más breve y elegante resultaría valiéndose de la regla derivada **Cp**:

— 1	$A \rightarrow B$	
— 2	$\neg B$	
3	$\neg B \rightarrow \neg A$	**Cp** 1
4	$\neg A$	**MP** 3,2

Las cuatro leyes restantes de la negación son: la ley de introducción de doble negación, el principio de no contradicción, el principio de tercio excluso (*tertium non datur*) y la ley de eliminación débil de negación (principio *ex contradictione quodlibet*).

La regla de introducción de doble negación es justamente la inversa de la regla básica de eliminación de negador **(DN)**, y por lo demás, la única de las cuatro, en la que no interviene otro signo lógico que el negador.

El principio de no contradicción: $\neg (A \wedge \neg A)$, y el principio de tercio excluso: $A \vee \neg A$ [3], son reglas sin premisas, y ambos tienen por tema el par de contradictorios (una pareja de enunciados tal que uno de ellos es la negación del otro). El principio de no contradicción es la negación del producto lógico de ese par (en términos semánticos: de dos enunciados contradictorios, uno de ellos cuando menos es falso). El principio de tercio excluso es la aserción de la suma lógica de esos mismos extremos (en términos semánticos: de dos enunciados contradictorios, uno de ellos cuando menos es verdadero).

La derivación de estas cuatro reglas transcurre, como en el caso de las dos anteriores, por reducción al absurdo.

---

[3] Ambos han sido considerados clásicamente, desde ARISTÓTELES, como principios supremos del entendimiento humano. El hecho de que aquí ocupen un papel derivado es una cuestión de orden formal, que no prejuzga su importancia filosófica.

HEGEL pretendió en el siglo pasado «superar» racionalmente el principio de no contradicción. El éxito de esa empresa está por ver. Mayor interés ofrece la crítica dirigida en nuestro siglo por BROUWER y la escuela intuicionista al principio de tercio excluso.

Introducción de doble negación **(IDN)** [4] — *Fundamentación*

$\frac{A}{\neg\neg A}$	1 A	
	2 $\neg A$	
	3 $A \wedge \neg A$	**Prod** 1,2
	4 $\neg\neg A$	**Abs** 2-3

Principio de no contradicción **(PNC)** — *Fundamentación*

$\neg(A \wedge \neg A)$	1 $A \wedge \neg A$	
	2 $A \wedge \neg A$	**Id** 1
	3 $\neg(A \wedge \neg A)$	**Abs** 1-2

Principio de tercio excluso **(PTE)** — *Fundamentación*

$A \vee \neg A$	1 $\neg(A \vee \neg A)$	
	2 A	
	3 $A \vee \neg A$	**Ad**$_1$ 2
	4 $(A \vee \neg A) \wedge \neg(A \vee \neg A)$	**Prod** 3,1
	5 $\neg A$	**Abs** 2-4
	6 $A \vee \neg A$	**Ad**$_2$ 5
	7 $(A \vee \neg A) \wedge \neg(A \vee \neg A)$	**Prod** 6,1
	8 $\neg\neg(A \vee \neg A)$	**Abs** 1-7
	9 $A \vee \neg A$	**DN** 8

[4] En ocasiones utilizaremos también la fusión de la regla básica **DN** y esta nueva regla derivada **IDN**. Dicha fusión: $\frac{\neg\neg A}{A}$ se designará con la abreviatura **DN***.

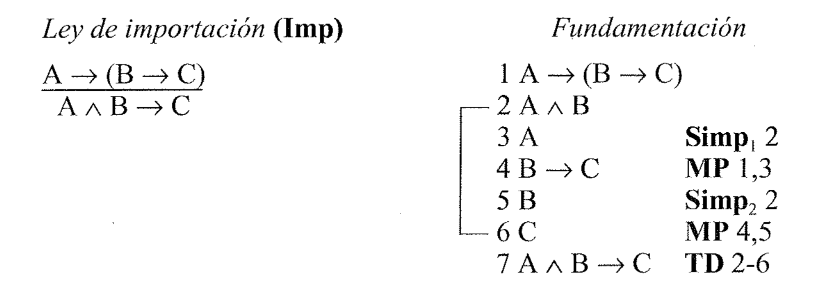
Eliminación débil de negador **(ECQ)** — *Fundamentación*[5]

$$\frac{A \land \neg A}{B}$$

—	1 $A \land \neg A$	
┌	2 $\neg B$	
│	3 A	**Simp**$_1$ 1
│	4 $\neg A$	**Simp**$_2$ 1
└	5 $A \land \neg A$	**Prod** 3,4
	6 $\neg\neg B$	**Abs** 2-5
	7 B	**DN** 6

§ 5. *Reglas adicionales de conjunción y disyunción*

A la relación de reglas ya conocidas añadiremos ahora cuatro nuevas: las *reglas de importación y exportación,* en las que desempeña un papel importante el conjuntor, y el *silogismo disyuntivo* y el *dilema,* donde desempeña un papel importante el disyuntor.



[5] Otra derivación de la misma regla podría transcurrir de forma que el supuesto de la línea 2: $\neg B$ no se introdujese con vistas a una reducción al absurdo, sino para construir una implicación susceptible de ser convertida después por **Cp** en otra de la que, por **MP**, se extraería la conclusión deseada:

—	1 $A \land \neg A$	
┌	2 $\neg B$	
└	3 $\neg A$	**Simp**$_2$ 1
	4 $\neg B \rightarrow \neg A$	**TD** 2-3
	5 $A \rightarrow B$	**Cp**$_4$ 4
	6 A	**Simp**$_1$ 1
	7 B	**MP** 5,6

Ley de exportación **(Exp)** — *Fundamentación*

$$\frac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)}$$

—	1 $A \wedge B \to C$	
┌	2 A	
│┌	3 B	
││	4 $A \wedge B$	**Prod** 2,3
│└	5 C	**MP** 1,4
└	6 $B \to C$	**TD** 3-5
	7 $A \to (B \to C)$	**TD** 2-6

Observaciones: 1. Las reglas de importación y exportación permiten cambiar un implicador por un conjuntor y viceversa cuando las fórmulas conectadas por estos juntores sean siempre premisas (pero no cuando el implicador conecte una premisa con la conclusión final de una serie deductiva). Dada la presencia de implicadores y conjuntores, las fundamentaciones se apoyarán en las cuatro reglas básicas correspondientes a estos signos: **MP, TD, Simp, Prod.**

2. Ambas reglas se caracterizan porque su conclusión es una implicación, que deberá establecerse comenzado por suponer (una vez anotadas las premisas iniciales) el antecedente (línea 2 en ambas fundamentaciones).

3. A partir de la línea 3 la estrategia de la deducción en **Imp** consistirá en eliminar mediante **Simp** los extremos de la conjunción supuesta en la línea 2, y eliminar después con ellos por **MP** los implicadores de la premisa inicial, con vistas a introducir finalmente la conclusión mediante **TD**, con descarga de supuesto.

4. La estrategia de la deducción en **Exp** a partir de la línea 3 consistirá, en cambio, en volver a suponer un antecedente de implicación (ya que la conclusión a obtener en este caso es una cadena de implicaciones), construir mediante **Prod** con los dos supuestos establecidos el antecedente de la premisa inicial y liberar mediante **MP** el consecuente de ésta. Con ello resulta posible, tras dos aplicaciones de **TD**, construir la conclusión. La deducción de **Exp** presenta el fenómeno de la nidificación de supuestos .

Silogismo disyuntivo **(SD)**[6] — *Fundamentación*

$$\frac{A \vee B \qquad \neg B}{A}$$

—	1 $A \vee B$	
—	2 $\neg B$	
┌	3 A	
└	4 A	**Id** 3
┌	5 B	
│	6 $B \wedge \neg B$	**Prod** 5,2
└	7 A	**ECQ** 6
	8 A	**Cas** 1,3-4,5-7

[6] El silogismo disyuntivo presenta dos modalidades, según que la premisa me-

Dilema (Dil) [7]

Dilema constructivo

Simple

$$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C}$$

Complejo

$$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow D}{C \vee D}$$

Fundamentación (Simple)

— 1	$A \vee B$	
— 2	$A \rightarrow C$	
— 3	$B \rightarrow C$	
┌ 4	A	
└ 5	C	**MP** 2,4
┌ 6	B	
└ 7	C	**MP** 3,6
8	C	**Cas** 1,4-5,6-7

Fundamentación (Complejo)

— 1	$A \vee B$	
— 2	$A \rightarrow C$	
— 3	$B \rightarrow D$	
┌ 4	A	
│ 5	C	**MP** 2,4
└ 6	$C \vee D$	**Ad**$_1$ 5
┌ 7	B	
│ 8	D	**MP** 3,7
└ 9	$C \vee D$	**Ad**$_2$ 8
10	$C \vee D$	**Cas** 1,4-6,7-9

---

nor niegue el segundo o el primer extremo de la mayor. Denominando **SD**$_1$ a la que se acaba de exponer, la modalidad **SD**$_2$ sería:

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B}$$

Esta regla de inferencia corresponde en sus dos modalidades a la forma de silogismo disyuntivo tradicionalmente llamada *modus tollendo ponens*, que los estoicos solían esquematizar así:

A o *B*
no *B*
Por tanto, *A*

A o *B*
no *A*
Por tanto, *B*.

Al *modus tollendo ponens* la lógica tradicional oponía el *modus ponendo tollens:*

A o *B*
A
Por tanto, no *B*

A o *B*
B
Por tanto, no *A*,

en donde la «o» ha de entenderse, obviamente, en sentido exclusivo.

[7] El dilema es una forma de inferencia bien conocida de la lógica tradicional. Sus premisas son una disyunción y dos condicionales. Si la disyunción afirma los an-

Dilema destructivo

Simple	Complejo
$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \vee \neg B$
$C \rightarrow A$	$C \rightarrow A$
$C \rightarrow B$	$D \rightarrow B$
$\neg C$	$\neg C \vee \neg D$

Fundamentación

— 1	$\neg A \vee \neg B$	
— 2	$C \rightarrow A$	
— 3	$C \rightarrow B$	
┌ 4	$\neg A$	
└ 5	$\neg C$	**MT** 2,4
┌ 6	$\neg B$	
└ 7	$\neg C$	**MT** 3,6
8	$\neg C$	**Cas** 1,4-5,6-7

Fundamentación

— 1	$\neg A \vee \neg B$	
— 2	$C \rightarrow A$	
— 3	$D \rightarrow B$	
┌ 4	$\neg A$	
│ 5	$\neg C$	**MT** 2,4
└ 6	$\neg C \vee \neg D$	**Ad$_1$** 5
┌ 7	$\neg B$	
│ 8	$\neg D$	**MT** 3,7
└ 9	$\neg C \vee \neg D$	**Ad$_2$** 8
10	$\neg C \vee \neg D$	**Cas** 1,4-6,7-9

§ 6. *Leyes de coimplicación*

El coimplicador puede ser considerado como un signo derivado mediante la definición: $A \leftrightarrow B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (véase Capítulo V, sección 1). Esta definición puede expresarse mediante las dos reglas siguientes [8]:

---

tecedentes de estas condiciones, el dilema se llama *constructivo*; y si niega los consecuentes de ellas, *destructivo*. El dilema constructivo puede ser *simple* (cuando los antecedentes de las condiciones pero no los consecuentes difieren entre sí) y *complejo* (cuando antecedentes y consecuentes difieren entre sí). Análogamente, el destructivo es *simple* (cuando difieren los consecuentes, pero no los antecedentes) y *complejo* (cuando antecedentes y consecuentes difieren).

[8] La tabla de símbolos formales del Capítulo II (§ 7) incluía entre los primitivos al coimplicador. De acuerdo con ello, puede convenirse también en que estas dos nuevas reglas incrementen la lista de ocho básicas del Capítulo V.

Reglas (supletorias) de coimplicación

Introducción de coimplicador *Eliminación de coimplicador*

ICO	**ECO_1**	**ECO_2**
$\dfrac{A \to B \quad B \to A}{A \leftrightarrow B}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B}{A \to B}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$

De dichas reglas se derivan estas otras dos modalidades de eliminación de coimplicador:

ECO_3 *Fundamentación*

$$\dfrac{A \leftrightarrow B \quad A}{B}$$

— 1 $A \leftrightarrow B$
— 2 A
3 $A \to B$ **ECO_1** 1
4 B **MP** 3,2

ECO_4 *Fundamentación*

$$\dfrac{A \leftrightarrow B \quad B}{A}$$

— 1 $A \leftrightarrow B$
— 2 B
3 $B \to A$ **ECO_2** 1
4 A **MP** 3,2

En estas reglas se puede fundar la deducción de tres propiedades de la relación de coimplicación:

Reflexividad: $\vdash A \leftrightarrow A$.
Simetría: $\vdash (A \leftrightarrow B) \to (B \leftrightarrow A)$.
Transitividad: $\vdash (A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$.

Deducción de la propiedad de reflexividad.

┌ 1 A
└ 2 A **Id** 1
3 $A \to A$ **TD** 1-2
┌ 4 A
└ 5 A **Id** 4
6 $A \to A$ **TD** 4,5
7 $A \leftrightarrow A$ **ICO** 3-6

Deducción de la propiedad de simetría

1 $A \leftrightarrow B$	
2 $B \rightarrow A$	**ECO**$_2$ 1
3 $A \rightarrow B$	**ECO**$_1$ 1
4 $B \leftrightarrow A$	**ICO** 2,3
5 $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A)$	**TD** 1-4

Deducción de la propiedad de transitividad

1 $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)$	
2 $A \leftrightarrow B$	**Simp**$_1$ 1
3 $B \leftrightarrow C$	**Simp**$_2$ 1
4 $A \rightarrow B$	**ECO**$_1$ 2
5 $B \rightarrow C$	**ECO**$_1$ 3
6 $A \rightarrow C$	**Sil** 4,5
7 $C \rightarrow B$	**ECO**$_2$ 3
8 $B \rightarrow A$	**ECO**$_2$ 2
9 $C \rightarrow A$	**Sil** 7,8
10 $A \leftrightarrow C$	**ICO** 6,9
11 $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$	**TD** 1,10

§ 7. *Intercambio*

Al repertorio de reglas ya conocido debe añadirse una nueva de carácter muy especial: la *Regla de intercambio o reemplazo*.

El interés y la utilidad de esta regla se advierten considerando el siguiente ejemplo. Supóngase que se desea reducir una fórmula del tipo

$$\neg \neg A \rightarrow \neg \neg A \wedge B,$$

eliminando en ella las ocurrencias de doble negador, para obtener

$$A \rightarrow A \wedge B.$$

Ello requeriría, por supuesto, el recurso a la regla básica de eliminación de (doble) negación **DN**. Pero obsérvese que, por el momento y con los instrumentos que se poseen hasta ahora, esto sólo sería posible a través de un rodeo relativamente largo. Porque la regla **DN** es

aplicable a toda fórmula cuyo símbolo principal sea un negador (a su vez adosado a otro negador), pero no a un trozo o subfórmula cualquiera que forme parte de una fórmula cuyo signo principal sea otro.

Es claro que en la primera de las fórmulas citadas hay dos ocurrencias de la fórmula $\neg \neg$ A, a la que podría aplicarse la regla **DN** si se presentase aisladamente, pero no como subfórmula, *inserta en el contexto de* otra fórmula cuyo signo principal es el implicador. Para poder efectuar la requerida eliminación sería preciso primero descomponer la fórmula englobante, más o menos así:

— 1 $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A \wedge B$	
┌ 2 A	
│ 3 $\neg\neg A$	**IDN** 2
│ 4 $\neg\neg A \wedge B$	**MP** 1,3
│ 5 B	**Simp**$_2$ 4
└ 6 $A \wedge B$	**Prod** 2,5
7 $A \rightarrow A \wedge B$	**TD** 2-6

La regla de intercambio, que a continuación trataremos de fundar, es una regla que permite, en ciertas condiciones, operar directamente sobre subfórmulas, esto es, sobre fórmulas insertas en el contexto de otra fórmula, sin necesidad de sacarlas primero de ese contexto en el curso de la deducción. En la anterior deducción la regla de intercambio permitiría el paso de la línea 1 a la línea 7 en forma inmediata y sin rodeo.

Pasemos primero a definir la noción de *intercambio.* Sean A y B dos fórmulas cualesquiera del cálculo. Sea C otra fórmula que contiene por lo menos una ocurrencia de A como subfórmula; especificaremos esta circunstancia escribiendo C_A, esto es: la fórmula C, en la que se destaca convencionalmente una determinada ocurrencia de una determinada subfórmula A. Sea C_B el resultado de cambiar en C la referida ocurrencia de A por B.

A esta operación se le da el nombre de *intercambio o reemplazo.* A la fórmula C la llamaremos *fórmula inicial*; a las fórmulas A y B, *subfórmulas intercambiadas,* o más específicamente *subfórmula reemplazada* a la primera y *subfórmula reemplazante* a la segunda; a la fórmula C_B la llamaremos *fórmula final.* Por ejemplo:

sea la fórmula inicial $C \leftrightharpoons (p \rightarrow p \vee q) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow q \wedge r)$
sea la (sub)fórmula $A \leftrightharpoons p \vee q$

sea la (sub)fórmula $B \leftrightharpoons \neg p \rightarrow q$

convengamos en que al escribir C_A se considera la primera ocurrencia de A en C; la fórmula final C_B será: $(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow q \wedge r)$.

A la operación de intercambio le corresponde una regla del mismo nombre, *regla de intercambio o reemplazo*, que se podría enunciar así: dadas dos fórmulas equivalentes A y B, y dada una tercera fórmula C que contiene como subfórmula la ocurrencia de una de ellas, puede cambiarse en C dicha ocurrencia de esa subfórmula por la ocurrencia de su equivalente. En forma abreviada:

$$\frac{A \leftrightarrow B,\ C_A}{C_B}$$

La regla de intercambio, a la que denominaremos **I**, permite, por tanto, cambiar una fórmula por su equivalente *dentro del contexto de cualquier premisa* y sin necesidad de descomponer primero esa premisa. Una aplicación de esta regla afecta solamente a *una* ocurrencia de una subfórmula en una premisa. Para reemplazar dos o más ocurrencias de una subfórmula en una premisa se requiere, correlativamente, aplicar dos o más veces la referida regla.

La sucesiva aplicación de la regla de intercambio a las distintas ocurrencias de una subfórmula, se puede simultanear escribiendo en el comentario a la derecha de la línea correspondiente, y a manera de exponente afecto a la **I**, el número de veces que haya procedido la aplicación. En el ejemplo de la página anterior, la fórmula inicial: $\neg \neg A \leftrightarrow \neg \neg A \wedge B$, quedaría inmediatamente reducida a la fórmula final: $A \rightarrow A \wedge B$ por dos aplicaciones de **I**. En el comentario a la fórmula final debe especificarse también en qué ley concreta de equivalencia se basa el intercambio. En nuestro ejemplo:

— 1 $\neg \neg A \rightarrow \neg \neg A \wedge B$
2 $A \rightarrow A \wedge B$ **I^2DN 1**

La validez de la regla de intercambio depende de la demostración de un teorema, el llamado *teorema de intercambio*, que se puede enunciar así:

Si A *y* B *son fórmulas equivalentes cualesquiera, el resultado de intercambiarlas dentro del contexto de cualquier fórmula* C *es equivalente a esa misma fórmula.* Dicho más brevemente:

si $A \leftrightarrow B$, entonces $C_A \leftrightarrow C_B$.

Este teorema (y lo mismo sucede con la regla de intercambio) no forma parte del lenguaje objeto, sino del metalenguaje; es un *metateorema,* que implica estructuralmente referencia a muy diversos contextos de formulas. Su demostración no se efectúa por métodos exclusivamente formales, sino recurriendo además al uso intuitivo del llamado principio de inducción matemática.

A este respecto conviene hacer un par de aclaraciones. El *principio de inducción matemática*, que es uno de los pilares básicos de la matemática elemental, se enuncia informalmente así: «una propiedad que corresponda a cero y al sucesor de cualquier número natural que la posea, corresponde a todo número natural» (sobre la estructura formal de este principio puede verse el Capítulo XIV, § 8).

De acuerdo con dicho principio resulta posible probar con carácter general una proposición referente a números naturales, si se prueba:

a) que esa proposición vale para el número cero; y

b) que si por hipótesis esa proposición vale para cualquier número *n*, entonces vale para $n + 1$. A la primera parte de una prueba semejante se le llama *base*, y a la segunda, *paso* de la inducción. Una vez establecidos la base y el paso de la inducción, queda establecida la proposición general.

El campo principal de aplicación del principio de inducción matemática es el universo de los números naturales. Pero como las fórmulas de la lógica elemental tienen una estructura finita, es posible expresar esa estructura en números naturales mediante funciones tales como el grado lógico de una fórmula. De este modo, por inducción sobre tales números, resulta posible demostrar tesis generales valederas para toda fórmula. Cuando el principio de inducción matemática se aplica a (números naturales que son medida de) fórmulas lógicas, se le llama principio de *inducción semiótica,* la cual no es otra cosa que la inducción matemática aplicada al material semiótico o simbólico de que están hechas las fórmulas.

Así pues, si se muestra que una propiedad le corresponde a las fórmulas de grado cero, y se muestra también que si corresponde a las fórmulas de grado *n*, corresponde asimismo a las de grado $n + 1$, entonces queda probado que esa propiedad corresponde a toda fórmula.

A este principio se recurre en la prueba del metateorema de intercambio, la cual se efectúa por inducción semiótica sobre el grado lógico de la fórmula englobante.

Este teorema consta de una hipótesis:

$$A \leftrightarrow B$$

y de una tesis:

$$C_A \leftrightarrow C_B.$$

A lo largo de todo el proceso inductivo, tanto de la base como del paso, la hipótesis es algo que se dará, obviamente, en todo momento por supuesto, mientras que la tesis es justamente lo que, tanto en la base como en el paso, habrá que probar.

Base. $G(C_A) = 0$. Esto quiere decir que C_A es atómica. Pero entonces C_A es A y A es B, y por tanto, trivialmente, $C_A \leftrightarrow C_B$.

Paso. Se supone que para cualquier grado *n* de C_A, $C_A \leftrightarrow C_B$. Y se ha de probar que para una fórmula D de grado lógico $n + 1$ y tal que englobase inmediatamente a

C_A (esto es: que su símbolo principal recayese de modo inmediato sobre C_A), valiese el intercambio: si C_A se cambia por C_B en el seno de D, el resultado D^+ sería tal que $D \leftrightarrow D^+$.

Ahora bien la fórmula D ha de tener forzosamente la estructura: (1) de una negación, y entonces $D \leftrightharpoons \neg C_A$; (2) de una conjunción, y entonces $D \leftrightharpoons C_A \wedge E$; (3) de una disyunción, y entonces $D \leftrightharpoons C_A \vee E$; o de (4) una implicación, y entonces o bien (4.1) $D \leftrightharpoons C_A \rightarrow E$, o bien (4.2) $D \leftrightharpoons E \rightarrow C_A$.

El examen de estos casos, uno por uno, suministra la prueba del paso del teorema.

Caso (1): $D \leftrightharpoons \neg C_A$. Hay que demostrar $\neg C_A \leftrightarrow \neg C_B$.

1 $C_A \leftrightarrow C_B$	hipótesis de la inducción
2 $C_B \rightarrow C_A$	**ECO$_2$** 1
3 $\neg C_A \rightarrow \neg C_B$	**Cp** 2
4 $C_A \rightarrow C_B$	**ECO$_1$** 1
5 $\neg C_B \rightarrow \neg C_A$	**Cp** 4
6 $\neg C_A \leftrightarrow \neg C_B$	**ICO** 4,5

Caso (2): $D \leftrightharpoons C_A \wedge E$. Hay que demostrar $C_A \wedge E \leftrightarrow C_B \wedge E$.

— 1 $C_A \wedge E$		— 7 $C_B \wedge E$	
2 C_A	**Simp$_1$** 1	8 C_B	**Simp$_1$** 7
3 $C_A \leftrightarrow C_B$	**Hip. induc.**	9 $C_A \leftrightarrow C_B$	**Hip. induc.**
4 C_B	**ECO$_3$** 3	10 C_A	**ECO$_4$** 9
5 E	**Simp$_2$** 1	11 E	**Simp$_2$** 7
6 $C_B \wedge E$	**Prod** 4,5	12 $C_A \wedge E$	**Prod** 10,11

Caso (3): $D \leftrightharpoons C_A \vee E$. Hay que demostrar $C_A \vee E \leftrightarrow C_B \vee E$.

— 1 $C_A \vee E$		— 10 $C_B \vee E$	
2 $C_A \leftrightarrow C_B$	**Hip. induc.**	11 $C_A \leftrightarrow C_B$	**Hip. induc.**
3 $C_A \rightarrow C_B$	**ECO$_1$** 2	12 $C_B \rightarrow C_A$	**ECO$_2$** 11
┌ 4 C_A		┌ 13 C_B	
│ 5 C_B	**MP** 3,4	│ 14 C_A	**MP** 12, 13
└ 6 $C_B \vee E$	**Ad$_1$** 5	└ 15 $C_A \vee E$	**Ad$_1$** 14
┌ 7 E		┌ 16 E	
└ 8 $C_B \vee E$	**Ad$_2$** 7	└ 17 $C_A \vee E$	**Ad$_2$** 16
9 $C_B \vee E$	**Cas** 1, 4-6, 7-8	18 $C_A \vee E$	**Cas** 10, 13-15, 16-17

Caso (4.1): $D \leftrightharpoons C_A \rightarrow E$. Hay que demostrar $(C_A \rightarrow E) \leftrightarrow (C_B \rightarrow E)$.

— 1 $C_A \rightarrow E$		— 5 $C_B \rightarrow E$	
2 $C_A \leftrightarrow C_B$	**Hip. induc.**	6 $C_A \leftrightarrow C_B$	**Hip. induc.**
3 $C_B \rightarrow C_A$	**ECO$_2$** 2	7 $C_A \rightarrow C_B$	**ECO$_1$** 6
4 $C_B \rightarrow E$	**Sil** 3, 1	8 $C_A \rightarrow E$	**Sil** 7,5

Caso (4.2): $D \leftrightharpoons E \rightarrow C_A$. Hay que demostrar $(E \rightarrow C_A) \leftrightarrow (E \rightarrow C_B)$.

— 1 $E \to C_A$		— 5 $E \to C_B$	
2 $C_A \leftrightarrow C_B$	**Hip. induc.**	6 $C_A \leftrightarrow C_B$	**Hip. induc.**
3 $C_A \to C_B$	**ECO$_1$** 2	7 $C_B \to C_A$	**ECO$_2$** 6
4 $E \to C_B$	**Sil** 1, 3	8 $E \to C_A$	**Sil** 5,7

§ 8. *Leyes de interdefinición*

Finalmente nos ocuparemos de una serie de leyes cuya utilidad en la resolución práctica de argumentos es muy grande, razón por la cual el lector deberá procurar reternerlas en la memoria. Estas leyes son: las definiciones del implicador en términos de negador y conjuntor (**DI$_1$**) y de negador y disyuntor (**DI$_2$**), definiciones de conjuntor y de disyuntor en términos de negador e implicador (**DfC$_1$**, **DfD$_1$**) y en términos de negador y disyuntor (**DfC$_2$**) o de negador y conjuntor (**DfD$_2$**), respectivamente; de las dos últimas definiciones se derivan las llamadas «leyes de DE MORGAN», que permiten la distribución del negador en el seno de una conjunción (**DM$_1$**) o de una disyunción (**DM$_2$**).

Entendidas como equivalencias lógicas, estas leyes son susceptibles de ser formuladas así:

1.	$(A \to B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$	**DI$_1$**
2.	$(A \to B) \leftrightarrow \neg A \vee B$	**DI$_2$**
3.	$A \wedge B \leftrightarrow \neg (A \to \neg B)$	**DfC$_1$**
4.	$A \wedge B \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$	**DfC$_2$**
5.	$A \vee B \leftrightarrow \neg A \to B$	**DfD$_1$**
6.	$A \vee B \leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$	**DfD$_2$**
7.	$\neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	**DM$_1$**
8.	$\neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	**DM$_2$**

La deducción de cada una de estas leyes sin más ayuda que las reglas básicas, es un proceso relativamente laborioso. Por tal método deduciremos solamente, a guisa de ejemplo, la regla **DI$_1$**. Las restantes se deducirán con ayuda de reglas derivadas. A partir de la fundamentación de **DfC$_1$** se hará uso además de la regla de intercambio. Finalmente, para la obtención de las cuatro últimas leyes de interdefinición emplearemos el procedimiento denominado por KLEENE «cadena de equivalencias», que abrevia de manera muy considerable el número de pasos deductivos.

Definiciones del implicador

***Mediante* ¬, ∧ (DI$_1$)**

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg (A \wedge \neg B)}$$

Fundamentación

1 $A \rightarrow B$	
2 $A \wedge \neg B$	
3 A	**Simp$_1$** 2
4 B	**MP** 1,3
5 $\neg B$	**Simp$_2$** 2
6 $B \wedge \neg B$	**Prod** 4,5
7 $\neg (A \wedge \neg B)$	**Abs** 2-6

8 $\neg (A \wedge \neg B)$	
9 A	
10 $\neg B$	
11 $A \wedge \neg B$	**Prod** 9,10
12 $(A \wedge \neg B) \wedge \neg (A \wedge \neg B)$	**Prod** 11,8
13 $\neg \neg B$	**Abs** 10-12
14 B	**DN** 13
15 $A \rightarrow B$	**TD** 9-14

***Mediante* ¬, ∨ (DI$_2$)**

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$$

Fundamentación

1 $A \rightarrow B$[9]	
2 $\neg (\neg A \vee B)$	
3 A	
4 B	**MP** 1,3
5 $\neg A \vee B$	**Ad$_2$** 4
6 $(\neg A \vee B) \wedge \neg (\neg A \vee B)$	**Prod** 5,2
7 $\neg A$	**Abs** 3-6
8 $\neg A \vee B$	**Ad$_1$** 7
9 $(\neg A \vee B) \wedge \neg (\neg A \vee B)$	**Prod** 8,2
10 $\neg \neg (\neg A \vee B)$	**Abs** 2-9
11 $\neg A \vee B$	**DN** 10

12 $\neg A \vee B$	
13 A	
14 $\neg \neg A$	**IDN** 13
15 B	**SD** 12,14
16 $A \rightarrow B$	**TD** 13-15

---

[9] Una versión de la primera parte de esta fundamentación podría transcurrir, utilizando el principio de tercero excluido, como sigue:

1 $A \rightarrow B$	
2 $A \vee \neg A$	**PTE**
3 A	
4 B	**MP**
5 $\neg A \vee B$	**Ad$_2$**
6 $\neg A$	
7 $\neg A \vee B$	**Ad$_1$**
8 $\neg A \vee B$	**Cas**

Definiciones del conjuntor

Mediante $\neg, \rightarrow$ **($\mathbf{DfC_1}$)**

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline\hline \neg (A \rightarrow \neg B) \end{array}$$

Fundamentación

— 1 $A \wedge B$		— 4 $\neg (A \rightarrow \neg B)$	
2 $\neg\neg (A \wedge \neg\neg\neg B)$	$\mathbf{I^2\ DN}$ 1	5 $\neg\neg (A \wedge \neg\neg\neg B)$	$\mathbf{I\ DI_2}$ 4
3 $\neg (A \rightarrow \neg B)$	$\mathbf{I\ I_1}$ 2	6 $A \wedge B$	$\mathbf{I^2\ DN}$ 5

Mediante $\neg, \vee$ **($\mathbf{DfC_2}$)**

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline\hline \neg (\neg A \vee \neg B) \end{array}$$

Fundamentación

— 1 $A \wedge B$		— 4 $\neg (\neg A \vee \neg B)$	
2 $\neg (A \rightarrow \neg B)$	$\mathbf{DfC_1}$ 1	5 $\neg (A \rightarrow \neg B)$	$\mathbf{I\ DI_2}$ 4
3 $\neg (\neg A \vee \neg B)$	$\mathbf{I\ DI_2}$ 2	6 $A \wedge B$	$\mathbf{DfC_1}$ 5

Definiciones del disyuntor

Mediante $\neg, \rightarrow$ **($\mathbf{DfD_1}$)**

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \hline\hline \neg A \rightarrow B \end{array}$$

Fundamentación

— 1 $A \vee B$		— 4 $\neg A \rightarrow B$	
2 $\neg\neg A \vee B$	$\mathbf{I\ DN}$ 1	5 $\neg\neg A \vee B$	$\mathbf{DI_2}$ 4
3 $\neg A \rightarrow B$	$\mathbf{DI_2}$ 2	6 $A \vee B$	$\mathbf{I\ DN}$ 5

Mediante $\neg, \wedge$ **($\mathbf{DfD_2}$)**

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \hline\hline \neg (\neg A \wedge \neg B) \end{array}$$

Fundamentación

— 1 $A \vee B$		— 4 $\neg (\neg A \wedge \neg B)$	
2 $\neg A \rightarrow B$	**DfD**$_1$ 1	5 $\neg A \rightarrow B$	**I DI**$_1$ 4
3 $\neg (\neg A \wedge \neg B)$	**I DI**$_1$ 2	6 $A \vee B$	**DfD**$_1$ 5

El método de «cadena de equivalencias» utilizado por KLEENE, simplifica mucho la notación de deducciones cuyo pasos se funden exclusivamente en leyes de equivalencia.

En matemática es usual la práctica de economizar innecesarias repeticiones en el establecimiento de cadenas de ecuaciones. Por ejemplo, en lugar de

$$a = b, \quad b = c, \quad c = d, \ldots$$

suele escribirse

$$a = b = c = d \ldots$$

Ahora bien, las equivalencias son fórmulas lógicas que guardan paralelo con las ecuaciones en el lenguaje matemático. Por analogía con la notación matemática, una cadena de equivalencias tal como

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \wedge (C \leftrightarrow D)$$

podría abreviarse así

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow D$$

Después de cada miembro del eslabón se puede anotar entre paréntesis cuadrados la justificación del paso deductivo que proceda. Así por ejemplo, las derivaciones de las dos leyes de definición del disyuntor **DfD**$_1$ y **DfD**$_2$ que se expusieron en la página anterior, se podrían anotar con el nuevo método del siguiente modo:

DfD$_1$

$$A \vee B \leftrightarrow \neg \neg A \vee B \text{ [I DN]} \leftrightarrow \neg A \rightarrow B \text{ [DI}_2\text{]}$$

DfD$_2$

$$A \vee B \leftrightarrow \neg A \rightarrow B \text{ [DfD}_1\text{]} \leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B) \text{ [I DI}_1\text{]}$$

Con arreglo a este nuevo método justificaremos, finalmente, las

Leyes de De Morgan

Distribución de $\neg$ *en conjunción* **(DM_1)**

$$\frac{\neg (A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$$

Fundamentación

$\neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg \neg (\neg A \vee \neg B)$ [**I DfC$_2$**] $\leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ [**DN**]

Distribución de $\neg$ *en disyunción* **(DM_2)**

$$\frac{\neg (A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$$

Fundamentación

$\neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg \neg (\neg A \wedge \neg B)$ [**I DfD$_2$**] $\leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ [**DN**]

Y he aquí, en cambio, una fundamentación de esta misma regla **DM$_2$** con la sola ayuda de las reglas básicas y la regla **ECQ**:

1	$\neg (A \vee B)$	
2	A	
3	$A \vee B$	**Ad**
4	$A \vee B \wedge \neg (A \vee B)$	**Prod**
5	$\neg A$	**Abs**
6	B	
7	$A \vee B$	**Ad**
8	$(A \vee B) \wedge \neg (A \vee B)$	**Prod**
9	$\neg B$	**Abs**
10	$\neg A \wedge \neg B$	**Prod**
11	$\neg A \wedge \neg B$	
12	$A \vee B$	
13	A	
14	$\neg A$	**Simpl**
15	$A \wedge \neg A$	**Prod**
16	$\neg (A \vee B)$	**ECQ**
17	B	
18	$\neg B$	**Simp**
19	$B \wedge \neg B$	**Prod**
20	$\neg (A \vee B)$	**ECQ**
21	$\neg (A \vee B)$	**Cas**
22	$(A \vee B) \wedge \neg (A \vee B)$	**Prod**
23	$\neg (A \vee B)$	**Abs**

LÓGICA DE PREDICADOS
(CÁLCULO CUANTIFICACIONAL)

CAPÍTULO VIII

CUANTIFICADORES Y MODELOS

A. NUEVA VISITA A LOS CUANTIFICADORES

§ 1. *El interés lógico de la cuantificación*

Hay argumentos que pueden ser formalizados y resueltos sin más herramienta que la lógica de enunciados. Pero hay muchos otros que, aun siendo elementales, no pueden ser solventados con la sola ayuda de esa parte de la lógica. He aquí un ejemplo:

Todo griego es europeo.
Todo ateniense es griego.
∴ Todo ateniense es europeo.

Es intuitivamente claro que este argumento es concluyente, porque la verdad de sus premisas es incompatible con la falsedad de su conclusión. Pero también es claro que las estructuras lógicas que lo justifican no son las habitualmente consideradas en teoría de conectores. Pues si se conviene en asignar una letra proposicional a cada uno de esos enunciados, la formalización resultante no será convincente:

$$p, q \vdash r.$$

Porque no hay ninguna ley de conectores que permita concluir r a partir de p y q. Pieza clave de las estructuras que justifican la validez del anterior argumento informal es la palabra *todo* que, al igual que la palabra *alguno*, rebasa el ámbito de la lógica de enunciados. En general, toda la silogística aristotélica, de la cual ese argumento es un ejemplo, escapa a dicho ámbito.

La parte de la lógica que se ocupa del análisis de argumentos que envuelven necesariamente el uso de las partículas «todo» o «alguno», es la lógica de *cuantores* o *cuantificadores*, así llamada por ser éste el nombre técnico que se asigna a los símbolos formales correspondientes a tales partículas. También se la llama lógica de *pre-*

dicados o de *términos* y también *cálculo funcional*, ya que los predicados o términos [1] y las funciones proposicionales son, por así decirlo, la materia propia a la que se aplican los cuantificadores.

La lógica de cuantificadores supone la lógica de conectores, y no puede ser estudiada si antes no se conoce a ésta. Del lenguaje propio de la lógica de cuantificadores se trató en el Capítulo II, §§ 4 y 6-11.

§ 2. *Reducibilidad de cuantificadores a conectores*

En un cierto sentido, los cuantificadores pueden ser considerados como abreviaturas de fórmulas cuyos únicos símbolos lógicos sean conectores.

Esto se advierte con toda claridad cuando el dominio o universo de discurso de que se trate en nuestro lenguaje sea finito. Supóngase, por ejemplo, el universo de discurso formado por los tres países europeos Francia, Alemania y Bélgica, que pueden ser, respectivamente simbolizados por a_1, a_2 y a_3. Considérense además dos notas que sean predicables de esos elementos, como «ser miembro del Mercado Común» y «haber sido una potencia del Eje en la Segunda Guerra Mundial», notas que pueden simbolizarse por P y Q.

Ahora bien, la proposición «todo miembro de ese conjunto pertenece al Mercado Común» equivale, obviamente, a esta otra: «Francia es miembro del Mercado Común y Alemania es miembro del Mercado Común, e igualmente Bélgica». Lo cual es tanto como decir, utilizando lenguaje simbólico, que la expresión: «$\bigwedge xPx$» equivale a la expresión: «$Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge Pa_3$».

Por otra parte es asimismo obvio que la proposición: «algún miembro de ese conjunto fue una potencia del Eje en la Segunda Guerra Mundial» equivale a esta otra: «o Francia fue una potencia del Eje o lo fue Alemania o lo fue Bélgica». Lo cual es tanto como decir, utilizando lenguaje simbólico, que la expresión: «$\bigvee xQx$», interpretada de acuerdo con nuestro ejemplo, equivale a la expresión: «$Qa_1 \vee Qa_2 \vee Qa_3$» (lo que guarda estrecho paralelo con la equivalencia del párrafo anterior).

---

[1] En la nomenclatura lógica se emplea a veces las palabras *término* y *predicado* como sinónimos denotativos de toda clase de nombres, sean comunes o propios. Este uso, de origen tradicional, puede encontrarse en autores modernos, como ŁUKASIEWICZ o QUINE. Otros autores restringen hoy el empleo de la palabra «término» para denotar solamente nombres propios.

De este análisis se desprende que el cuantificador universal resume o representa la aplicación reiterada del conjuntor (símbolo del producto lógico) a una serie de elementos (que podemos llamar factores lógicos); y que el particularizador resume o representa la aplicación reiterada del disyuntor (símbolo de la suma lógica) a una serie de elementos (que podemos llamar sumandos lógicos). Como alusión a ello nuestro lenguaje formal representa al generalizador mediante un conjuntor de gran tamaño (*macroconjuntor*), y al particularizador mediante un disyuntor de gran tamaño (*macrodisyuntor*) [2].

Estas consideraciones no valdrían, sin embargo, para el supuesto de que el universo de discurso fuese infinito. Considérese, a este respecto, una proposición que verse sobre el conjunto de los números enteros positivos, tal como la afirmación de que todos los miembros de este conjunto poseen la propiedad de ser mayor que cero. Es evidente que la expresión formal de ese enunciado: «$\bigwedge xPx$» no se dejaría traducir sin más a una fórmula de conectores, porque la conjunción «$Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge \ldots$» que tratase de atribuir la nota «P» a cada uno de los miembros del referido conjunto no terminaría nunca.

Puédese, pues, afirmar que cuando el universo de discurso es finito se borran las fronteras entre lógica de cuantificadores y lógica de conectores: aquélla es reducible a ésta. Pero cuando el universo de discurso es infinito, y tal sucede, sin ir más lejos, desde el momento en que consideramos los primeros teoremas de aritmética elemental, la lógica de predicados se torna radicalmente distinta de la de enunciados.

El lógico polaco ŁUKASIEWICZ ha sugerido que la diferencia entre una y otra parte de la lógica sería similar a la señalada por la matemática clásica entre aritmética y geometría. Las fórmulas de lógica de conectores son siempre, como los números en aritmética, objetos susceptibles de ser descompuestos en sus últimos elementos

---

[2] Un fenómeno de notación similar sucede en matemática para indicar la reiteración de operaciones de producto y adición:

el producto reiterado: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ se abrevia así: $\prod_{i=1}^{3} a_i$

la adición reiterada: $a_1 + a_2 + a_3$ se abrevia así: $\sum_{i=1}^{3} a_i$

De hecho algunos autores utilizan los símbolos Π, Σ como cuantificadores lógicos (generalizador y particularizador respectivamente).

en un número finito de pasos, mientras que las fórmulas cuantificacionales, vendrían a implicar, cuando el rango de sus variables fuese infinito, un análisis que no se terminaría nunca, como sucede con la descomposición de una línea en puntos.

De este modo resulta la paradójica consecuencia de que la estructura de la lógica, que debiera ser independiente de cualquier universo, depende cabalmente de la estructura misma del universo al que se aplique, al menos del hecho de que éste sea finito o infinito.

* B. SEMÁNTICA CUANTIFICACIONAL

§ 3. *Categorías semánticas. Significado y referencia*

El concepto de «deducción», que es el concepto central de la lógica, está íntimamente conectado con el de «corrección formal», ya que de ésta depende el interés real de una inferencia. Pero también lo está con la idea de «verdad», y de ahí que digamos que una deducción es correcta cuando la verdad de sus premisas excluye la falsedad de su conclusión.

La lógica especula sobre los esquemas formales de los argumentos *separándolos de sus contenidos, pero siempre con vistas a una* ulterior aplicación de los mismos a esos contenidos (porque no hay ninguna ciencia, ni siquiera la lógica, que esté libre de la obligación de suministrar información que valga para el mundo, real o posible). El problema de la adecuación de las fórmulas y esquemas lógicos a sus contenidos es el problema de la *verdad* de esas fórmulas.

La distinción entre forma y contenido en lógica tiene un origen muy antiguo. La investigación moderna suele hablar, a este respecto, de sintaxis y semántica [3]. La *sintaxis* estudia, en un lenguaje o en un sistema formal, las relaciones de unos signos y unas fórmulas con otros signos y otras fórmulas. La *semántica* estudia, en cambio, la relación de los signos y fórmulas con sus contenidos y objetos extralingüísticos. A esta relación se la llama *denotación.* La función de la semántica es una función denotativa.

[3] Estos dos términos, en las acepciones en que suelen ser hoy tomados en lógica y en lingüística, proceden de MORRIS, que divide la *semiótica,* (ciencia de los signos) en tres partes: *sintaxis* (teoría de las relaciones entre los signos), *semántica* (teoría de las relaciones del signo con su contenido) y *pragmática* (teoría de las relaciones del signo con el sujeto que lo usa).

En la construcción de nuestro sistema deductivo hemos dedicado hasta el presente preferentemente atención a la sintaxis del mismo: exposición del lenguaje formal (tablas de símbolos y reglas de formación de fórmulas) y cálculo fundado en la relación formal de deducibilidad (teoría de la deducción formal). La mayor parte de las categorías hasta ahora empleadas: forma lógica, fórmula, deductor, etc., han sido, pues, categorías sintácticas.

En este capítulo iniciaremos el estudio de algunas de las principales categorías semánticas, como las de verdad, interpretación, modelo, consecuencia, tal y como son definidas por la moderna lógica [4].

CARNAP [5] propuso la división de la semántica en *teoría de la extensión* y *teoría de la intensión*. La primera estudiaría la relación de las palabras y frases a las cosas (denotación, extensión); la segunda se ocuparía del significado o sentido de la palabras y de las frases (connotación, comprensión) [6].

La diferencia entre extensión e intensión se aprecia fácilmente analizando el uso de los *predicados* (nombres comunes). Así por ejemplo, la extensión del predicado «azul» está determina por la clase de los objetos que son azules. Pero también cabe decir que el color azul tiene una serie de características propias, como la de ocupar un determinado lugar en el espectro cromático: tales características constituirán la intensión (significado) del predicado «azul».

Al considerar a los predicados desde el punto de vista «extensional» se dice que aluden, o mejor, que denotan *clases* o *conjuntos* [7]. Pero cuando se los contempla desde el ángulo «intensional» se dice que designan *propiedades* o *notas* de los objetos.

---

[4] La investigación sistemática de las cuestiones semánticas por parte de la lógica moderna (lo que suele llamarse «semántica pura») ha sido posterior al estudio de los problemas de sintaxis. Puede decirse que comienza a imponerse hacia los años treinta, aunque tenga antecedentes en el siglo pasado, con las obras de BOLZANO y FREGE. Los principales promotores de los actuales estudios de semántica desde el punto de vista lógico han sido TARSKI y CARNAP.

[5] En *Meaning and necessity*, Chicago, 1947, pp. 233 ss.

[6] La lógica tradicional habla, respectivamente, de *extensión* (aptitud de un predicado para ser atribuido a los miembros de un grupo de individuos) y de *comprensión* (conjunto de notas que definen a un predicado). La doctrina de las relaciones entre la extensión y la comprensión se encuentra clásicamente expuesta en la *Logique de Port Royal* (1662): cuanto mayor es la extensión de un predicado menor es su comprensión y viceversa (p. ej., «animal» es más extenso que «hombre» y a la vez más reducido en comprensión). La pareja de términos de análogo sentido *denotación* y *connotación* procede de John Stuart MILL (1806-1873).

[7] Cuando un predicado es poliádico, la clase o conjunto que denote recibe el nombre más específico de *relación*.

La mencionada diferencia de punto de vista en lógica repercute en el criterio que se utilice para distinguir unos predicados de otros. Desde el punto de vista extensional, dos predicados son idénticos cuando se atribuyen a una misma clase de individuos. Por ejemplo, los predicados «animal racional» y «bípedo implume» son extensionalmente idénticos, puesto que ambos denotan la misma clase, que es la de los seres humanos. Pero para que dos predicados se consideren idénticos desde el punto de vista intensional se requiere además que contengan las mismas notas. La determinación de criterios de sinonimia (identidad de significado) y de definibilidad por especificación de notas (como cuando se define el agua diciendo que es un compuesto de dos partes de hidrógeno y una de oxígeno) son cuestiones en que interviene la lógica intensional.

En un breve ensayo, hoy famoso, FREGE [8] extendió de un modo muy original la mencionada dualidad semántica de intensión y extensión —en terminología de FREGE: «sentido» y «referencia»— para el caso de los nombres propios y los enunciados.

La necesidad de introducir esta distinción en el uso de los *nombres propios* quedaría patentizada por enunciados tales como

La estrella de la mañana es la misma que la estrella de la tarde.

Este enunciado sólo puede ser entendido si se acepta que las expresiones «estrella de la mañana» y «estrella de la tarde», que son nombres propios, tienen un *sentido* distinto, mientras que su *referencia* es la misma (porque la información empírica enseña que ambas denotan una sola y misma cosa: el planeta Venus).

La mencionada dualidad semántica de sentido y referencia fue asimismo extrapolada por FREGE al caso de los *enunciados*. En un enunciado cabe distinguir dos tipos de contenido: por una parte, el hecho que enuncia y, por otra, su valor de verdad. Así, por ejemplo, en el enunciado «llueve» una cosa es su alusión a la lluvia y otra el valor de verdad que le corresponda (verdad, si es cierto que llueve, y falsedad si no es cierto que llueve). Ahora bien, para FREGE el *sen-*

---

[8] *Über Sinn und Bedeutung* (Sobre sentido y referencia), 1892. En cuanto a la traducción de este título conviene advertir que la palabra alemana «Bedeutung» se traduce normalmente por «significado», pero en el contexto de la teoría de Frege hay que traducirla por «referencia» o «denotación». El término «sentido», en cambio puede ser asimilado aquí a «significado». Una versión castellana de este artículo, a cargo de Ulises MOULINES, puede encontrarse en la colección de ensayos de filosofía del lenguaje recopilada por Luis Ml. Valdés, *La busqueda del sentido*, Tecnos, Madrid, 1991, pp. 24-45.

tido (significado) del enunciado sería lo que por él se capta aun sin saber si es verdadero o falso, y la *referencia* (denotación) del mismo estaría constituida por su valor de verdad.

De acuerdo con esta teoría se da la circunstancia de que todos los enunciados verdaderos tienen una misma referencia, a saber: la verdad, aunque el sentido de cada uno de ellos sea diverso. Y análogamente sucede con los enunciados falsos, pues por mucho que difiera el sentido de cada uno, su referencia es siempre la falsedad.

Sobre la viabilidad de una lógica o de una semántica establecida con criterio intensional difieren las opiniones. Algunos autores, como CARNAP defienden esa viabilidad. Otros, como QUINE estiman que la lógica intensional y la teoría del significado no llevan a ninguna parte. Las categorías semánticas que se exponen en el resto del capítulo son extensionales, vale decir, pertenecientes a la semántica entendida como teoría de la referencia.

§ 4. *La revisión semántica del concepto de verdad*

El concepto de verdad ha sido largamente discutido en la historia de la filosofía y de la lógica. Los pensadores de tendencia idealista suelen definir la verdad como «coherencia» o consistencia de un sistema de conocimientos, mientras que los pensadores de tendencia realista, desde ARISTÓTELES al último RUSSELL, prefiere definirla como «correspondencia» del conocimiento con los hechos.

En su artículo «El concepto de verdad en los lenguajes formalizados», escrito al principio de la década de los treinta [9], el lógico polaco Alfred TARSKI (n. 1902) inició el replanteamiento de este problema en términos de rigor matemático y obtuvo como resul-

[9] Este artículo, cuyo propósito es, en palabras de su autor, «construir —con referencia a un lenguaje dado— *una definición materialmente adecuada y formalmente correcta del término 'enunciado verdadero'*»... «problema que pertenece a las cuestiones clásicas de filosofía», fue presentado en 1931 a la Sociedad Científica de Varsovia y publicado en polaco dos años después. Una traducción alemana ampliada, «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen» [«El concepto de verdad en los lenguajes normalizados»] apareció ulteriormente en la revista *Studia Philosophica*, vol. I (1936), pp. 261-405. Una versión inglesa de esta ampliación alemana figura con el título «The concept of truth in formalized languages» como VIII ensayo (pp. 152-278) en el libro de Alfred TARSKI *Logic, semantics, metamathematics*, Papers from 1923 to 1938, Clarendon Press, Oxford, 1956, que es una colección de artículos de Tarski traducidos al inglés por J. H. WOODGER. De esta versión, que abreviaré CTFL, tomo las citas que siguen. La que aparece al principio de esta nota corresponde a la página 152.

tado una teoría extensional de la verdad que, aparte de revalidar, curiosamente, la vieja doctrina aristotélica de la correspondencia, ha dado lugar muy principalmente al desarrollo de la moderna semántica.

El punto de vista de TARSKI es que: 1) la noción de «verdad de un enunciado» no es absoluta, sino relativa a un lenguaje L, en el marco del cual se mueve el enunciado de cuya verdad se trate; 2) el predicado «verdadero», como cualquier otra categoría de la semántica, no pertenece al lenguaje objeto, o lenguaje acerca del cual se habla, sino al metalenguaje, o lenguaje en el cual se habla acerca de otro lenguaje [10], y 3) comoquiera que el lenguaje ordinario carece de instrumental adecuado para distinguir con precisión entre lenguaje y metalenguaje, no está exento del riesgo de desembocar en contradic-

---

[10] De acuerdo con este punto de vista, puede servir como base de análisis la siguiente definición:

un enunciado verdadero es el que dice que los hechos son así, y así son los hechos,

que está sancionado por el uso ordinario del lenguaje y la tradición filosófica (TARSKI, CTFL, p. 155, nota 2, cita a propósito de ello la definición de «verdadero» formulada por ARISTÓTELES en su *Metafísica*, Γ 7, 27: «decir de lo que es que no es y de lo que no es que es, es falso; mientras que decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero»). Pero semejante definición deberá, por lo pronto, ser reformulada de modo que resulten claramente diferenciables los objetos lingüísticos de sus denominaciones metalingüísticas. En este sentido es útil denominar metalingüísticamente un enunciado poniéndolo entre comillas (sobre la diferencia entre lenguaje objeto y metalenguaje y sobre el uso de comillas véase el Capítulo II, § 8, de este libro). Por ejemplo, siendo «nieva» la denominación metalingüística de nieva y representando por sí y sólo si la conexión entre los extremos de la anterior definición, diríamos que

«nieva» es verdadero si y sólo si nieva,

donde queda claro que el adjetivo metalingüístico «verdadero» no se atribuye a un enunciado, sino a la denominación metalingüística del mismo y que son los hechos y sólo ellos los que dan derecho a semejante atribución. En términos más generales, si nos tomamos la libertad de utilizar el cuantificador universal para letras enunciativas y convenimos en abreviar «si y sólo si» por «sii», representando por V al conjunto de los enunciados verdaderos y siendo ε la relación de pertenencia:

$$\bigwedge p\text{: «}p\text{» } \varepsilon \text{ V sii } p$$

Ésta es la clave de la famosa *convención T*, postulada por Tarski como criterio de definición de verdad: una definición de enunciado verdadero no sólo debe ser formalmente correcta, sino materialmente adecuada, entendiendo por tal que incluya entre sus consecuencias todas aquellas expresiones que sean instancias de la que se acaba de formular. (CTFL, pp. 187-188.)

ciones [11], razón por la cual la construcción de una definición rigurosa del concepto de «enunciado verdadero» resulta posible tan sólo en los lenguajes formalizados [12].

Esta definición es llevada a cabo por TARSKI en el citado artículo con ayuda del concepto semántico auxiliar de «satisfacción», cuya definición se construye previamente recurriendo al empleo de técnicas recursivas. A continuación nos ocuparemos de forma más sistemática de este problema. Conviene añadir al respecto, sin embargo, que hoy día, merced asimismo a la influencia de trabajos posteriores de TARSKI la noción semántica de verdad es tratada en conexión más estrecha con la noción de «modelo», y en este sentido la desarrollaremos en las páginas que siguen.

§ 5. *El dominio de la cuantificación*

Un lenguaje formal, o un conjunto de fórmulas lógicas, son, en principio, construcciones vacías de contenido mientras no estén referidas a un mundo, real o posible. La semántica pura pretende fijar esa referencia de modo inequívoco y preciso desde el punto de vista de la lógica extensional.

Universo y estructura. A este fin, dada una fórmula o un con-

---

[11] Tal sucede, por ejemplo, con la paradoja del mentiroso. TARSKI (CTFL, p. 158) cita una formulación muy simple de ella debida a ŁUKASIEWICZ, que podemos reproducir así. Sea «c» abreviatura de «el enunciado impreso en la línea 5 de esta nota». Y considérese ahora el enunciado:

c no es un enunciado verdadero.

Si se identifica el nombre del objeto referido por la anterior descripción con su abreviatura, resultará:

1) «c no es un enunciado verdadero» es idéntico a c.

Y aplicando al presente caso la fórmula de definición de enunciado verdadero expuesta en la nota anterior:

2) *«c no es un enunciado verdadero» es un enunciado verdadero si* y sólo si c no es un enunciado verdadero.

Pero reemplazando en 2) «c no es un enunciado verdadero» por su idéntico según 1) resulta esta contradicción:

c es un enunciado verdadero si y sólo si c no es un enunciado verdadero.

La raíz de la contradicción, contra la cual no hay, en principio, defensa en el lenguaje natural, está en que el enunciado intercomillado en 2) incluye ya en sí mismo el término «enunciado verdadero».

[12] Dichos lenguajes «pueden ser escuetamente caracterizados como lenguajes artificiales en los que el sentido de toda expresión está inequívocamente determinado por su forma» (CTFL, pp. 165-166).

junto de fórmulas de un lenguaje formal, que podemos llamar *teoría*, se elige arbitrariamente como zona de referencia de la misma un conjunto o colección de objetos cualquiera, como, por ejemplo, el conjunto de los números o el conjunto de los seres humanos.

Acto seguido se selecciona, también arbitrariamente, dentro del conjunto elegido determinadas propiedades o relaciones que se den entre objetos pertenecientes a dicho conjunto. Obviamente, cada una de esas propiedades o relaciones determinará, por su parte, un subconjunto dentro de ese conjunto. Por ejemplo, si se ha elegido como zona de referencia el conjunto de los números naturales y se ha seleccionado en él la propiedad «ser par», dicha propiedad determinará el conjunto de los números pares, que es un subconjunto dentro del conjunto de los naturales. Y si se ha elegido como zona de referencia al conjunto de los seres humanos y se ha seleccionado en él la relación «ser casado», esta relación determinará a su vez al conjunto de las personas casadas, que es un subconjunto del conjunto de los seres humanos.

Designemos por **U** el conjunto elegido, al que llamaremos *dominio, universo de discurso* [13] o *universo* sin más. Entenderemos que ese dominio es una situación, un trozo de *mundo*, real o posible, y de él haremos nuestra «ontología», sin imponerle otras condiciones que las siguientes, a saber: (1) que el conjunto en cuestión no esté vacío de individuos, y (2) que los individuos que lo integren sean de alguna manera «distinguibles» entre sí.

Designemos por $\mathbf{R}^*_1, \ldots, \mathbf{R}^*_n$ a las propiedades y relaciones [14] elegidas. Al conjunto ordenado o secuencia **E** formada por el universo **U** y las relaciones $\mathbf{R}^*_1, \ldots, \mathbf{R}^*_n$ lo denominamos *estructura* o (*posible*) *realización* o *modelo* de la teoría de que se trate y lo representamos así

---

[13] El concepto de *universo de discurso* fue acuñado por DE MORGAN, que entendía por tal las clases o conjuntos cuya consideración hay que dar por supuesta para percatarse del sentido de una proposición. Por ejemplo, el universo de discurso que subyace a la base del enunciado «Lutero es protestante» es la clase de los hombres, especialmente dividida en dos subclases: católicos y no católicos.

[14] Los conceptos de propiedad y relación son interdefinibles. Desde un punto de vista intuitivo es mejor definir la segunda con ayuda de la primera y decir que la relación es una «propiedad» que requiere la intervención de más de un individuo. Pero desde otro punto de vista, por ejemplo, desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, es preferible proceder a la inversa y decir que la propiedad es una «relación» que es monádica. En general, la semántica extensional, especialmente la teoría de modelos, utiliza terminología conjuntista.

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{U}, \mathbf{R}^*_1, \ldots, \mathbf{R}^*_n\}$$ [15]

Interpretación. Ahora se trata de poner en relación el lenguaje con el universo, la teoría con la estructura. Ello se efectúa fijando para cada uno de los elementos de la teoría cuyo sentido no esté determinado, un correlato adecuado en la estructura. A la relación que pone en correspondencia el lenguaje formal con la ontología se la denomina *interpretación*. Al principio de este apartado se dijo que la denotación es la función por la que se pone en correspondencia el lenguaje con sus contenidos. La interpretación es, obviamente, la función denotativa de los lenguajes formales, es decir, una función **I** por la cual se aplican los elementos de una teoría o un lenguaje formal **L** a los elementos de una estructura **E**:

$$\mathbf{I}(\mathbf{L}) = \mathbf{E}$$

Para entender mejor el sentido de la interpretación conviene hacer primero las siguientes consideraciones. En todo conjunto de fórmulas de lógica de predicados, los símbolos que intervienen se pueden reducir a dos clases: lógicos y no lógicos. Los símbolos lógicos son los conectores y cuantificadores. Los símbolos no lógicos son las letras predicativas y las letras de individuo [16]. Es claro que los símbolos lógicos tienen un significado preciso antes de toda interpretación, por necesidades «sintácticas». Pero no sucede así con los símbolos no lógicos, que justamente cobran una denotación fija, merced a la interpretación, en consecuencia de lo cual las fórmulas del lenguaje podrán ser afirmadas o negadas con verdad o falsedad.

---

[15] Obsérvese que este conjunto es ordenado y forma una secuencia o sistema de riguroso orden.

Por otra parte conviene añadir que la estructura puede revestir y de hecho ordinariamente reviste un carácter algo más complejo. También cabe señalar en el universo, además de las relaciones, operaciones a efectuar entre los individuos (como sería, por ejemplo, la operación «producto» en el conjunto de los números naturales o la operación «pago» en el conjunto de los seres humanos); asimismo existe la posibilidad de señalar objetos individuales determinados (por ejemplo, el número cero en el conjunto de los naturales o Adán en el conjunto de los humanos). Representado por $\mathbf{f}^*_1$, ..., $\mathbf{f}^*_n$ las operaciones señaladas en el universo elegido y por $\mathbf{a}^*_1$, ..., $\mathbf{a}^*_n$ los individuos señalados, la estructura sería

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{U}, \mathbf{R}^*_1, \ldots, \mathbf{R}^*_n, \mathbf{f}^*_1, \ldots, \mathbf{f}^*_n, \mathbf{a}^*_1, \ldots, \mathbf{a}^*_n\}$$

[16] Entiéndase un lenguaje de predicados puro y simple en el que cabe prescindir de letras enunciativas (predicaciones 0-ádicas) y letras funtoriales.

Así pues, si la interpretación consiste básicamente en adjudicar un correlato «ontológico» o, digamos mejor, estructural, a cada uno de los elementos lingüísticos no determinados previamente (símbolos no lógicos) de una fórmula A o un conjunto de fórmulas Γ, ello se efectuará de la siguiente manera:

1) a cada letra predicativa *n-ádica* ($n \geq 1$) se le asignará como correlato estructural una relación asimismo n-ádica que se dé o pueda darse entre los miembros del universo elegido; dicho abreviadamente: si R es una letra predicativa *n*-ádica de la fórmula o conjunto de fórmulas a interpretar, se le asignará como valor la relación *n*-ádica **R*** de ese universo, con lo que diremos que

$$\mathbf{I}(R) = \mathbf{R}^*$$

2) a cada constante individual [17] del conjunto de fórmulas dado se le asignará como correlato estructural un individuo señalado del universo **U**; para decirlo abreviadamente: si a_i es una constante individual del conjunto Γ y el correlato estructural asignado es el objeto $\mathbf{a}^*_i$ de **U**, diremos que

$$\mathbf{I}(a_i) = \mathbf{a}^*_i.$$

Los símbolos lógicos, es decir, conectores y cuantificadores, mantienen, como queda dicho, su significación usual. Cuando se trate de variables individuales en el seno de una fórmula, la denotación de las mismas queda también fija después de la interpretación, ya que los cuantificadores que las liguen las referirán explícitamente a todo o parte del universo de discurso.

[17] En el presente capítulo conviene distinguir explícitamente entre el uso de las letras $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ como constantes individuales y como parámetros. En este segundo caso el correlato estructural de una letra a_i o de una serie de letras de esta clase será un objeto *cualquiera* o una *secuencia* o serie ordenada *cualquiera* de objetos del universo: $\langle \mathbf{a}^*_i \ldots \mathbf{a}^*_n \rangle$. Llamaremos *secuencia objetiva* a una serie de objetos de esta índole. (Aunque también se puede entender por secuencia objetiva cualquier serie ordenada de entidades de la estructura, incluidas las relaciones y operaciones.)

En el caso de que interesase incluir en el lenguaje letras enunciativas y funtoriales, las primeras se interpretarán asignándoles un valor de verdad determinado (véase Capítulo IV). La interpretación de términos en que intervengan letras funtoriales exigiría como correlato de interpretación la correspondiente aplicación de operaciones reales en el universo.

Ejemplo. Sea la fórmula

$$A \leftrightharpoons \wedge x \vee y Ryx,$$

que someteremos a doble interpretación, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ para dos universos $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$.

Primera interpretación. Sea **N** el conjunto de los números naturales, y destaquemos en él la relación diádica «ser mayor que»: >. Obviamente,

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{N}$$
$$\mathbf{I}_1(R) = >$$

A la luz de la interpretación $\mathbf{I}_1$ la fórmula A *significará*:

para todo número, cualquiera que sea, existe otro mayor.

Segunda interpretación. Sea **H** el conjunto de los seres humanos y destaquemos en él la relación diádica «ser padre de». En tal caso

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{H}$$
$$\mathbf{I}_2(R) = \text{ser padre de}$$

y la interpretación de A es:

todo hombre tiene un padre.

§ 6. *Referencia cuantificacional*

a. Satisfacción

Dada una fórmula A (o un conjunto de fórmulas Γ) y un universo **U**, se dice que una interpretación **I** *satisface* [18] a esa fórmula (o con-

[18] El concepto de «satisfacción» fue, según se indicó anteriormente, elaborado por TARSKI como instrumento semántico auxiliar para definir el concepto de verdad.

El uso del término «satisfacción» en el sentido propuesto por TARSKI tiene su origen en el lenguaje matemático. Así por ejemplo, si en la ecuación

$$x + 1 = 4$$

se asigna a la variable x el valor 3, se dice que esta asignación de valor a x satisface

junto de fórmulas) si como resultado de la interpretación dicha fórmula (o cada una de las fórmulas que formen parte del conjunto Γ) se convierte o puede convertirse en un enunciado verdadero.

La relación de satisfacción es, claramente, una relación semántica, que abreviamos, según el caso

I Sat A

o

I Sat Γ

lo que debe leerse: «la interpretación **I** satisface a la fórmula A», o correlativamente «la interpretación **I** satisface al conjunto de fórmulas Γ».

Una definición precisa del concepto de satisfacción se lleva a cabo a lo largo de las siete cláusulas siguientes.

Definición recursiva [19] *de satisfacción.* Para toda fórmula A y siendo **I** una interpretación de ella (y abreviando como «sii» la expresión «si y solamente si»):

---

esa ecuación. Este uso puede hacerse análogamente extensivo a la lógica y a la teoría del lenguaje en general. Supóngase dada, por ejemplo, una función enunciativa como

x es blanco.

Si se asigna en dicha función a x el valor «nieve», resultará la expresión

la nieve es blanca,

y como en el caso anterior, análogamente puede decirse en éste que tal asignación de valor satisface la función, la cual se torna, por virtud de ello, en un enunciado verdadero.

Sin embargo el principal mérito de la aportación de TARSKI no consiste solamente en haber extendido al campo de la lógica el uso del término «satisfacción», sino en haber dado a dicho término en este campo una definición absolutamente rigurosa que lo convierte en una categoría semántica de primordial interés, útil para la construcción de otras tales como las de verdad o definibilidad, y, en general, para la teoría de los sistemas deductivos.

[19] Una definición recursiva de un concepto es una definición que procede por estratos, de la definición de casos simples a la de casos complejos, basados en los anteriores. El lenguaje formal (sintaxis) ofrece una estructura recursiva (fórmulas atómicas, último elemento de análisis, y fórmulas moleculares, compuestas a partir de las atómicas, con un grado de complejidad que puede progresar indefinidamente, pero siempre según determinados módulos fijos), que precisamente permite que se lo defina con un número finito de palabras pese a que sus posibilidades sean infinitas. El acierto de TARSKI estuvo en saber apoyarse en esta estructura recursiva del lenguaje para la construcción de sus definiciones semánticas. Toda fórmula es una predicación (verdadera o falsa) o una función lógica de predicaciones, de cuya verdad o falsedad depende.

(Caso primero: la fórmula es atómica.)

1. Si A es una predicación, es decir A ⥲ $Ra_1 \ldots a_n$ ($n \geq 1$), entonces **I Sat** $Ra_1 \ldots a_n$ sii la relación objetiva n-ádica **R*** conviene a la secuencia objetiva $\langle \mathbf{a}^*_1, \ldots, \mathbf{a}^*_n \rangle$ [20].

(Caso segundo: la fórmula es molecular y su signo lógico principal es un conector.)

2. Si es una negación, es decir A ⥲ ¬ B, entonces **I Sat** ¬ B sii no es cierto que **I Sat** B.
3. Si es una conjunción, esto es A ⥲ B ∧ C, entonces **I Sat** B ∧ C sii **I Sat** B e **I Sat** C.
4. Si es una disyunción, es decir A ⥲ B ∨ C, entonces **I Sat** B ∨ C sii **I Sat** A o **I Sat** B.
5. Si A es una implicación, es decir A ⥲ B → C, entonces **I Sat** B → C sii **I Sat** ¬ B o **I Sat** C.

(Caso tercero: la fórmula es molecular y su signo lógico principal es un cuantificador.)

6. Si A es una generalización [21], es decir, A ⥲ ⋀xRx, entonces **I Sat** ⋀xRx si $\mathbf{I}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{a}*}$ **Sat** Ra para cualquier objeto **a*** del universo elegido (siendo «a» un nombre que no ocurre en R y siendo $\mathbf{I}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{a}*}$ **Sat** Ra una interpretación que sólo difiere de **I** en asignar a «a» la denotación **a***).
7. Si A es una particularización [21], es decir A ⥲ ⋁xRx, entonces **I Sat** ⋁xRx si $\mathbf{I}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{a}*}$ **Sat** Ra para cuando menos un objeto **a*** del universo elegido (con iguales restricciones que 6).

b. *Verdad y modelo*

Modelo. Cuando una interpretación **I** satisface a un conjunto de fórmulas Γ (que puede constar de una sola fórmula A) para toda secuencia objetiva, suele decirse que esa interpretación es un *modelo* **M** de Γ (o de A) [22]. Ello se puede indicar escribiendo

---

[20] En esta cláusula se entiende que los símbolos individuales $a_1, \ldots, a_n$ son *constantes*. Entendidos como parámetros, habrá que especificar entonces que la secuencia objetiva correspondiente puede ser cualquiera.

[21] La formulación de esta cláusula, inusual en los manuales, es de BOOLOS y JEFFREY.

[22] Modelo se llama también (véase más arriba, p. 168) al dominio de los valores

$$\mathbf{I}\ \mathbf{Mod}\ \Gamma\ (\text{o}\ \mathbf{I}\ \mathbf{Mod}\ \mathrm{A})$$

lo que se lee: «**I** es modelo de Γ (o de A)».

Verdad. Ahora se puede definir la noción de *verdad* o *validez* relativamente a una interpretación y un universo. Un conjunto de fórmulas Γ (que puede constar de una sola fórmula A) es *verdadero* (*válido*) bajo una interpretación **I** y para un universo **U**, si y sólo si esa interpretación lo satisface para toda secuencia objetiva, es decir, si esa interpretación es modelo suyo:

$$\Gamma \in \mathbf{V} \ \text{ sii } \ \mathbf{I}\ \mathbf{Mod}\ \Gamma$$

---

de la función interpretativa, es decir, a la realización o estructura, en la medida en que es una secuencia de entidades objetivas que satisface las exigencias de una teoría. He aquí un par de definiciones en este sentido tomadas de TARSKI: «Uno de los conceptos que pueden ser definidos en términos del concepto de satisfacción es el concepto de *modelo*. Supóngase que en el lenguaje que estamos considerando ciertas variables corresponden a toda constante extra-lógica, y de modo tal que todo enunciado se torne en una función enunciativa si se reemplazan en él las constantes por las correspondientes variables. Sea *L* cualquier clase de enunciados. Reemplazamos todas las constantes extralógicas que ocurren en los enunciados pertenecientes a *L* por las correspondientes variables, de forma que las mismas constantes sean reemplazadas por las mismas variables, y las diferentes por diferentes. De este modo obtenemos una clase *L*' de funciones enunciativas. Una secuencia arbitraria de objetos que satisface toda función enunciativa de la clase *L*' recibirá el nombre de un *modelo* o *realización* (justo en el sentido en que usualmente se habla de modelos de un sistema de axiomas de una teoría deductiva). Si, en particular, la clase *L* consta de un solo enunciado *X*, llamaremos asimismo al modelo de la clase *L*, *el modelo del enunciado X*». («On the concept of logical consequence», ensayo número XVI de la colección anteriormente citada *Logic, semantics, metamathematics*, pp. 416-417. Este artículo apareció originalmente publicado en polaco en 1936 y en alemán ese mismo año con el título «Über den Begriff der logischen Folgerung» [«Sobre el concepto de la consecuencia lógica»], en *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, vol. VIII (Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 394), Hermann, París, 1936, pp. 1-11.)

«Una posible realización en la que todos los enunciados válidos de una teoría T son satisfechos es llamada un modelo de T» (*Undecidable Theories*, libro escrito en colaboración con A. MOSTOWSKI y R. M. ROBINSON, North-Holland, Amsterdam, 1953, reimpreso en 1968, p. 11).

Es de subrayar la radical diferencia que existe entre este uso del término «modelo» en las ciencias formales y el habitual en las ciencias empíricas. Modelo es en semántica una entidad o conjunto de entidades que, en principio, no es lingüística: una estructura relacional a la que, por virtud de la interpretación, se refiere una teoría. En las ciencias empíricas suele entenderse por modelo justamente lo contrario, por ejemplo, un conjunto de ecuaciones diferenciales (es decir, una teoría o entidad lingüística) que «simula» o refleja una realidad.

Obsérvese que el hecho de que una interpretación satisfaga una fórmula o un conjunto de fórmulas no es razón suficiente para que se diga que es modelo de ella. Para que una interpretación sea modelo de una fórmula, es preciso que la satisfaga para toda secuencia objetiva, es decir: que no admita un solo ejemplo en contra.

Sea, verbigracia, la fórmula A ⇋ Pab y sean **U** el universo de los números naturales e **I**(P) = >. Según esta interpretación, resulta posible satisfacer la fórmula A para determinadas secuencias, como serían entre otras las secuencias ⟨2,1⟩, ⟨3,2⟩, pero no, sin embargo, para las secuencias ⟨1,2⟩ o ⟨2,3⟩. En cambio, para el mismo universo y la misma interpretación, suponiendo además señalada la relación de igualdad, la fórmula B ⇋ Pab ∨ Pba ∨ a = b es verdadera (válida), puesto que para cualquier par de números y cualquiera que sea el orden en que se nos den es matemáticamente verdadero que o uno es mayor que el otro, o a la inversa, o ambos son iguales (ley de tricotomía): no hay ejemplo en contra.

c. *Satisfacibilidad y verdad lógica*

Como casos límites del concepto extensional de verdad, se pueden considerar las nociones de satisfacibilidad y verdad lógica.

Satisfacibilidad. Una fórmula A es llamada *satisfacible* si hay al menos en algún universo una interpretación que la satisfaga. Análogamente se dice de un conjunto Γ de fórmulas que es (*simultáneamente*) *satisfacible* si hay al menos en algún universo una interpretación que satisfaga a un mismo tiempo todas las fórmulas que sean miembros de Γ. Y correlativamente, una fórmula A o un conjunto de fórmulas Γ que no sea satisfacible bajo ninguna interpretación en ningún universo, recibe la denominación de *insatisfacible*.

Por ejemplo, la fórmula ⋀x(Px → Qx) es satisfacible (basta imaginar que P denote al conjunto de los españoles y Q al de los europeos); en cambio el conjunto de fórmulas: Γ ⇋ ⋀x(Px → Qx), ¬ ⋁x(Px ∧ Qx) es insatisfacible (el lector observará que la segunda de ellas contradice la primera).

Verdad lógica. La satisfacibilidad llevada a su máximo extremo es la *validez universal* o *verdad lógica*. Se dice que una fórmula es *lógicamente verdadera* o *universalmente válida* (y también

válida sin más) si esa fórmula es verdadera bajo toda interpretación y en todo universo (no vacío) [23].

Por ejemplo, la fórmula

$$\bigvee x \bigwedge y Pxy \rightarrow \bigwedge y \bigvee x Pxy$$

es una verdad lógica, porque no admite ninguna interpretación que la falsee. En cambio su conversa

$$\bigwedge y \bigvee x Pxy \rightarrow \bigvee x \bigwedge y Pxy$$

es solamente satisfacible, porque si bien admite interpretaciones que la hacen verdadera, admite también otras que la falsean (bastaría, para esto último, elegir como universo el dominio de los números naturales y denotar mediante P la relación «mayor que» (véase Capítulo XI, hacia el final de § 3.).

El concepto de enunciado lógicamente verdadero, que pertenece al campo de la semántica extensional, se corresponde con el concepto de *enunciado analítico* o lógicamente necesario, que pertenece al plano de la semántica intensional. Todas las leyes lógicas son enunciados analíticos [24].

d. Consecuencia lógica

Ahora poseemos elementos para definir con rigor la noción de consecuencia lógica, que acaso sea la más importante de toda la semántica.

Sea A una fórmula y Γ un conjunto de fórmulas. Se dice que A

---

[23] Algunos autores, como MOSTOWSKI o QUINE, extienden el concepto de verdad lógica al universo vacío. QUINE propone un sencillo test para controlar la verdad o falsedad en dicho universo: asignar el valor «V» (verdadero) a toda generalización y el valor «F» (falso) a toda particularización y reducir así el problema a la interpretación de una fórmula de lógica de conectores (véase Capítulo IV).

[24] LEIBNIZ hablaba, en un sentido similar, de *verdades de razón*, como contrapuestas a las *verdades de hecho*. Las primeras serían las verdades de la lógica y la matemática, que se expresan mediante enunciados que son verdaderos no sólo en este mundo, sino en todos los mundos posibles (enunciados necesariamente verdaderos). Frente a ellas, las verdades de hecho, como, por ejemplo, las expresadas por los enunciados históricos, serían verdaderas sólo contingentemente, por circunstancias accidentales de este mundo.

es *consecuencia lógica* [25] de Γ si, para cualquier universo, toda interpretación que satisfaga a Γ satisface también a A.

La relación de consecuencia lógica es el correlato semántico, y también el fundamento, de la relación sintáctica de deducibilidad formal. Como símbolo de esta última relación empleábamos el deductor: «⊢», escribiendo Γ ⊢ A para indicar que la fórmula A es formalmente deducible (derivable) del conjunto de fórmulas Γ. Como símbolo de la relación semántica de consecuencia lógica utilizaremos este otro

$$\models$$

al que daremos el nombre de *consecutor* o *deductor semántico*. Y para indicar que una fórmula A es consecuencia lógica, o se deduce semánticamente, de un conjunto de fórmulas Γ, escribiremos

$$\Gamma \models A.$$

En la notación sintáctica, el hecho de que una fórmula representase una ley lógica y no se dedujese, por tanto, de ninguna premisa o supuesto inicialmente dado, se expresaba: ⊢ A, indicando de este modo que la fórmula A es susceptible de ser deducida a partir de cero premisas o suposiciones iniciales. Análogamente escribiremos en notación semántica

$$\models A$$

si A es una verdad lógica (enunciado analítico).

La distinción entre las dos clases de relación deductiva, la deducibilidad formal y la consecuencia semántica, no es trivial. En principio no está garantizado que ambas hayan de coincidir. Posiblemente el resultado más interesante de la investigación de sistemas de lógica elemental o de primer orden, es que en dicho orden la re-

---

[25] «El enunciado *X se sigue lógicamente* de los enunciados de la clase *K* si y sólo si todo modelo de la clase *K* es también un modelo del enunciado *X*» (TARSKI, «On the concept of logical consequence», p. 417; véase la referencia completa de este artículo en la nota 22 del presente capítulo).

Un claro antecedente de la noción de consecuencia lógica elaborada por TARSKI se encuentra en la *Wissenschaftslehre* [*Teoría de la ciencia*] de Bernard BOLZANO (1781-1848).

lación de deducibilidad y la relación de consecuencia son coextensivas o equivalentes. Este resultado se debe a GÖDEL (1930). Pero en teorías de orden superior no es ése el caso. En tales teorías el control lógico inherente a la relación de deducibilidad deja de ser operante, y es preciso atenerse tan sólo al criterio de consecuencia lógica.

Por lo demás, el lector habrá podido reconocer en la definición que se acaba de formular de la consecuencia lógica el fondo semántico-extensional de la noción de argumento. La idea de que la verdad de las premisas es incompatible con la falsedad de la conclusión se expresa en términos de semántica extensional diciendo que toda interpretación que satisfaga a las primeras ha de satisfacer a la segunda. Por donde se ve el lugar fundamental que ocupan en lógica formal las categorías semánticas.

CAPÍTULO IX

DEDUCCIÓN CUANTIFICACIONAL

En el presente capítulo nos ocuparemos del cálculo deductivo de cuantificadores, cuya necesidad ya quedó indicada[1]. Dicho de un modo muy esquemático, las operaciones de cálculo cuantificacional se reducen a:

(1) abrir las fórmulas cerradas por cuantificadores, suprimiendo o desmontando provisionalmente éstos;
(2) aplicar las técnicas de lógica de conectores a las fórmulas resultantes; y
(3) restituir o reponer al término de las operaciones los cuantificadores que se habían suprimido.

Aunque todavía no estemos en posesión de las reglas que permiten efectuar tales operaciones, quizá sirva de ilustración un ejemplo. La primera medida que habría que tomar para resolver el siguiente argumento:

$$\wedge x\,(Qx \rightarrow Rx),\ \wedge x\,(Px \rightarrow Qx) \vdash \wedge x\,(Px \rightarrow Rx)$$

sería precisamente eliminar los cuantificadores de las dos suposiciones iniciales. Ello permitiría operar directamente sobre las respectivas matrices de éstas y obtener, por una sencilla aplicación de la regla del silogismo hipotético, la matriz de la conclusión; después de lo cual se restituiría el cuantificador eliminado. El desarrollo completo de este argumento (que es, dicho sea entre paréntesis, la formalización del ejemplo de la página 161, siendo *P*: ateniense, *Q*: griego, *R*: europeo) puede verse al final de este capítulo (§ 10, Ejercicio 2.°*a*).

Ahora bien, las operaciones de suprimir y restituir cuantificado-

[1] Véase capítulo anterior, § 1.

res son mucho más complicadas de lo que a primera vista pudiera parecer. Las variables individuales representan objetos individuales, pero no determinadamente como lo hacen los nombres propios, sino ambiguamente y según el contexto, como lo hacen los pronombres. El cuantificador cumple la función de contrarrestar esta ambigüedad fijando el sentido de las variables, las cuales, sin su presencia, se convierten en algo parecido a un pronombre sacado de contexto y pueden dar lugar a graves equívocos en el curso de las operaciones. La principal dificultad del cálculo de cuantificadores reside, justamente, en la serie de restricciones y cautelas que son necesarias para no caer en tales equívocos.

Finalmente, conviene hacer otra advertencia. En el Capítulo II se habló de que los predicados pueden ser absolutos o monádicos y relativos o poliádicos. El cálculo restringido a los casos en que las fórmulas cuantificacionales contengan únicamente predicados monádicos, recibe el nombre de *cálculo cuantificacional monádico*. Al estudio de este cálculo restringido se dedican este capítulo y el que le sigue. Al estudio del cálculo cuantificacional poliádico se dedica el Capítulo XI.

A. DEDUCCIÓN NATURAL

§ 1. *Regla de eliminación de generalizador*

El cálculo de predicados que vamos a exponer constará también de reglas básicas y reglas derivadas. En este capítulo consideraremos las básicas, que son cuatro, una de introducción y otra de eliminación de cada uno de los dos cuantificadores.

La regla de *eliminación de generalizador* (en abreviatura: **EG**), llamada también por algunos autores de *instanciación universal*, es una regla que permite inferir de una generalización el resultado de suprimir el cuantificador cerrando convenientemente la matriz mediante la oportuna introducción de una constante individual o, mejor dicho, de un parámetro [2].

---

[2] Es frecuente encontrar en los manuales de lógica la distinción entre fórmulas *abiertas* y *cerradas*, según que contengan o no variables individuales libres. Por ejemplo, las expresiones: Px, Qxy serían fórmulas abiertas, mientras que: $\bigwedge xPx$, $\bigvee x \bigwedge yQxy$ serían cerradas, puesto que no contienen ninguna variable individual que no se encuentre ligada por un cuantificador. (Sobre la distinción entre variables libres y ligadas, véase Cap. II, § 11.)

En el uso ordinario del discurso se considera legítimo pasar por inferencia de la ley general al caso concreto, de *todos* en general, a *éste* en particular. Se trata, sencillamente, de la ejemplificación de generalidades.

Tal sería, por ejemplo, el paso de las premisas:

Todo inglés es europeo y Mr. Heath es inglés

a la conclusión

Mr. Heath es europeo,

o de la proposición

todo es material

a la proposición

esto es material.

Una fórmula cerrada puede ser considerada como una sentencia o un enunciado, pero no así una fórmula abierta, en la cual las variables individuales son pronombres sacados fuera de contexto que tornan esencialmente ambigua la expresión. Así pues, la mera supresión de cuantificadores en un enunciado formal (p. ej., en $\bigvee xPx$) tiene por resultado una expresión que ya *no es* un enunciado (p. ej., *Px*, que es la matriz de la particularización $\bigvee xPx$).

En nuestro cálculo eludiremos en la medida de lo posible la manipulación explícita de fórmulas abiertas (a las que denominamos con PRAWITZ *seudofórmulas*) recurriendo al uso de *parámetros* (variables individuales no susceptibles de cuantificación; en símbolos: a, b, c...) y estipulando que *al suprimir los cuantificadores de una fórmula se sustituirá en la matriz (seudofórmula) resultante cada variable individual libre en todas sus ocurrencias por un parámetro que no figurase en la cuantificación inicial.* Por ejemplo, al suprimir en:

$$\bigvee x \bigvee y\, (Px \vee Qxy)$$

el primer cuantificador, escribiremos

$$\bigvee y\, (Pa \vee Qay);$$

y al suprimir el segundo escribiremos, eligiendo un nuevo parámetro

$$Pa \vee Qab.$$

La regla de eliminación de generalizador se formula así:

EG

$$\frac{\bigwedge x\ Px}{Pa}$$

El segundo de los anteriores ejemplos se podría formular (siendo *P*: material):

$$\bigwedge x\ Px \vdash Pa$$

y la derivación de este argumento sería:

$-1\ \bigwedge x\ Px$
$2\ Pa$ **EG 1**

Ya sabemos (Cap. II) que el generalizador puede ser entendido como una extensión o generalización del conjuntor. Análogamente, la regla de eliminación de generalizador **(EG)** viene a ser como una

---

Lo mismo en este último caso que en el anterior, las expresiones resultantes son fórmulas cerradas, puesto que los parámetros no son variables libres.

La operación consistente en la *sustitución* en una fórmula cuantificacional (abierta) de una o más variables libres, en todas sus ocurrencias, por respectivos parámetros, puede anotarse así

$$A^{x}_{a} (o\ A^{xy}_{ab})$$

siendo A esa fórmula, x (o x, y) la variable libre (o variables libres) a reemplazar y a (o a y b) el parámetro (o parámetros) a introducir. En lo que sigue, sin embargo, nos limitaremos a representar intuitivamente esa sustitución mediante esquemas metalingüísticos que expresen la diferencia entre «sujeto» y «predicado». Por ejemplo, el paso del esquema: Px al esquema: Pa, deberá entenderse como la sustitución, en todas sus ocurrencias, de x por a en la seudofórmula Px. Obsérvese que en un esquema de esa índole la letra metalingüística «P» no ha de representar forzosamente una letra predicativa, sino que puede servir también de etiqueta a cualquier complejo expresivo susceptible de ser predicativamente aplicado a un símbolo de individuo. La expresión metalingüística Px puede denotar a cualquier expresión de lenguaje objeto que conste de una parte que cumpla la función predicativa y de una variable individual, lo cual convendría tanto a la expresión concreta *Px* como a la expresión, asimismo concreta, *Px* ∨ *Qxb* (donde el elemento «predicativo» sería el complejo: «*P* – ∨ *Q* – *b*», todo él denotable por la letra metalingüística P). Lo mismo vale decir, análogamente, del esquema metalingüístico Pa y las expresiones de lenguaje objeto *Pa* y *Pa* ∨ *Qab*. (Véase también Cap. XIV, nota 14.)

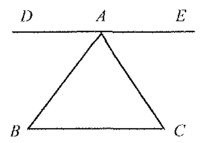
extensión o generalización de la regla de eliminación de conjuntor **(Simp)**, por la que se pasa de la posición de una conjunción a la posición de uno de sus elementos.

§ 2. *Regla de introducción de generalizador*

La regla de *introducción de generalizador*, o también de *generalización* (que se abreviará: **IG**), corresponde al uso ordinario de un principio intuitivo: «lo que vale para un caso cualquiera, vale para todo caso». Dicho principio permite establecer una inferencia que va de *cualquiera* a *todo*, es decir, del caso a la ley.

Esta regla merece ser discutida con más detención. El uso del referido principio intuitivo tiene lugar, sobre todo, en matemática, aunque también se da en muchos otros contextos, como en el análisis de tipificaciones jurídicas o en los muestreos estadísticos. He aquí una ilustración del empleo de ese principio tomada de la historia de la geometría. En los *Elementos de geometría* de Euclides se encuentra la demostración del famoso teorema según el cual los tres ángulos de un triángulo suman dos rectos. A continuación sigue una prueba de dicho teorema (que no es, en rigor, la de Euclides, sino otra más breve de origen pitagórico):

Constrúyase un triángulo cualquiera y trácese una paralela a la base que pase por el vértice opuesto a ésta. Resultan las siguientes igualdades:



DAB = *ABC* (igualdad de ángulos alternos internos)
EAC = *ACB* (igualdad de ángulos alternos internos)
DAB + *EAC* = *ABC* + *ACB* (la suma de los primeros miembros de dos igualdades es igual a la suma de los segundos).

Y añadiendo *BAC* a cada miembro (según el principio de que si se añade una misma cosa a cada miembro de una igualdad se vuelve a obtener una igualdad):

$$DAB + EAC + BAC = ABC + ACB + BAC$$

Ahora bien, el primer miembro de la última igualdad vale dos rectos. Por consiguiente, también los valdrá el segundo. Queda demostrado que los tres ángulos de un triángulo valen dos rectos.

Esta prueba tiene por base la construcción de una figura o diagrama individual y concreto, y, sin embargo, permite concluir en general para *todo* triángulo. La razón es que dicho diagrama, a pesar de ser individual y concreto, es considerado como un diagrama *cualquiera*. Podía perfectamente haber sido cualquier otro. El carácter enteramente arbitrario de la elección de la figura construida permite la inferencia.

Así pues, el paso inferencial de la predicación de una nota respecto de un individuo cualquiera a la atribución de la misma a todo individuo en general, estará justificado siempre que el individuo que sirva de base a la generalización sea un individuo *absolutamente cualquiera*, esto es, que se encuentre libre de toda condición o privilegio. Sólo teniendo la seguridad de haber elegido ese individuo, y después de probar que posee la propiedad deseada, se puede concluir la generalización.

Trasladando esas cautelas al lenguaje simbólico: será lícito pasar de una predicación Pa a la generalización de la misma, pero después de asegurarse de que el individuo elegido o, dicho en lenguaje simbólico, el parámetro individual «a» del caso, al que podemos dar el nombre de *parámetro propio* de la generalización, no figura en ningún supuesto o hipótesis sin cancelar de la que dependa la predicación Pa (que es la premisa de la inferencia).

La operación de generalizar por deducción es, por tanto, una operación crítica, que está sujeta a una condición; si esa condición formal no se cumple, la generalización será incorrecta.

He aquí la formulación de la regla

IG

$$\frac{\text{Pa}}{\bigwedge \text{xPx}}$$

La *condición crítica* a que se sujeta esta regla es la siguiente: que el parámetro propio de la generalización no figure en ningún supuesto no cancelado del que dependa Pa.

§ 3. *Nota sobre el uso de la regla* **IG**

La necesidad de andarse con cuidado en la aplicación de la regla **IG** es algo que puede comprobarse mediante el ensayo de derivación formal de estos dos argumentos, el primero de los cuales es correcto y el segundo no:

Argumento número 1: o todos son negros o todos son amarillos; por consiguiente, todos son o negros o amarillos.

Argumento número 2: todos son o negros o amarillos; por consiguiente, o todos son negros o todos son amarillos.

La formalización y derivación del primer argumento[3] (siendo P: negro y Q: amarillo) transcurrirá así:

$$\bigwedge xPx \vee \bigwedge xQx \vdash \bigwedge x(Px \vee Qx)$$

– 1 $\bigwedge xPx \vee \bigwedge xQx$	
┌ 2 $\bigwedge xPx$	
│ 3 Pa	**EG** 2
└ 4 $Pa \vee Qa$	**T**
┌ 5 $\bigwedge xQx$	
│ 6 Qa	**EG** 5
└ 7 $Pa \vee Qa$	**T**
8 $Pa \vee Qa$	**T**
9 $\bigwedge x(Px \vee Qx)$	**IG** 8

Mientras que la formalización y derivación del segundo argumento sería:

$$\bigwedge x(Px \vee Qx) \vdash \bigwedge xPx \vee \bigwedge xQx$$

– 1 $\bigwedge x(Px \vee Qx)$	
2 $Pa \vee Qa$	**EG** 1
┌ 3 Pa	
│ 4 $\bigwedge xPx$	(!)

---

[3] Para poner más de relieve las líneas de derivación que interesan directamente al cálculo de cuantificadores, en este primer capítulo se comentarán escuetamente con la letra **T** todas aquellas líneas que se funden en la aplicación de reglas del cálculo de conectores. (Esa letra es abreviatura de «tautología», nombre común a toda ley de la lógica de conectores —véase Cap. IV—. A partir de la sección final de este capítulo, dedicada a la resolución de argumentos, se volverá a especificar en los comentarios el nombre propio de la regla de lógica de conectores que en cada caso proceda.

En el primer argumento la regla **IG** se aplica a la línea 8 (resultado de una prueba por casos que es *ya* independiente de supuestos subsidiarios) para construir la línea 9, lo cual es correcto. Pero en el segundo argumento la posibilidad de aplicar la regla **IG** a la línea 3 para construir la línea 4 queda frustrada por el hecho de que dicha línea 3 no está exenta de supuestos, ya que ella misma es una suposición. La condición crítica de la regla impide, pues, su aplicación en tal caso.

§ 4. *Regla de introducción de particularizador*

La regla de *introducción de particularizador* (en abreviatura **IP**) tiene por base un modo de inferencia del discurso intuitivo que permite pasar de la atribución de una nota a un individuo a la afirmación de que existen sujetos (cuando menos uno) que poseen esa nota. Es el paso lógico que va de la afirmación de *este* a la afirmación de *alguno*, por ejemplo del enunciado «esto arde» al enunciado «algo arde», o del enunciado «esto es material» al enunciado «algo es material».

La figura de esta regla es como sigue:

IP

$$\frac{\mathrm{Pa}}{\bigvee \mathrm{xPx}}$$

lo cual se puede explicar diciendo: dada una fórmula de estructura predicativa con un parámetro a, puédese admitir en el cálculo una nueva fórmula que proceda de ella cambiando el referido parámetro por una variable individual y anteponiendo al resultado de este cambio el correspondiente prefijo de cuantificación particular.

He aquí un ejemplo de argumento cuya resolución se apoya en el empleo de la regla **IP**:

$$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \bigvee xQx$$

–	1 $\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$	
–	2 Pa	
	3 $Pa \rightarrow Qa$	**EG** 1
	4 Qa	**T** 3, 2
	5 $\bigvee xQx$	**IP** 4

§ 5. *Regla de eliminación de particularizador*

La regla de *eliminación de particularizador* (en abreviatura: **EP**), o también, como algunos la llaman, de *instanciación existencial*, se basa en una inferencia del discurso intuitivo que consiste en pasar de la existencia de un individuo en principio no identificado a las consecuencias que se siguen de imaginar su identificación.

La presentación de esta regla requiere algunas aclaraciones previas. Según la inferencia mentada, si se sabe que hay *algún* (= al menos un) individuo *tal que* posee una determinada propiedad, entonces, aun sin saber exactamente cuál sea ese individuo, puédese pasar al establecimiento de las consecuencias que se siguen del supuesto de su identificación, esto es, del supuesto de que un individuo, imaginariamente determinado, posea dicha nota.

Pero semejante inferencia sólo puede ofrecer garantía de corrección bajo ciertas restricciones. Por lo pronto, el individuo imaginariamente elegido no puede ser un individuo absolutamente cualquiera (puesto que el dato inicial: *alguno*, no es extensible a todos), sino uno tal que posea la propiedad en cuestión. Ahora bien, el requisito impuesto al individuo imaginado de que sea *tal que* satisfaga esa propiedad, arrastra como consecuencia la restricción de que ese individuo no haya sido mencionado antes en ninguna hipótesis, es decir, que no haya intervenido antes en la prueba soportando alguna otra condición [4].

Por otra parte, conviene no olvidar que la citada identificación de individuo se hace en principio, pero no de hecho, esto es, *imaginariamente*, no realmente. Para que la conclusión pueda ser realmente aceptada, es preciso que ese individuo esté ya descartado y no aparezca en ella.

Estas condiciones se traducen del siguiente modo en la formulación de la regla: 1) el símbolo individual o *parámetro propio*, elegido para la instanciación, no debe aparecer en la premisa existen-

---

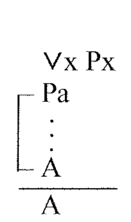
[4] El fundamento de esta restricción es que no sería verosímil que el tal individuo reuniese también, además de esa otra condición, la propiedad de que se trate.

Un ejemplo puede aclarar el sentido de la prohibición. Imagínese que el inspector de una compañía de seguros reconstruye verbalmente las incidencias declaradas por un conductor asegurado en la compañía: «a las 11 de la mañana del día de ayer el coche del asegurado tuvo una colisión con un vehículo cuya identidad se desconoce. Pongamos que fuera un Citroën. Dos horas después el coche del asegurado volvió a sufrir otra colisión con un vehículo cuyos detalles se desconocen. Pongamos que fuera un Volkswagen...»

cial de la que se parte [5], y 2) la línea terminal o conclusión no debe contener tampoco ese símbolo individual, ni depender de ningún supuesto sin descargar que lo contenga. Lo cual es tanto como decir que el imaginario supuesto debe ser cancelado.

El esquema de la regla de eliminación de particularizador es como sigue:

EP



Condición de la regla: el parámetro propio a no debe ocurrir en $\vee x Px$, ni tampoco en A, ni en ninguna hipótesis previa no descargada.

La estructura de la regla de eliminación de particularizador guarda analogía con la estructura de la regla de eliminación de disyuntor (prueba por casos), de acuerdo con el estrecho parentesco ya señalado entre el disyuntor y el particularizador.

§ 6. *El conflicto de alcances entre la regla* **EP** *y la regla* **IG**

La combinación de las reglas **EP** e **IG**, cuya aplicación entraña condiciones críticas, puede dar lugar, si se olvida tener en cuenta dichas condiciones, a deducciones inválidas como esta:

– 1 $\vee x Px$
┌ 2 Pa
│ 3 $\wedge x Px$ **IG** 2 (!)
│ 4 $\wedge x Px$ **EP** 1, 2-3

La aplicación de la regla **IG** en la tercera línea es ilegítima, y ello invalida la derivación. La razón es la siguiente: según la regla **IG**, el parámetro a, que sirve de base a la generalización, ha de re-

---

«Citroën» es, en este contexto, un seudonombre para designar la marca de un coche cuya real identidad se ignora. Si es preciso referirse nuevamente a un coche desconocido, que en principio puede no ser el mismo, es mejor cambiar de seudónimo, para no dar lugar a confusiones.

[5] Es la garantía formal de que el individuo imaginario está libre de otras cargas.

presentar un individuo absolutamente *cualquiera*, esto es, no sujeto a ninguna hipótesis; pero el individuo supuesto en la segunda línea no es un individuo cualquiera, sino un individuo *tal*, esto es, un individuo condicionado al cumplimiento de la nota *P*. Así pues, la segunda línea no puede tener como resultado lógico la tercera.

Dicho más generalmente: la regla **IG** no es aplicable a un parámetro hipotéticamente situado bajo el alcance de la regla **EP**. En caso contrario valdría la inferencia, manifiestamente incorrecta, del enunciado

Algunos hombres son ricos

al enunciado

Todos los hombres son ricos.

TABLA III

REGLAS DEL CÁLCULO DE CUANTIFICADORES

I. REGLAS BÁSICAS (GENTZEN, 1934)

Introducción de generalizador

IG

$$\frac{Pa}{\bigwedge x Px}$$

Condición: «a» no debe ocurrir en ningún supuesto previo no cancelado.

Eliminación de generalizador

EG

$$\frac{\bigwedge x Px}{Pa}$$

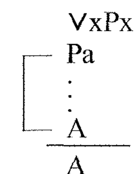
Introducción de particularizador

IP

$$\frac{Pa}{\bigvee x Px}$$

Eliminación de particularizador

EP



Condición: «a» no debe ocurrir en ⋁xPx, ni en A, ni en ningún supuesto previo no cancelado.

II. REGLAS DERIVADAS

Intercambio

I

$$\frac{A \leftrightarrow B,\ C_A}{C_B}$$

Definición del generalizador

DG

$$\frac{\bigwedge x Px}{\neg \bigvee x \neg Px} \quad \text{(doble línea)}$$

Definición del particularizador

DP

$$\frac{\bigvee x Px}{\neg \bigwedge x \neg Px} \quad \text{(doble línea)}$$

Negación del generalizador

NG

$$\frac{\neg \bigwedge x Px}{\bigvee x \neg Px} \quad \text{(doble línea)}$$

Negación del particularizador

NP

$$\frac{\neg \bigvee x Px}{\bigwedge x \neg Px} \quad \text{(doble línea)}$$

§ 7. *Intercambio cuantificacional*

La utilidad de la *regla de intercambio* quedó ya manifiesta en el cálculo de conectores (Cap. VII, § 7). Según dicha regla *toda fórmula o subfórmula puede ser reemplazada, cualquiera que sea el contexto que la envuelva, por su equivalente.* Su extensión al nuevo cálculo exige la demostración de que es válida también para contextos cuantificacionales.

Se la puede representar mediante una figura similar a la del anterior cálculo, con tal de que se entienda que esta vez las fórmulas en cuestión pueden ser fórmulas gobernadas por cuantificadores (lo que se indicará cuando interese mediante el oportuno prefijo: $\bigwedge x A$, $\bigvee y B$). Siendo A, B y C fórmulas (cuantoriales) cualesquiera, y siendo C_A una fórmula que contiene una o más veces a la primera, y C_B el resultado de cambiar en esta última una o más ocurrencias de A por una o más ocurrencias de B, la formulación de la regla de intercambio sería

I

$$\frac{A \leftrightarrow B,\ C_A}{C_B}$$

He aquí un ejemplo de aplicación de la regla **I** a fórmulas cuantificadas. Si se tiene la equivalencia:

$$\bigwedge x Px \leftrightarrow \neg \bigvee x \neg Px$$

y el curso de una deducción permite obtener la fórmula

$$\bigwedge x Qx \rightarrow \bigwedge x Px$$

puédese efectuar en la línea de derivación que inmediatamente siga el reemplazo o intercambio en esa fórmula del consecuente $\bigwedge x Px$ por su equivalente así:

$$\bigwedge x Qx \rightarrow \neg \bigvee x \neg Px.$$

La regla de intercambio es, como ya se hizo constar en el Capítulo VII, una «metarregla», y su fundamentación se obtiene por métodos diversos a los de otras reglas. De hecho en la citada sección séptima de

dicho capítulo se hizo ver que esta regla es un corolario del teorema del mismo nombre: el *metateorema de intercambio*, cuya prueba se llevó a cabo por inducción sobre el grado lógico de la fórmula que engloba a la subfórmula intercambiada. Si el lector revisa la prueba efectuada en esas páginas, se percatará de que basta añadir dos nuevos casos al «paso» de la misma: caso 5, en que la fórmula englobante es una generalización; y caso 6, en que esa fórmula es una particularización.

Caso 5. $D \leftrightharpoons \wedge x C_A$. Hay que demostrar: $\wedge x C_A \leftrightarrow \wedge x C_B$.

1	$C_A \leftrightarrow C_B$	(Hipótesis de inducción)
2	$\wedge x C_A$	
3	C_A	**EG** 1
4	C_B	**ECO**$_3$ 1, 3
5	$\wedge x C_B$	**IG** 4
6	$\wedge x C_A \rightarrow \wedge x C_B$	**TD** 2-6
7	$\wedge x C_B$	
8	C_B	**EG** 7
9	C_A	**ECO**$_4$ 1, 8
10	$\wedge x C_A$	**IG** 9
11	$\wedge x C_B \rightarrow \wedge x C_A$	**TD** 7-10
12	$\wedge x C_A \leftrightarrow \wedge x C_B$	**ICO** 6, 11

(Brackets on the page enclose lines 2–5 and 7–10.)

La demostración del caso 6: $D \leftrightharpoons \vee x C_A$ es similar y puede ser sin dificultad realizada por el lector.

Con la prueba de estos dos nuevos casos, más los cuatro ya examinados en el Capítulo VII, queda demostrado el *metateorema de intercambio* para el cálculo de cuantificadores:

si $A \leftrightarrow B$, entonces $C_A \leftrightarrow C_B$

La deducción de la regla a partir de este teorema es trivial:

I

$$\frac{A \leftrightarrow B,\ C}{C}$$

Fundamentación

– 1 $A \leftrightarrow B$
– 2 C_A
3 $C_A \leftrightarrow C_B$
4 C_B

Las líneas 1 y 2 son las premisas de la regla I. La línea 3 se sigue por *modus ponens* de la línea 1 y el teorema de intercambio. La línea 4 se sigue de 3 y 2 por una de las propiedades del coimplicador (regla **ECO**$_3$).

§ 8. *Reglas de interdefinición de cuantificadores*

Pondremos fin a la teoría de este capítulo con la consideración de cuatro reglas derivadas, cuya estructura se ha contemplado ya en la tabla III de este capítulo. Dos de ellas permiten definir cada uno de los cuantificadores en función del otro y del negador; son, por así decirlo, el correlato cuantorial de las reglas de interdefinición de conjuntor y disyuntor en cálculo de conectores. Las otras dos permiten la interiorización del negador con respecto a cualquiera de los cuantificadores, y representan, por su parte, el trasunto cuantificacional de las leyes de De Morgan.

La fundamentación de las cuatro sigue a continuación. En la deducción de la regla de definición del particularizador no se han utilizado más reglas de cuantificadores que las básicas. En la deducción de las restantes se recurre también a las reglas derivadas de cuantificadores ya conocidas, con lo cual el número de pasos se reduce notablemente.

REGLA DE DEFINICIÓN DEL PARTICULARIZADOR

DP

$$\frac{\bigvee x Px}{\neg \bigwedge x \neg Px}$$

Fundamentación

1	$\bigvee x Px$	
2	Pa	
3	$\bigwedge x \neg Px$	
4	$\neg Pa$	**EG** 3
5	$Pa \wedge \neg Pa$	**T** 2, 4
6	$\neg \bigwedge x \neg Px$	**T** 3-5
7	$\neg \bigwedge x \neg Px$	**EP** 1, 2-6

8	$\neg \bigwedge x \neg Px$	
9	$\neg \bigvee x Px$	
10	Pa	
11	$\bigvee x Px$	**IP** 10
12	$\bigvee x Px \wedge \neg \bigvee x Px$	**T** 11, 9
13	$\neg Pa$	**T** 10-12
14	$\bigwedge x \neg Px$	**IG** 13
15	$\bigwedge x \neg Px \wedge \neg \bigwedge x \neg Px$	**T** 14, 8
16	$\neg \neg \bigvee x Px$	**T** 9-15
17	$\bigvee x Px$	**T** 16

REGLA DE DEFINICIÓN DEL GENERALIZADOR

DG

$$\frac{\bigwedge xPx}{\neg \bigvee x \neg Px}$$

Fundamentación

– 1 ⋀xPx		– 5 ¬ ⋁x ¬ Px	
2 ¬ ¬ ⋀xPx	**T** 1	6 ¬ ¬ ⋀x ¬ ¬ Px	**I DP** 5
3 ¬ ¬ ⋀x ¬ ¬ Px	**IT** 2	7 ⋀x ¬ ¬ Px	**T** 6
4 ¬ ⋁x ¬ Px	**I DP** 3	8 ⋀xPx	**I T** 7

REGLA DE NEGACIÓN DEL GENERALIZADOR

NG

$$\frac{\neg \bigwedge xPx}{\bigvee x \neg Px}$$

Fundamentación

– 1 ¬⋀xPx		– 4 ⋁x ¬ Px	
2 ¬ ¬ ⋁x ¬ Px	**I DG** 1	5 ¬ ⋀x ¬ ¬ Px	**DP** 4
3 ⋁x ¬ Px	**T** 2	6 ¬ ⋀xPx	**IT** 5

REGLA DE NEGACIÓN DEL PARTICULARIZADOR

NP

$$\frac{\neg \bigvee xPx}{\bigwedge x \neg Px}$$

Fundamentación

– 1 ¬ ⋁xPx		– 4 ⋀x ¬ Px	
2 ¬ ¬ ⋀x ¬ Px	**I DP** 1	5 ¬ ⋁x ¬ ¬ Px	**DG** 4
3 ⋀x ¬ Px	**T** 2	6 ¬ ⋁xPx	**IT** 5

§ 9. *Resolución de argumentos*

El estudio de este capítulo proporciona base suficiente para resolver argumentos en lo que respecta a cuantificación monádica (ex-

clusiva intervención de predicados absolutos). En este sentido, el repertorio de reglas que es preciso memorizar en lógica de cuantificadores es, comparativamente, más reducido que en lógica de conectores, donde se requiere, en la práctica, la ayuda de un buen número de reglas derivadas.

Sin embargo, en lo que se refiere a las relaciones de la lógica de cuantificadores con el lenguaje ordinario, la situación es más compleja. A diferencia de lo que sucedió en lógica de conectores, las nociones de formalización del lenguaje que se estudiaron en el Capítulo II no proporcionan base suficiente para traducir a fórmulas trozos del lenguaje ordinario protagonizados por las partículas «todo» o «alguno». Para ello se necesita, cuando menos, el estudio de las dos primeras secciones del capítulo próximo, relativas a la proposición categórica y su estructura formal [6].

Por esta razón, en la presente sección se considerarán tan sólo casos de resolución de argumentos planteados en lenguaje formal, dejando el análisis de argumentos similares expuestos en lenguaje informal para la sección final del capítulo siguiente.

Ejercicio 1.º Resolver el siguiente argumento:

$$\begin{array}{ll} & \bigwedge x(Rx \rightarrow Px) \\ & \bigwedge x(Px \rightarrow \neg Sx) \\ & \bigwedge x(Rx \wedge Qx \rightarrow Sx) \\ \therefore & \bigwedge x(Rx \rightarrow \neg (Px \rightarrow Qx) \end{array}$$

[6] La formalización de enunciados del lenguaje ordinario con predicados relativos y la resolución de argumentos cuantificacionales basados en este tipo de predicación se estudiará en el Capítulo XI.

Solución

–	1 $\wedge x(Rx \rightarrow Px)$	
–	2 $\wedge x(Px \rightarrow \neg Sx)$	
–	3 $\wedge x(Rx \wedge Qx \rightarrow Sx)$	
	4 $Ra \rightarrow Pa$	**EG** 1
	5 $Pa \rightarrow \neg Sa$	**EG** 2
	6 $Ra \wedge Qa \rightarrow Sa$	**EG** 3
┌	7 Ra	
│	8 Pa	**MP** 4, 7
│	9 $\neg Sa$	**MP** 5, 8
│	10 $\neg (Ra \wedge Qa)$	**MT** 6, 9
│	11 $Ra \rightarrow \neg Qa$	**DI** 10
│	12 $\neg Qa$	**MP** 11-7
│	13 $Pa \wedge \neg Qa$	**Prod** 8, 12
└	14 $\neg (Pa \rightarrow Qa)$	**DI** 13
	15 $Ra \rightarrow \neg (Pa \rightarrow Qa)$	**TD** 7-14
	16 $\wedge x(Rx \rightarrow \neg (Px \rightarrow Qx))$	**IG** 15

Nota. Obsérvese que para resolver este argumento no se requieren más reglas de cuantificadores que las dos básicas del generalizador. La solución del mismo consiste en eliminar generalizador en las premisas, operar con reglas de conectores en las matrices resultantes, y restituir finalmente, cuando sea oportuno, el generalizador eliminado.

Ejercicio 2.º Fundamentar los cuatro esquemas de argumento siguientes:

a)
$\wedge x(Qx \rightarrow Rx)$
$\wedge x(Px \rightarrow Qx)$
$\therefore \wedge x(Px \rightarrow Rx)$

b)
$\wedge x(Qx \rightarrow \neg Rx)$
$\wedge x(Px \rightarrow Qx)$
$\therefore \wedge x(Px \rightarrow \neg Rx)$

c)
$\wedge x(Qx \rightarrow Rx)$
$\vee x(Px \wedge Qx)$
$\therefore \vee x(Px \wedge Rx)$

d)
$\wedge x(Qx \rightarrow \neg Rx)$
$\vee x(Px \wedge Qx)$
$\therefore \vee x(Px \wedge \neg Rx)$

Solución

a)

–	1 $\bigwedge x(Qx \rightarrow Rx)$	
–	2 $\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$	
	3 $Pa \rightarrow Qa$	**EG** 2
	4 $Qa \rightarrow Ra$	**EG** 1
	5 $Pa \rightarrow Ra$	**Sil** 3, 4
	6 $\bigwedge x(Px \rightarrow Rx)$	**IG** 5

b)

–	1 $\bigwedge x(Qx \rightarrow \neg Rx)$	
–	2 $\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$	
	3 $Pa \rightarrow Qa$	**EG** 2
	4 $Qa \rightarrow \neg Ra$	**EG** 1
	5 $Pa \rightarrow \neg Ra$	**Sil** 3, 4
	6 $\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Rx)$	**IG** 5

c)

–	1 $\bigwedge x(Qx \rightarrow Rx)$	
–	2 $\bigvee x(Px \wedge Qx)$	
	3 $Qa \rightarrow Ra$	**EG** 1
┌	4 $Pa \wedge Qa$	
│	5 Pa	**Simp**$_1$ 4
│	6 Qa	**Simp**$_2$ 4
│	7 Ra	**MP** 3, 6
│	8 $Pa \wedge Ra$	**Prod** 5, 7
└	9 $\bigvee x(Px \wedge Rx)$	**IP** 8
	10 $\bigvee x(Px \wedge Rx)$	**EP** 2, 4-9

d)

–	1 $\bigwedge x(Qx \rightarrow \neg Rx)$	
–	2 $\bigvee x(Px \wedge Qx)$	
	3 $Qa \rightarrow \neg Ra$	**EG** 1
┌	4 $Pa \wedge Qa$	
│	5 Pa	**Simp**$_1$ 4
│	6 Qa	**Simp**$_2$ 4
│	7 $\neg Ra$	**MP** 3, 6
│	8 $Pa \wedge \neg Ra$	**Prod** 5, 7
└	9 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**IP** 8
	10 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**EP** 2, 4-9

Nota. Los esquemas de argumento propuestos en este ejercicio son los cuatro modos de la primera figura del silogismo categórico tradicional, es decir, respectivamente: *Barbara, Celarent, Darii, Ferio*.

Ejercicio 3.º Fundamentar los cuatro esquemas de argumento siguientes:

a)
$\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Qx)$
$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$
$\therefore \bigwedge x(Px \rightarrow \neg Rx)$

b)
$\bigwedge x(Rx \rightarrow Qx)$
$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$
$\therefore \bigwedge x(Px \rightarrow \neg Rx)$

c)
$\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Qx)$
$\bigvee x(Px \wedge Qx)$
$\therefore \bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$

d)
$\bigwedge x(Rx \rightarrow Qx)$
$\bigvee x(Px \wedge \neg Qx)$
$\therefore \bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$

Solución

a)

–	1 $\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Qx)$	
–	2 $\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$	
	3 $Ra \rightarrow \neg Qa$	**EG** 1
	4 $Pa \rightarrow Qa$	**EG** 2
	5 Pa	
	6 Qa	**MP** 4, 5
	7 $\neg Ra$	**MT** 3, 6
	8 $Pa \rightarrow \neg Ra$	**TD** 5-7
	9 $\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Rx)$	**IG** 8

b)

–	1 $\bigwedge x(Rx \rightarrow Qx)$	
–	2 $\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$	
	3 $Ra \rightarrow Qa$	**EG** 1
	4 $Pa \rightarrow \neg Qa$	**EG** 2
	5 Pa	
	6 $\neg Qa$	**MP** 4, 5
	7 $\neg Ra$	**MT** 3, 6
	8 $Pa \rightarrow \neg Ra$	**TD** 5-7
	9 $\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Rx)$	**IG** 8

c)

–	1 $\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Qx)$	
–	2 $\bigvee x(Px \wedge Qx)$	
	3 $Ra \rightarrow \neg Qa$	**EG** 1
	4 $Pa \wedge Qa$	
	5 Pa	**Simp**$_1$ 4
	6 Qa	**Simp**$_2$ 4
	7 $\neg Ra$[7]	**MT** 3, 6
	8 $Pa \wedge \neg Ra$	**Prod** 5, 7
	9 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**IP** 8
	10 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**EP** 2, 4-9

d)

–	1 $\bigwedge x(Rx \rightarrow Qx)$	
–	2 $\bigvee x(Px \wedge \neg Qx)$	
	3 $Ra \rightarrow Qa$	**EG** 1
	4 $Pa \wedge \neg Qa$	
	5 Pa	**Simp**$_1$ 4
	6 $\neg Qa$	**Simp**$_2$ 4
	7 $\neg Ra$	**MT** 3, 6
	8 $Pa \wedge \neg Ra$	**Prod** 5, 7
	9 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**IP** 8
	10 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**EP** 2, 4-9

Nota. Los esquemas de argumento propuestos en este ejercicio son los cuatro modos de la segunda figura del silogismo categórico tradicional, es decir, respectivamente: *Cesare, Camestres, Festino, Baroco.*

Ejercicio 4.º Fundamentar los cuatro esquemas de argumento siguientes:

a)
$\bigvee x(Qx \wedge Rx)$
$\bigwedge x(Qx \rightarrow Px)$
$\therefore \bigvee x(Px \wedge Rx)$

b)
$\bigwedge x(Qx \rightarrow Rx)$
$\bigvee x(Qx \wedge Px)$
$\therefore \bigvee x(Px \wedge Rx)$

c)
$\bigvee x(Qx \wedge \neg Rx)$
$\bigwedge x(Qx \rightarrow Px)$
$\therefore \bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$

d)
$\bigwedge x(Qx \rightarrow \neg Rx)$
$\bigvee x(Qx \wedge Px)$
$\therefore \bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$

---

[7] Es fácil advertir que la aplicación de **MT** en esta línea supone un uso implícito de **DN***.

Solución

a)

–	1 $\bigvee x(Qx \wedge Rx)$	
–	2 $\bigwedge x(Qx \rightarrow Px)$	
	3 $Qa \rightarrow Pa$	**EG** 2
┌	4 $Qa \wedge Ra$	
│	5 Qa	**Simp**$_1$ 4
│	6 Pa	**MP** 3, 5
│	7 Ra	**Simp**$_2$ 4
│	8 $Pa \wedge Ra$	**Prod** 6-7
└	9 $\bigvee x(Px \wedge Rx)$	**IP** 8
	10 $\bigvee x(Px \wedge Rx)$	**EP** 1, 4-9

b)

–	1 $\bigwedge x(Qx \rightarrow Rx)$	
–	2 $\bigvee x(Qx \wedge Px)$	
	3 $Qa \rightarrow Ra$	**EG** 2
┌	4 $Qa \wedge Pa$	
│	5 Qa	**Simp**$_1$ 4
│	6 Pa	**Simp**$_2$ 4
│	7 Ra	**MP** 3,5
│	8 $Pa \wedge Ra$	**Prod** 6, 7
└	9 $\bigvee x(Px \wedge Rx)$	**IP** 8
	10 $\bigvee x(Px \wedge Rx)$	**EP** 2, 4-9

c)

–	1 $\bigvee x(Qx \wedge \neg Rx)$	
–	2 $\bigwedge x(Qx \rightarrow Px)$	
	3 $Qa \rightarrow Pa$	**EG** 2
┌	4 $Qa \wedge \neg Ra$	
│	5 Qa	**Simp**$_1$ 4
│	6 Pa	**MP** 3, 5
│	7 $\neg Ra$	**Simp**$_2$ 4
│	8 $Pa \wedge \neg Ra$	**Prod** 6, 7
└	9 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**IP** 8
	10 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**EP** 1, 4-9

d)

–	1 $\bigwedge x(Qx \rightarrow \neg Rx)$	
–	2 $\bigvee x(Qx \wedge Px)$	
	3 $Qa \rightarrow \neg Ra$	**EG** 1
┌	4 $Qa \wedge Pa$	
│	5 Qa	**Simp**$_2$ 4
│	6 Pa	**Simp**$_2$ 4
│	7 $\neg Ra$	**MP** 3, 5
│	8 $Pa \wedge \neg Ra$	**Prod** 5, 7
└	9 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**IP** 8
	10 $\bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**EP** 2, 4-9

Nota. Los esquemas de argumento propuestos en este ejercicio son cuatro de los seis modos silogísticos de la tercera figura, es decir, respectivamente: *Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison*. Los dos modos restantes: *Darapti, Felapton,* no son deducibles en el cálculo de cuantificadores.

Ejercicio 5.º Resolver el siguiente argumento:

$$\neg \bigvee x(Px \wedge \neg Rx) \rightarrow \neg \bigwedge x\,(Qx \rightarrow Px)$$
$$\bigwedge x(Px \rightarrow Rx)$$
$$\therefore\ \bigvee x \neg (\neg Qx \vee Px)$$

Solución

– 1	$\neg \bigvee x(Px \wedge \neg Rx) \rightarrow \neg \bigwedge x(Qx \rightarrow Px)$	
– 2	$\bigwedge x(Px \rightarrow Rx)$	
3	$\neg \bigvee x \neg (Px \rightarrow Rx)$	**DG** 2
4	$\neg \bigvee x \neg \neg (Px \wedge \neg Rx)$	**I DI** 3
5	$\neg \bigvee x(Px \wedge \neg Rx)$	**I DN** 4
6	$\neg \bigwedge x(Qx \rightarrow Px)$	**MP** 1, 5
7	$\neg \neg \bigvee x \neg (Qx \rightarrow Px)$	**I DG** 6
8	$\bigvee x \neg (Qx \rightarrow Px)$	**DN** 7
9	$\bigvee x \neg (\neg Qx \vee Px)$	**I DI** 8

Nota. El lector podrá advertir que la estrategia de esta deducción consiste en someter a una serie de transformaciones la segunda premisa hasta obtener de ella el antecedente de la primera (línea 5), cuyo consecuente, una vez liberado por **MP** (línea 6), es también transformado hasta ser convertido en la conclusión. Todo ello requiere el uso de las reglas de intercambio y de interdefinición cuantificacional.

B. TABLAS SEMÁNTICAS

§ 10. *Tablas semánticas de lógica cuantificacional*

Para resolver problemas de cuantificación por el método de las tablas semánticas, se agregarán a las siete reglas ya formuladas cuatro nuevas, una de verdad y otra de falsedad para cada uno de los dos cuantificadores.

Las reglas del método de las tablas semánticas son todas ellas, como habrá podido observarse ya en las hasta ahora conocidas, reglas de eliminación de signos. Las cuatro reglas a considerar aquí tienden a eliminar las cuantificadores, permitiendo el paso de una cuantificación o de la negación de una cuantificación a la matriz correspondiente (o a su negación), debidamente instanciada por los oportunos parámetros.

Dos de ellas, la *regla de verdad del generalizador* (**VG**) y la *regla de falsedad del particularizador* (**FP**).

VG

$$\frac{\bigwedge xPx}{Pa}$$

FP

$$\frac{\neg \bigvee xPx}{\neg Pa}$$

permiten este paso de una manera absoluta. Su fundamento intuitivo se encuentra en el dato semántico de que de la verdad de una generalización se sigue la verdad, y de la falsedad de una particularización la falsedad, de cualquier instancia individual correspondiente.

Las otras dos reglas, la *regla de falsedad del generalizador* **(FG)** y la *regla de verdad del particularizador* **(VP)** [8]

FG **VP**

$$\frac{\neg \bigwedge x Px}{\neg Pa} \qquad \frac{\bigvee x Px}{Pa}$$

admiten el paso a la correspondiente instanciación de una manera crítica o condicionada: el parámetro en ella introducido debe ser «nuevo» en el curso de la deducción, o cuando menos no utilizado antes en ninguna hipótesis.

Para comodidad del lector se recogen en el siguiente cuadro la totalidad de las reglas.

---

[8] La regla de verdad del particularizador **(VP)** responde, como puede verse en su correspondiente figura, a una modalidad de regla de eliminación de dicho signo que difiere de la utilizada en el cálculo de deducción natural de GENTZEN, y suele recibir el nombre de *regla de instanciación existencial.* Dicha regla interviene en algunos cálculos de deducción natural, como los de QUINE, COPI, HERMES y KALISH-MONTAGUE. Su estructura es, aparentemente, más simple que la estructura de la regla de eliminación del particularizador **(EP)** de GENTZEN, pero su uso reporta, por lo general, ciertos inconvenientes a los sistemas que la contienen, exceptuando el de KALISH-MONTAGUE.

TABLA IV

REGLAS SEMÁNTICAS

NEGACIÓN

DN

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

REGLAS DE VERDAD

REGLAS DE FALSEDAD

IMPLICACIÓN

VI

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B}$$

FI

$$\frac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\ \neg B\end{array}}$$

CONJUNCIÓN

VC

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}$$

FC

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$$

DISYUNCIÓN

VD

$$\frac{A \vee B}{A \mid B}$$

FD

$$\frac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\ \neg B\end{array}}$$

GENERALIZACIÓN

VG

$$\frac{\bigwedge xPx}{Pa}$$

FG

$$\frac{\neg \bigwedge xPx}{\neg Pa}$$ siendo «a» un parámetro nuevo

PARTICULARIZACIÓN

VP

$$\frac{\bigvee xPx}{Pa}$$ siendo «a» un parámetro nuevo

FP

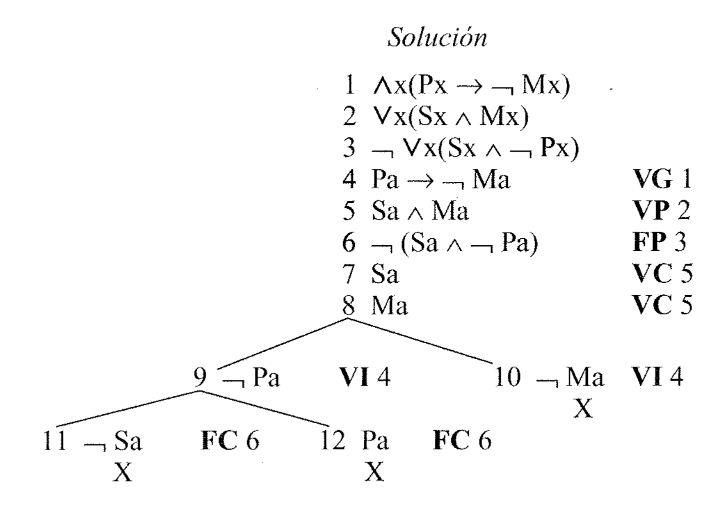
$$\frac{\neg \bigvee xPx}{\neg Pa}$$

§ 11. *Ejercicios*

Ejercicio 1.º Decidir la validez del siguiente argumento [9]:

$$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Mx)$$
$$\bigvee x(Sx \wedge Mx)$$
$$\therefore \bigvee x(Sx \wedge \neg Px)$$

Solución



Ejercicio 2.º Decidir la validez lógica de la fórmula

$$\bigwedge xPx \rightarrow \bigvee xPx$$ [10]

[9] El esquema formal de este argumento es el modo silogístico de la segunda figura *Festino*.

[10] Esta fórmula es la ley de descenso cuantificacional (véase, más adelante, § 14).

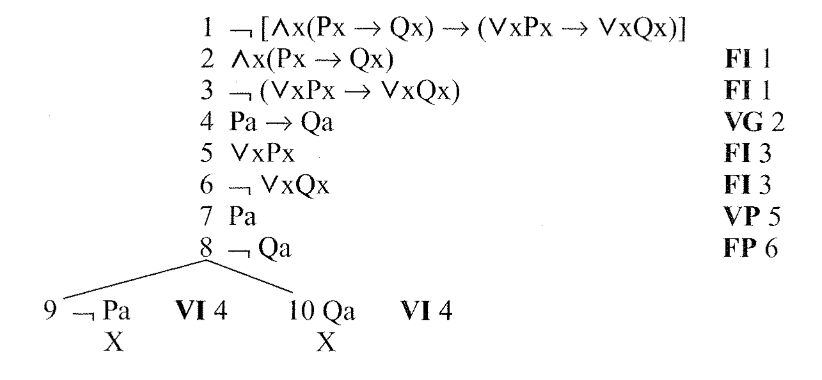
Solución

1	$\neg (\bigwedge x Px \rightarrow \bigvee x Px)$	
2	$\bigwedge x Px$	**FI** 1
3	$\neg \bigvee x Px$	**FI** 1
4	Pa	**VG** 2
5	$\neg Pa$	**FP** 4
	X	

Ejercicio 3.º Decidir la validez lógica de la fórmula

$$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\bigvee x Px \rightarrow \bigvee x Qx)$$ [11]

Solución



Ejercicio 4.º Decidir la validez lógica de la fórmula:

$$\bigvee x(Px \wedge Qx) \rightarrow \bigvee x Px \vee \bigvee x Qx$$ [12]

[11] Esta fórmula es una ley de distribución de generalizador en implicación (véase, más adelante, § 14).

[12] Esta fórmula es la ley de distribución del particularizador de conjunción en disyunción (véase, más adelante, § 14).

Solución

1	$\neg(\bigvee x(Px \wedge Qx) \rightarrow \bigvee xPx \vee \bigvee xQx)$	
2	$\bigvee x(Px \wedge Qx)$	**FI** 1
3	$\neg(\bigvee xPx \vee \bigvee xQx)$	**FI** 1
4	$Pa \wedge Qa$	**VP** 2
5	Pa	**VC** 4
6	Qa	**VC** 4
7	$\neg \bigvee xPx$	**FD** 3
8	$\neg Pa$	**FP** 7
	X	

*C. LEYES DE DISTRIBUCIÓN

§ 12. *Introducción*

En este apartado se tratará de la exposición y fundamentación de una serie de leyes de lógica cuantificacional monádica. Cada una de ellas será considerada como un teorema de lógica. Su demostración se efectuará de acuerdo con las reglas de cálculo establecidas en el apartado A de este mismo capítulo y, por supuesto, de acuerdo también con las reglas del cálculo de conectores.

Una lectura detenida de este apartado no es necesaria para la comprensión de los capítulos que siguen. A tal efecto, bastará tan sólo una revisión de las leyes y del comentario sobre la estructura de las mismas que se expone al principio de cada sección [13].

[13] Al lector que desee afianzarse en las técnicas de cálculo se le recomienda, no obstante, el estudio detallado de la fundamentación de cada fórmula. Al tiempo de enriquecer su información teórica, ello le proporcionará el adiestramiento práctico resultante de la realización de un repertorio de ejercicios. Pero también conviene advertir, ya desde ahora, que el conocimiento del principio de dualidad (véanse, más adelante, Cap. XIV, § 4, y Cap. XVIII, § 3) permitirá prescindir de varias de las demostraciones que aquí se exponen.

§ 13. *Leyes de descenso cuantificacional y de mutación de variable ligada*

Comenzaremos por un grupo de leyes de estructura muy simple. La primera de ellas, la ley de descenso cuantificacional, autoriza el paso de lo general a lo particular (presuponiendo, como se indicará con más detalle en el Capítulo X, § 4, la exclusión del dominio vacío en todo el ámbito de la lógica de cuantificadores):

$$\bigwedge xPx \rightarrow \bigvee xPx.$$

Las leyes de mutación de variable:

$$\bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge yPy$$
$$\bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee yPy$$

permiten efectuar cambios de variables ligadas en el interior de una fórmula lo cual, según se verá más tarde, tiene especial utilidad para la realización de operaciones de desplazamiento de cuantificadores.

Ley de descenso cuantificacional

Desc

$\vdash \bigwedge xPx \rightarrow \bigvee xPx$

Demostración

┌ 1	$\bigwedge xPx$	
│ 2	Pa	**EG** 1
└ 3	$\bigvee xPx$	**IP** 2
4	$\bigwedge xPx \rightarrow \bigvee xPx$	**TD** 1-3

Leyes de mutación alfabética de variable

MV

$\vdash \bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge yPy$

Demostración

┌ 1	$\bigwedge xPx$	
│ 2	Pa	**EG** 1
└ 3	$\bigwedge yPy$	**IG** 2
4	$\bigwedge xPx \rightarrow \bigwedge yPy$	**TD** 1-3
┌ 5	$\bigwedge yPy$	
│ 6	Pa	**EG** 5
└ 7	$\bigwedge xPx$	**IG** 6
8	$\bigwedge yPy \rightarrow \bigwedge xPx$	**TD** 5-7
9	$\bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge yPy$	**ICO** 4,8

MV

$\vdash \bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee yPy$

Demostración

1	$\bigvee xPx$		6	$\bigvee yPy$	
2	Pa		7	Pa	
3	$\bigvee yPy$	**IP** 2	8	$\bigvee xPx$	**IP** 7
4	$\bigvee yPy$	**EP** 1, 2-3	9	$\bigvee xPx$	**EP** 6, 7-8
5	$\bigvee xPx \rightarrow \bigvee yPy$	**TD** 1-4	10	$\bigvee yPy \rightarrow \bigvee xPx$	**TD** 6-9

11 $\bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee yPy$ **ICO** 5, 10

Algunos sistemas mencionan también las llamadas *leyes de cuantificación vacua*

$$\bigwedge xA \leftrightarrow A$$
$$\bigvee xA \leftrightarrow A,$$

sujetas a la condición crítica de que A no contenga libre a x. Su demostración es trivial en esos sistemas.

§ 14. *Leyes de distribución de cuantificadores*

Los cuantificadores pueden ser inmediatamente trasladados desde el exterior hacia el interior, como también del interior al exterior de determinadas fórmulas, sin que se altere lógicamente el posible significado de las mismas, merced a una abigarrada serie de leyes de distribución. El conocimiento de estas leyes es muy útil con vistas al cálculo, porque permite cambiar considerablemente y de diversos modos, según convenga en el curso de las deducciones, la estructura de una fórmula.

El esquema general de una ley de distribución cuantificacional es el de una implicación, o eventualmente una coimplicación, que vincula, en uno u otro sentido, un enunciado complejo en forma compacta (prefijo cuantificacional fuera de paréntesis) con la forma distribuida del mismo (prefijo cuantificacional directamente adosado a los componentes).

En esta sección consideraremos unas cuantas leyes distributivas que podemos agrupar convencionalmente así:

A. Distribución de cuantificadores en conjunción

$$\bigwedge x(Px \wedge Qx) \leftrightarrow \bigwedge xPx \wedge \bigwedge xQx$$
$$\bigvee x(Px \wedge Qx) \rightarrow \bigvee xPx \wedge \bigvee xQx$$
$$\bigvee xPx \wedge \bigwedge xQx \rightarrow \bigvee x(Px \wedge Qx)$$

B. Distribución de cuantificadores en disyunción

$$\bigvee x(Px \vee Qx) \leftrightarrow \bigvee xPx \vee \bigvee xQx$$
$$\bigwedge xPx \vee \bigwedge xQx \rightarrow \bigwedge x(Px \vee Qx)$$
$$\bigwedge x(Px \vee Qx) \rightarrow \bigwedge xPx \vee \bigvee xQx$$

C. Distribución de cuantificadores en implicación

$$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\bigwedge xPx \rightarrow \bigwedge xQx)$$
$$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\bigvee xPx \rightarrow \bigvee xQx)$$
$$\bigvee x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\bigwedge xPx \rightarrow \bigvee xQx)$$
$$(\bigvee xPx \rightarrow \bigvee xQx) \rightarrow \bigvee x(Px \rightarrow Qx)$$

D. Distribución de cuantificadores en coimplicación

$$\bigwedge x(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge xQx)$$
$$\bigwedge x(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee xQx)$$

A continuación sigue la deducción de cada una de estas leyes.

Ley de distribución de generalizador en conjunción

DGC

$\vdash \bigwedge x(Px \wedge Qx) \leftrightarrow \bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge xQx$

Demostración

1	$\bigwedge x(Px \wedge Qx)$	
2	$Pa \wedge Qa$	**EG** 1
3	Pa	**Simp**$_1$ 2
4	$\bigwedge xPx$	**IG** 3
5	Qa	**Simp**$_2$ 2
6	$\bigwedge xQx$	**IG** 5
7	$\bigwedge xPx \wedge \bigwedge xQx$	**Prod** 4, 6
8	$\bigwedge x(Px \wedge Qx) \rightarrow \bigwedge xPx \wedge \bigwedge xQx$	**TD** 1-7

9	$\bigwedge xPx \wedge \bigwedge xQx$	
10	$\bigwedge xPx$	**Simp$_1$** 9
11	Pa	**EG** 10
12	$\bigwedge xQx$	**Simp$_2$** 9
13	Qa	**EG** 12
14	$Pa \wedge Qa$	**Prod** 11, 13
15	$\bigwedge x(Px \wedge Qx)$	**IG** 14
16	$\bigwedge xPx \wedge \bigwedge xQx \rightarrow \bigwedge x(Px \wedge Qx)$	**TD** 9-15
17	$\bigwedge x(Px \wedge Qx) \leftrightarrow \bigwedge xPx \wedge \bigwedge xQx)$	**ICO** 8, 16

Leyes de distribución de particularizador en conjunción

DPC$_1$

$\vdash \bigvee x(Px \wedge Qx) \rightarrow \bigvee xPx \wedge \bigvee xQx$

Demostración

1	$\bigvee x(Px \wedge Qx)$	
2	$Pa \wedge Qa$	
3	Pa	**Simp$_1$** 2
4	$\bigvee xPx$	**IP** 3
5	Qa	**Simp$_2$** 2
6	$\bigvee xQx$	**IP** 5
7	$\bigvee xPx \wedge \bigvee xQx$	**Prod** 4, 6
8	$\bigvee xPx \wedge \bigvee xQx$	**EP** 1, 2-7
9	$\bigvee x(Px \wedge Qx) \rightarrow \bigvee xPx \wedge \bigvee xQx$	**TD** 1-8

DPC$_2$

$\vdash \bigvee xPx \wedge \bigwedge xQx \rightarrow \bigvee x(Px \wedge Qx)$

Demostración

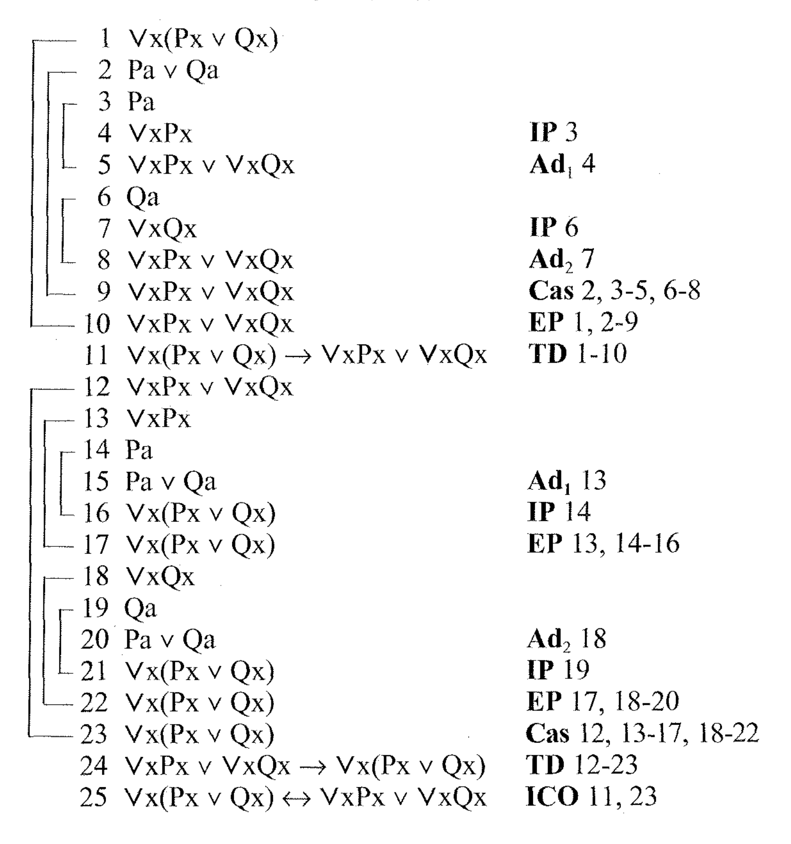
1	$\bigvee xPx \wedge \bigwedge xQx$	
2	$\bigwedge xQx$	**Simp$_2$** 1
3	Qa	**EG** 2
4	$\bigvee xPx$	**Simp$_1$** 1
5	Pa	
6	$Pa \wedge Qa$	**Prod** 5, 3
7	$\bigvee x(Px \wedge Qx)$	**IP** 6
8	$\bigvee x(Px \wedge Qx)$	**EP** 4, 5-7
9	$\bigvee xPx \wedge \bigwedge xQx \rightarrow \bigvee x(Px \wedge Qx)$	**TD** 1-8

Ley de distribución de particularizador en disyunción

DPD

⊢ ⋁x(Px ∨ Qx) ↔ ⋁xPx ∨ ⋁xQx

Demostración



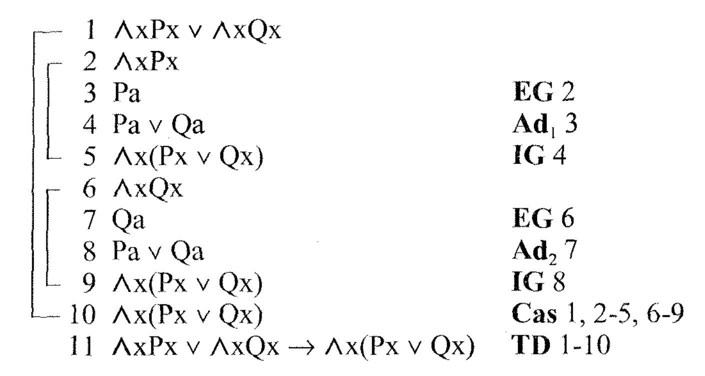
1	⋁x(Px ∨ Qx)	
2	Pa ∨ Qa	
3	Pa	
4	⋁xPx	**IP** 3
5	⋁xPx ∨ ⋁xQx	**Ad**$_1$ 4
6	Qa	
7	⋁xQx	**IP** 6
8	⋁xPx ∨ ⋁xQx	**Ad**$_2$ 7
9	⋁xPx ∨ ⋁xQx	**Cas** 2, 3-5, 6-8
10	⋁xPx ∨ ⋁xQx	**EP** 1, 2-9
11	⋁x(Px ∨ Qx) → ⋁xPx ∨ ⋁xQx	**TD** 1-10
12	⋁xPx ∨ ⋁xQx	
13	⋁xPx	
14	Pa	
15	Pa ∨ Qa	**Ad**$_1$ 13
16	⋁x(Px ∨ Qx)	**IP** 14
17	⋁x(Px ∨ Qx)	**EP** 13, 14-16
18	⋁xQx	
19	Qa	
20	Pa ∨ Qa	**Ad**$_2$ 18
21	⋁x(Px ∨ Qx)	**IP** 19
22	⋁x(Px ∨ Qx)	**EP** 17, 18-20
23	⋁x(Px ∨ Qx)	**Cas** 12, 13-17, 18-22
24	⋁xPx ∨ ⋁xQx → ⋁x(Px ∨ Qx)	**TD** 12-23
25	⋁x(Px ∨ Qx) ↔ ⋁xPx ∨ ⋁xQx	**ICO** 11, 23

Leyes de distribución de generalizador en disyunción

DGD$_1$

$\vdash \bigwedge x Px \vee \bigwedge x Qx \rightarrow \bigwedge x(Px \vee Qx)$

Demostración



1	$\bigwedge x Px \vee \bigwedge x Qx$	
2	$\bigwedge x Px$	
3	Pa	**EG** 2
4	$Pa \vee Qa$	**Ad$_1$** 3
5	$\bigwedge x(Px \vee Qx)$	**IG** 4
6	$\bigwedge x Qx$	
7	Qa	**EG** 6
8	$Pa \vee Qa$	**Ad$_2$** 7
9	$\bigwedge x(Px \vee Qx)$	**IG** 8
10	$\bigwedge x(Px \vee Qx)$	**Cas** 1, 2-5, 6-9
11	$\bigwedge x Px \vee \bigwedge x Qx \rightarrow \bigwedge x(Px \vee Qx)$	**TD** 1-10

DGD$_2$

$\vdash \bigwedge x(Px \vee Qx) \rightarrow \bigwedge x Px \vee \bigvee x Qx$

Demostración [14]

1	$\bigwedge x(Px \vee Qx)$	
2	$Pa \vee Qa$	**EG** 1
3	$\bigvee x Qx \vee \neg \bigvee x Qx$	**PTE**
4	$\bigvee x Qx$	
5	$\bigwedge x Px \vee \bigvee x Qx$	**Ad$_2$** 4
6	$\neg \bigvee x Qx$	
7	$\bigwedge x \neg Qx$	**NP** 6
8	$\neg Qa$	**EG** 7
9	Pa	**SD$_1$** 2, 8
10	$\bigwedge x Px$	**IG** 9
11	$\bigwedge x Px \vee \bigvee x Qx$	**Ad$_1$** 10
12	$\bigwedge x Px \vee \bigvee x Qx$	**Cas** 3, 4-5, 6-11
13	$\bigwedge x(Px \vee Qx) \rightarrow \bigwedge x Px \vee \bigvee x Qx$	**TD** 1-12

[14] Debo a Rafael Beneyto el descubrimiento de un fallo que invalidaba la prueba de DGD$_2$ en la primera edición de este libro. Suya es, además, esta nueva prueba.

Leyes de distribución de generalizador en implicación

$\mathbf{DGI_1}$

$$\vdash \wedge x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\wedge xPx \rightarrow \wedge xQx)$$

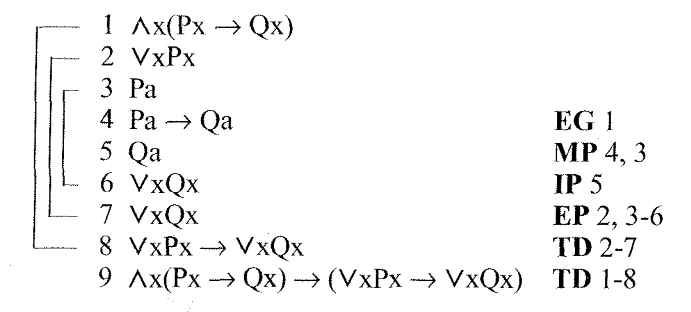
Demostración

1	$\wedge x(Px \rightarrow Qx)$	
2	$\wedge xPx$	
3	$Pa \rightarrow Qa$	**EG** 1
4	Pa	**EG** 2
5	Qa	**MP** 3, 4
6	$\wedge xQx$	**IG** 5
7	$\wedge xPx \rightarrow \wedge xQx$	**TD** 2-6
8	$\wedge x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\wedge xPx \rightarrow \wedge xQx)$	**TD** 1-7

$\mathbf{DGI_2}$

$$\vdash \wedge x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\vee xPx \rightarrow \vee xQx)$$

Demostración



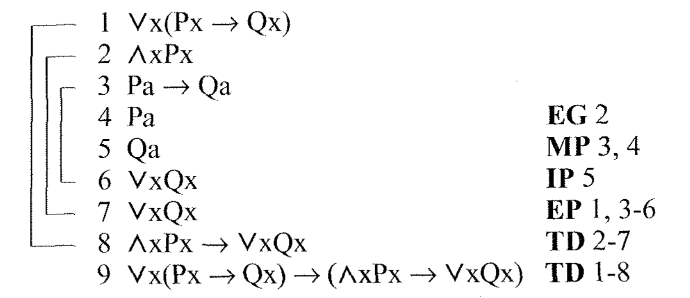
1	$\wedge x(Px \rightarrow Qx)$	
2	$\vee xPx$	
3	Pa	
4	$Pa \rightarrow Qa$	**EG** 1
5	Qa	**MP** 4, 3
6	$\vee xQx$	**IP** 5
7	$\vee xQx$	**EP** 2, 3-6
8	$\vee xPx \rightarrow \vee xQx$	**TD** 2-7
9	$\wedge x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\vee xPx \rightarrow \vee xQx)$	**TD** 1-8

Leyes de distribución de particularizador en implicación

DPI$_1$

$\vdash \bigvee x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\bigwedge xPx \rightarrow \bigvee xQx)$

Demostración



1	$\bigvee x(Px \rightarrow Qx)$	
2	$\bigwedge xPx$	
3	$Pa \rightarrow Qa$	
4	Pa	**EG** 2
5	Qa	**MP** 3, 4
6	$\bigvee xQx$	**IP** 5
7	$\bigvee xQx$	**EP** 1, 3-6
8	$\bigwedge xPx \rightarrow \bigvee xQx$	**TD** 2-7
9	$\bigvee x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\bigwedge xPx \rightarrow \bigvee xQx)$	**TD** 1-8

DPI$_2$

$\vdash (\bigvee xPx \rightarrow \bigvee xQx) \rightarrow \bigvee x(Px \rightarrow Qx)$

Demostración

1	$\bigvee xPx \rightarrow \bigvee xQx$	
2	$\neg \bigvee x(Px \rightarrow Qx)$	
3	$\bigwedge x\neg(Px \rightarrow Qx)$	**NP** 2
4	$\neg(Pa \rightarrow Qa)$	**EG** 3
5	$\neg\neg(Pa \wedge \neg Qa)$	**I DI$_1$** 4
6	$Pa \wedge \neg Qa$	**DN** 5
7	Pa	**Simpl$_1$** 6
8	$\bigvee xPx$	**IP** 7
9	$\bigvee xPx \vee \bigvee xQx$	**MP** 1, 8
10	$\neg\bigwedge x\neg Qx$	**DP** 9
11	$\neg Qa$	**Simpl$_2$** 6
12	$\bigwedge x\neg Qx$	**IG** 7
13	$\bigwedge x\neg Qx \bigwedge \neg\bigwedge x\neg Qx$	**Prod** 12, 10
14	$\neg\neg\bigvee x(Px \rightarrow Ox)$	**Abs** 2-13
15	$\bigvee x(Px \rightarrow Qx)$	**DN** 14
16	$(\bigvee xPx \rightarrow \bigvee xQx) \rightarrow \bigvee x(Px \rightarrow Qx)$	**TD** 1-15

Leyes de distribución de generalizador en coimplicación

DGCo$_1$

$\vdash \wedge x(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\wedge xPx \leftrightarrow \wedge xQx)$

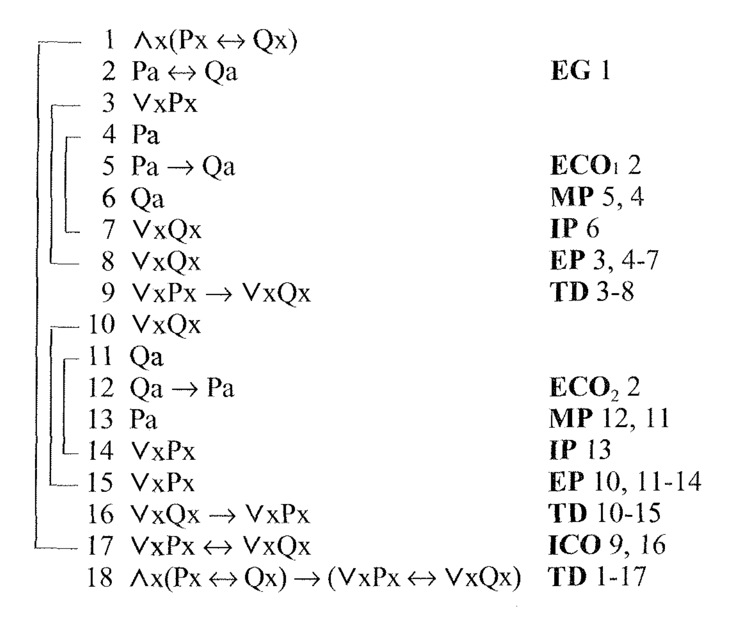
Demostración

1	$\wedge x(Px \leftrightarrow Qx)$	
2	$Pa \leftrightarrow Qa$	**EG** 1
3	$\wedge xPx$	
4	$Pa \rightarrow Qa$	**ECO$_1$** 2
5	Pa	**EG** 3
6	Qa	**MP** 4, 5
7	$\wedge xQx$	**IG** 6
8	$\wedge xPx \rightarrow \wedge xQx$	**TD** 3-7
9	$\wedge xQx$	
10	$Qa \rightarrow Pa$	**ECO$_2$** 2
11	Qa	**EG** 9
12	Pa	**MP** 10, 11
13	$\wedge xPx$	**IG** 12,
14	$\wedge xQx \rightarrow \wedge xPx$	**TD** 9-13
15	$\wedge xPx \leftrightarrow \wedge xQx$	**ICO** 8, 14
16	$\wedge x(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\wedge xPx \leftrightarrow \wedge xQx)$	**TD** 1-15

DGCo$_2$

$\vdash \wedge x(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\vee xPx \leftrightarrow \vee xQx)$

Demostración



1	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow Qx)$	
2	$Pa \leftrightarrow Qa$	**EG** 1
3	$\bigvee xPx$	
4	Pa	
5	$Pa \rightarrow Qa$	**ECO**$_1$ 2
6	Qa	**MP** 5, 4
7	$\bigvee xQx$	**IP** 6
8	$\bigvee xQx$	**EP** 3, 4-7
9	$\bigvee xPx \rightarrow \bigvee xQx$	**TD** 3-8
10	$\bigvee xQx$	
11	Qa	
12	$Qa \rightarrow Pa$	**ECO**$_2$ 2
13	Pa	**MP** 12, 11
14	$\bigvee xPx$	**IP** 13
15	$\bigvee xPx$	**EP** 10, 11-14
16	$\bigvee xQx \rightarrow \bigvee xPx$	**TD** 10-15
17	$\bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee xQx$	**ICO** 9, 16
18	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee xQx)$	**TD** 1-17

§ 15. *Otras leyes de distribución cuantificacional*

He aquí finalmente otro grupo de leyes de distribución cuantificacional para conjunción

$$A \wedge \bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge x(A \wedge Px)$$
$$A \wedge \bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee x(A \wedge Px)$$

para disyunción

$$A \vee \bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge x(A \vee Px)$$
$$A \vee \bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee x(A \vee Px)$$

y para implicación

$$(A \rightarrow \bigwedge xPx) \leftrightarrow \bigwedge x(A \rightarrow Px)$$
$$(\bigvee xPx \rightarrow A) \leftrightarrow \bigwedge x(Px \rightarrow A)$$

$$(A \rightarrow \bigvee xPx) \leftrightarrow \bigvee x(A \rightarrow Px)$$
$$(\bigwedge xPx \rightarrow A) \leftrightarrow \bigvee x(Px \rightarrow A)$$

a las que podemos llamar *condicionales* porque han de sujetarse a la condición de que x no esté libre en A. Eventualmente, nos referiremos a ellas mediante la común etiqueta **Dist**.

Distribución de generalizador en conjunción

$$\vdash A \wedge \bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge x(A \wedge Px)$$

Demostración

1	$A \wedge \bigwedge xPx$	
2	A	**Simp**$_1$ 1
3	$\bigwedge xPx$	**Simp**$_2$ 1
4	Pa	**EG** 3
5	$A \wedge Pa$	**Prod** 2, 4
6	$\bigwedge x(A \wedge Px)$	**IG** 5
7	$A \wedge \bigwedge xPx \rightarrow \bigwedge x(A \wedge Px)$	**TD** 1-6
8	$\bigwedge x(A \wedge Px)$	
9	$A \wedge Pa$	**EG** 8
10	A	**Simp**$_1$ 9
11	Pa	**Simp**$_2$ 10
12	$\bigwedge xPx$	**IG** 11
13	$A \wedge \bigwedge xPx$	**Prod** 10, 12
14	$\bigwedge x(A \wedge Px) \rightarrow A \wedge \bigwedge xPx$	**TD** 8-13
15	$A \wedge \bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge x(A \wedge Px)$	**ICO** 7, 14

Distribución de particularizador en conjunción

$$\vdash A \wedge \bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee x(A \wedge Px)$$

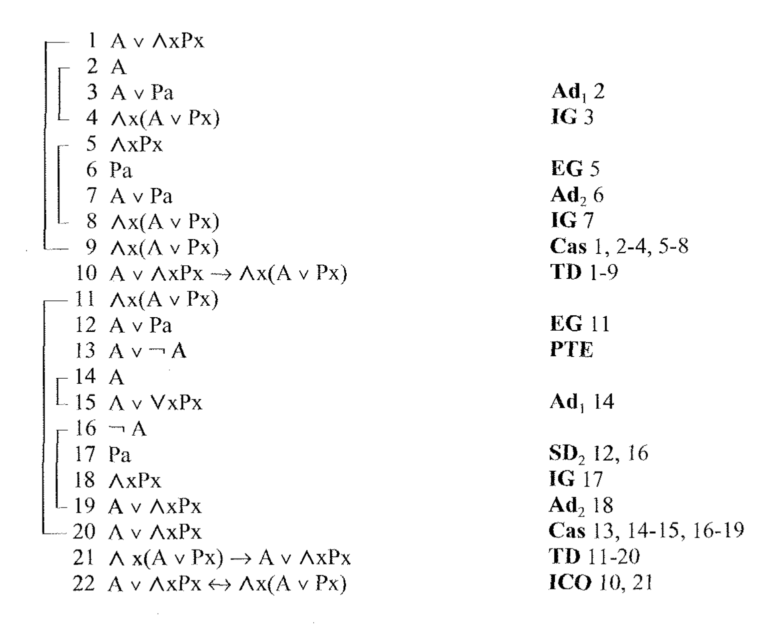
Demostración

1	$A \wedge \bigvee xPx$	
2	A	**Simp**$_1$ 1
3	$\bigvee xPx$	**Simp**$_2$ 1
4	Pa	
5	$A \wedge Pa$	**Prod** 2, 4
6	$\bigvee x(A \wedge Px)$	**IP** 5
7	$\bigvee x(A \wedge Px)$	**EP** 3, 4-6
8	$A \wedge \bigvee xPx \rightarrow \bigvee x(A \wedge Px)$	**TD** 1-7
9	$\bigvee x(A \wedge Px)$	
10	$A \wedge Pa$	
11	A	**Simp**$_1$ 10
12	Pa	**Simp**$_2$ 10
13	$\bigvee xPx$	**IP** 12
14	$A \wedge \bigvee xPx$	**Prod** 11, 13
15	$A \wedge \bigvee xPx$	**EP** 9, 10-13
16	$\bigvee x(A \wedge Px) \rightarrow A \wedge \bigvee xPx$	**TD** 9-15
17	$A \wedge \bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee x(A \wedge Px)$	**ICO** 8, 16

Distribución de generalizador en disyunción [16]

$$\vdash A \vee \bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge x(A \vee Px)$$

Demostración

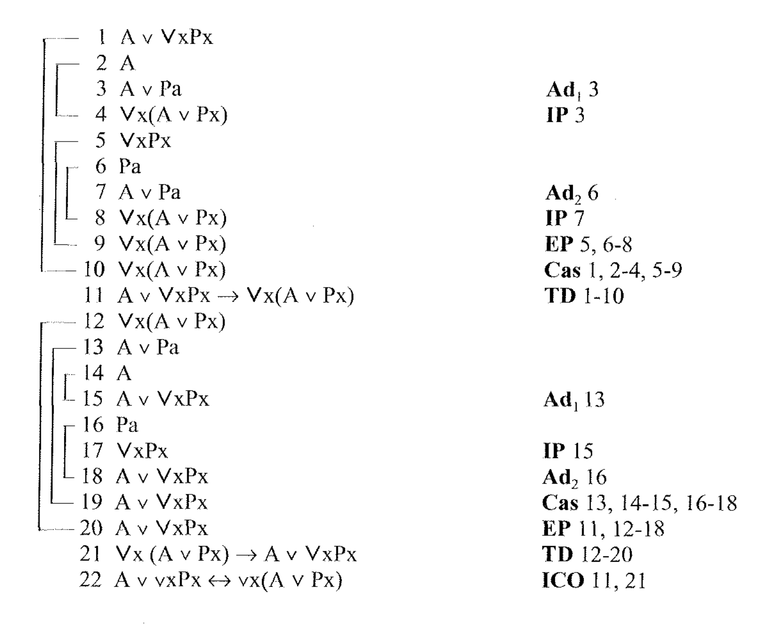


1	$A \vee \bigwedge xPx$	
2	A	
3	$A \vee Pa$	**Ad_1** 2
4	$\bigwedge x(A \vee Px)$	**IG** 3
5	$\bigwedge xPx$	
6	Pa	**EG** 5
7	$A \vee Pa$	**Ad_2** 6
8	$\bigwedge x(A \vee Px)$	**IG** 7
9	$\bigwedge x(A \vee Px)$	**Cas** 1, 2-4, 5-8
10	$A \vee \bigwedge xPx \rightarrow \bigwedge x(A \vee Px)$	**TD** 1-9
11	$\bigwedge x(A \vee Px)$	
12	$A \vee Pa$	**EG** 11
13	$A \vee \neg A$	**PTE**
14	A	
15	$A \vee \bigvee xPx$	**Ad_1** 14
16	$\neg A$	
17	Pa	**SD_2** 12, 16
18	$\bigwedge xPx$	**IG** 17
19	$A \vee \bigwedge xPx$	**Ad_2** 18
20	$A \vee \bigwedge xPx$	**Cas** 13, 14-15, 16-19
21	$\bigwedge x(A \vee Px) \rightarrow A \vee \bigwedge xPx$	**TD** 11-20
22	$A \vee \bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge x(A \vee Px)$	**ICO** 10, 21

Distribución de particularizador en disyunción

$$\vdash A \vee \bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee x(A \vee Px)$$

[16] Agradezco a Jaime Sarabia la corrección de un error en esta demostración, como también la reelaboración de las dos últimas de este capítulo.



Demostración

1	$A \vee \bigvee xPx$	
2	A	
3	$A \vee Pa$	**Ad**$_1$ 3
4	$\bigvee x(A \vee Px)$	**IP** 3
5	$\bigvee xPx$	
6	Pa	
7	$A \vee Pa$	**Ad**$_2$ 6
8	$\bigvee x(A \vee Px)$	**IP** 7
9	$\bigvee x(A \vee Px)$	**EP** 5, 6-8
10	$\bigvee x(A \vee Px)$	**Cas** 1, 2-4, 5-9
11	$A \vee \bigvee xPx \rightarrow \bigvee x(A \vee Px)$	**TD** 1-10
12	$\bigvee x(A \vee Px)$	
13	$A \vee Pa$	
14	A	
15	$A \vee \bigvee xPx$	**Ad**$_1$ 13
16	Pa	
17	$\bigvee xPx$	**IP** 15
18	$A \vee \bigvee xPx$	**Ad**$_2$ 16
19	$A \vee \bigvee xPx$	**Cas** 13, 14-15, 16-18
20	$A \vee \bigvee xPx$	**EP** 11, 12-18
21	$\bigvee x\,(A \vee Px) \rightarrow A \vee \bigvee xPx$	**TD** 12-20
22	$A \vee \vee xPx \leftrightarrow \vee x(A \vee Px)$	**ICO** 11, 21

Distribución de generalizador en implicación

$$\vdash \bigwedge x(A \rightarrow Px) \leftrightarrow (A \rightarrow \bigwedge xPx)$$

Demostración

1	$\bigwedge x(A \rightarrow Px)$	
2	A	
3	$A \rightarrow Pa$	**EG** 1
4	Pa	**MP** 3,2
5	$\bigwedge xPx$	**IG** 4
6	$A \rightarrow \bigwedge xPx$	**TD** 2-5
7	$\bigwedge x(A \rightarrow Px) \rightarrow (A \rightarrow \bigwedge xPx)$	**TD** 1-6
8	$A \rightarrow \bigwedge xPx$	
9	A	
10	$\bigwedge xPx$	**MP** 8, 9
11	Pa	
12	$A \rightarrow Pa$	**TD** 9-11
13	$\bigwedge x(A \rightarrow Px)$	**IG** 12
14	$(A \rightarrow \bigwedge xPx) \rightarrow \bigwedge x(A \rightarrow Px)$	**TD** 8, 13
15	$\bigwedge x(A \rightarrow Px) \leftrightarrow (A \rightarrow \bigwedge xPx)$	**ICO** 7, 14

$$\vdash (\bigvee xPx \rightarrow A) \leftrightarrow \bigwedge x(Px \rightarrow A)$$

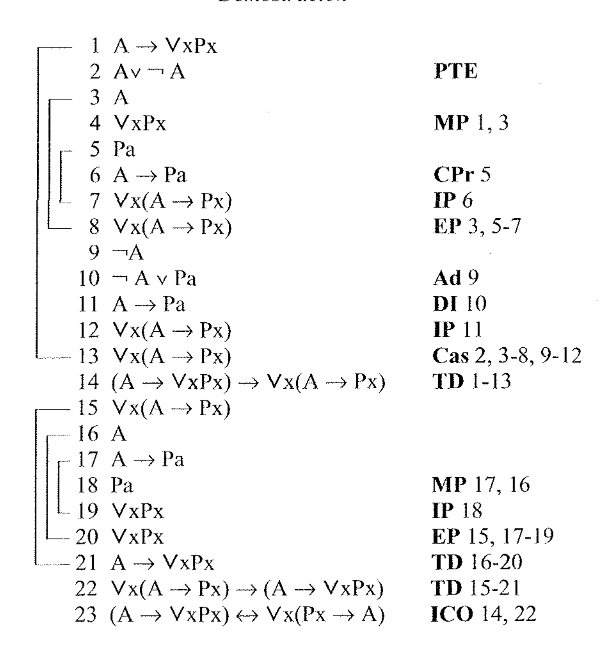
Demostración

1	$\bigvee xPx \rightarrow A$	
2	Pa	
3	$\bigvee xPx$	**IP** 2
4	A	**MP** 1, 3
5	$Pa \rightarrow A$	**TD** 2-4
6	$\bigwedge x(Px \rightarrow A)$	**IG** 5
7	$(\bigvee xPx \rightarrow A) \rightarrow \bigwedge x(Px \rightarrow A)$	**TD** 1-6
8	$\bigwedge x(Px \rightarrow A)$	
9	$\bigvee xPx$	
10	Pa	
11	$Pa \rightarrow A$	**EG** 8
12	A	**MP** 11, 10
13	A	**EP** 9, 10, 12
14	$\bigvee xPx \rightarrow A$	**TD** 9, 13
15	$\bigwedge x(Px \rightarrow A) \rightarrow (\bigvee xPx \rightarrow A)$	**ICO** 8, 14
16	$\bigwedge x(Px \rightarrow A) \leftrightarrow (\bigvee xPx \rightarrow A)$	**ICO** 7, 15

Distribución de particularizador en implicación

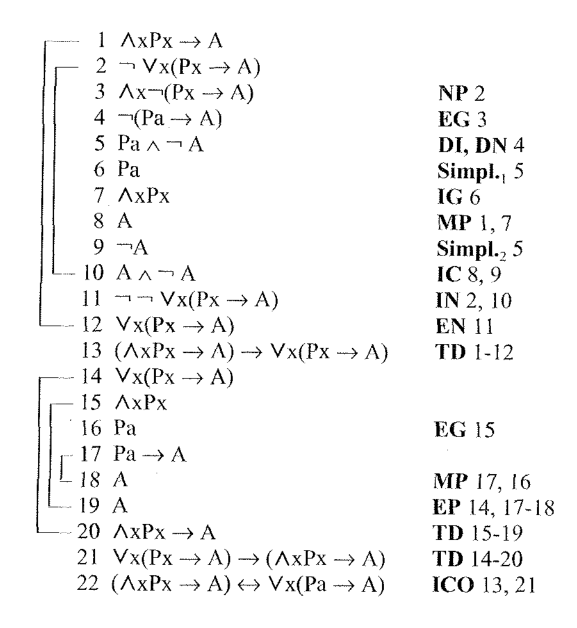
$$\vdash (A \rightarrow \bigvee xPx) \leftrightarrow \bigvee x(A \rightarrow Px)$$

Demostración



1	$A \rightarrow \bigvee xPx$	
2	$A \vee \neg A$	**PTE**
3	A	
4	$\bigvee xPx$	**MP** 1, 3
5	Pa	
6	$A \rightarrow Pa$	**CPr** 5
7	$\bigvee x(A \rightarrow Px)$	**IP** 6
8	$\bigvee x(A \rightarrow Px)$	**EP** 3, 5-7
9	$\neg A$	
10	$\neg A \vee Pa$	**Ad** 9
11	$A \rightarrow Pa$	**DI** 10
12	$\bigvee x(A \rightarrow Px)$	**IP** 11
13	$\bigvee x(A \rightarrow Px)$	**Cas** 2, 3-8, 9-12
14	$(A \rightarrow \bigvee xPx) \rightarrow \bigvee x(A \rightarrow Px)$	**TD** 1-13
15	$\bigvee x(A \rightarrow Px)$	
16	A	
17	$A \rightarrow Pa$	
18	Pa	**MP** 17, 16
19	$\bigvee xPx$	**IP** 18
20	$\bigvee xPx$	**EP** 15, 17-19
21	$A \rightarrow \bigvee xPx$	**TD** 16-20
22	$\bigvee x(A \rightarrow Px) \rightarrow (A \rightarrow \bigvee xPx)$	**TD** 15-21
23	$(A \rightarrow \bigvee xPx) \leftrightarrow \bigvee x(Px \rightarrow A)$	**ICO** 14, 22

$\vdash (\bigwedge x Px \rightarrow A) \leftrightarrow \bigvee x(Px \rightarrow A)$



Demostración

1	$\bigwedge x Px \rightarrow A$	
2	$\neg \bigvee x(Px \rightarrow A)$	
3	$\bigwedge x \neg(Px \rightarrow A)$	**NP** 2
4	$\neg(Pa \rightarrow A)$	**EG** 3
5	$Pa \wedge \neg A$	**DI, DN** 4
6	Pa	**Simpl.**$_1$ 5
7	$\bigwedge x Px$	**IG** 6
8	A	**MP** 1, 7
9	$\neg A$	**Simpl.**$_2$ 5
10	$A \wedge \neg A$	**IC** 8, 9
11	$\neg \neg \bigvee x(Px \rightarrow A)$	**IN** 2, 10
12	$\bigvee x(Px \rightarrow A)$	**EN** 11
13	$(\bigwedge x Px \rightarrow A) \rightarrow \bigvee x(Px \rightarrow A)$	**TD** 1-12
14	$\bigvee x(Px \rightarrow A)$	
15	$\bigwedge x Px$	
16	Pa	**EG** 15
17	$Pa \rightarrow A$	
18	A	**MP** 17, 16
19	A	**EP** 14, 17-18
20	$\bigwedge x Px \rightarrow A$	**TD** 15-19
21	$\bigvee x(Px \rightarrow A) \rightarrow (\bigwedge x Px \rightarrow A)$	**TD** 14-20
22	$(\bigwedge x Px \rightarrow A) \leftrightarrow \bigvee x(Pa \rightarrow A)$	**ICO** 13, 21

CAPÍTULO X

SILOGÍSTICA

§ 1. *La proposición categórica*

En capítulos anteriores se explicó intuitivamente el fenómeno de la cuantificación, como la aplicación de las partículas «todo» o «alguno» a las funciones proposicionales, que son esquemas vacíos de enunciados. El mecanismo de tal aplicación queda manifiesto cuando se parte de la base de una función proposicional de estructura muy simple. Así, por ejemplo el enunciado

Alguno está herido

es susceptible de ser entendido como la clausura, mediante la partícula «alguno», de la función proposicional «*x* está herido» (que es el esquema vacío de un enunciado atómico).

Pero también puede suceder que la partícula de cuantificación cierre simultáneamente dos esquemas de enunciado atómico (como asimismo puede cerrar, en principio, funciones proposicionales de mayor grado de complejidad). Así, por ejemplo, el enunciado

Algún soldado está herido

puede ser explicado como la cuantificación simultánea de dos esquemas yuxtapuestos de enunciado atómico: «*x* es soldado», «*x* está herido». Análogamente la proposición

Todo hombre es mortal

puede ser entendida como la aplicación de la partícula «todo» a una matriz compuesta de los predicados: «*x* es hombre», «*x* es mortal».

Las proposiciones consistentes en la cuantificación simultánea de dos predicados combinados entre sí, de esa o parecida forma, son tradicionalmente llamadas *proposiciones categóricas* [1].

---

[1] La teoría tradicional de la proposición categórica es una pieza clave de la teoría tradicional del silogismo. Durante mucho tiempo los lógicos han considerado la pro-

$\vdash (\bigwedge xPx \rightarrow A) \leftrightarrow \bigvee x(Px \rightarrow A)$

Demostración

1	$\bigwedge xPx \rightarrow A$	
2	$\neg \bigvee x(Px \rightarrow A)$	
3	$\bigwedge x \neg (Px \rightarrow A)$	**NP** 2
4	$\neg (Pa \rightarrow A)$	**EG** 3
5	$Pa \wedge \neg A$	**DI, DN** 4
6	Pa	**Simpl.**$_1$ 5
7	$\bigwedge xPx$	**IG** 6
8	A	**MP** 1, 7
9	$\neg A$	**Simpl.**$_2$ 5
10	$A \wedge \neg A$	**IC** 8, 9
11	$\neg \neg \bigvee x(Px \rightarrow A)$	**IN** 2, 10
12	$\bigvee x(Px \rightarrow A)$	**EN** 11
13	$(\bigwedge xPx \rightarrow A) \rightarrow \bigvee x(Px \rightarrow A)$	**TD** 1-12
14	$\bigvee x(Px \rightarrow A)$	
15	$\bigwedge xPx$	
16	Pa	**EG** 15
17	$Pa \rightarrow A$	
18	A	**MP** 17, 16
19	A	**EP** 14, 17-18
20	$\bigwedge xPx \rightarrow A$	**TD** 15-19
21	$\bigvee x(Px \rightarrow A) \rightarrow (\bigwedge xPx \rightarrow A)$	**TD** 14-20
22	$(\bigwedge xPx \rightarrow A) \leftrightarrow \bigvee x(Pa \rightarrow A)$	**ICO** 13, 21

CAPÍTULO X

SILOGÍSTICA

§ 1. *La proposición categórica*

En capítulos anteriores se explicó intuitivamente el fenómeno de la cuantificación, como la aplicación de las partículas «todo» o «alguno» a las funciones proposicionales, que son esquemas vacíos de enunciados. El mecanismo de tal aplicación queda manifiesto cuando se parte de la base de una función proposicional de estructura muy simple. Así, por ejemplo el enunciado

Alguno está herido

es susceptible de ser entendido como la clausura, mediante la partícula «alguno», de la función proposicional «x está herido» (que es el esquema vacío de un enunciado atómico).

Pero también puede suceder que la partícula de cuantificación cierre simultáneamente dos esquemas de enunciado atómico (como asimismo puede cerrar, en principio, funciones proposicionales de mayor grado de complejidad). Así, por ejemplo, el enunciado

Algún soldado está herido

puede ser explicado como la cuantificación simultánea de dos esquemas yuxtapuestos de enunciado atómico: «x es soldado», «x está herido». Análogamente la proposición

Todo hombre es mortal

puede ser entendida como la aplicación de la partícula «todo» a una matriz compuesta de los predicados: «x es hombre», «x es mortal».

Las proposiciones consistentes en la cuantificación simultánea de dos predicados combinados entre sí, de esa o parecida forma, son tradicionalmente llamadas *proposiciones categóricas* [1].

---

[1] La teoría tradicional de la proposición categórica es una pieza clave de la teoría tradicional del silogismo. Durante mucho tiempo los lógicos han considerado la pro-

Asimismo es tradicional distinguir en las proposiciones categóricas dos términos: *sujeto* y *predicado* [2], simbolizados por las letras S y P; y dividirlas, conforme a la cantidad, en *universales* y *particulares* (según que la partícula de cantidad determinante sea «todo» o «alguno»), y conforme a la cualidad, en *afirmativas* y *negativas* (según que no intervenga o intervenga decisivamente en ellas la partícula «no»). De este doble criterio de clasificación por cantidad y cualidad resultan cuatro tipos de proposición categórica [3], cuyos esquemas tradicionales seguidos de sus respectivas denominaciones se indican a continuación:

Todo S es P (universal afirmativa)
Ningún S es P (universal negativa)
Algún S es P (particular afirmativa)
Algún S no es P (particular negativa)

Para designar abreviadamente a cada uno de estos esquemas se emplean desde muy antiguo, por ese mismo orden, las vocales mayúsculas: A, E, I, O [4].

---

posición categórica como algo irreductible. De hecho se le ha dado también el nombre de «simple», por oposición a la «hipotética» o «compuesta», que es el rótulo que se daba a las proposiciones condicionales y disyuntivas.

Una y otra vez se encuentra en los tratados de lógica tradicional el intento de reducir la proposición hipotética a la categórica. Hoy se piensa más bien a la inversa: no es la lógica de conectores la que sería reducible a la lógica de cuantificadores, sino ésta a aquélla (véase Cap. VIII, § 2).

[2] Dos predicados, diríamos nosotros, de acuerdo con la nomenclatura establecida en el Capítulo II, sección segunda, donde se reservó la palabra «sujeto» exclusivamente para los nombres propios, denotativos de objetos individuales. Según tal nomenclatura, el primer término de la proposición categórica no sería un sujeto, sino también un predicado (puesto que se trata de un nombre común). En el presente capítulo, sin embargo, respetaremos el uso tradicional de la palabra «sujeto», como también el de la palabra «proposición» (que no quedó excluido en nuestra nota 1 del Cap. II). Asimismo denominaremos «términos universales» a los nombres comunes y «términos singulares» a los nombres propios.

[3] Conviene saber que los lógicos medievales incorporaron a la teoría de la proposición categórica el estudio de la proposición singular, en la cual el término sujeto es un nombre propio (término singular). Un ejemplo de proposición singular sería: «Sócrates es mortal». Ni que decir tiene que una proposición singular de esta índole se identifica, para nosotros, con el enunciado atómico, o predicación pura y simple. Pero en lógica tradicional la proposición singular (afirmativa o negativa) es equiparada a la universal (afirmativa o negativa).

[4] El uso de estas abreviaturas se remonta, según PRIOR, a PSELLUS (siglo XI). A, I son vocales de la palabra latina *AffIrmo*, y E, O las de su opuesta *nEgO*.

Los términos de la proposición categórica están enlazados por la cópula «es». El sentido, o cuando menos uno de los principales sentidos, de la misma se estudia en la siguiente sección [5].

A propósito de la cópula y la idea de predicación conviene recordar que ARISTÓTELES utiliza dos tipos, prácticamente intercambiables, de esquemas de enunciados y representa la forma de la proposición categórica unas veces mediante un esquema de tipo «funcional», con el predicado antepuesto: «τὸ A τῷ B ὑπάρχει» (que se traduciría «el predicado A conviene al sujeto B»), mientras que otras recurre a un esquema de tipo «conjuntista»: «A εστι B» (que se traduciría: «el conjunto A está incluido en el conjunto B»).

Con el primero de esos dos esquemas guarda cierta correspondencia nuestra notación «funcional», p. ej. Pa, de los enunciados atómicos. Un criterio distinto, pero igualmente válido, de formalización de dichos enunciados consiste en tomar nota de la intervención de un tercer elemento, *la cópula «es»*, como enlace entre sujeto y predicado. A dicho criterio se ajusta una formalización que tiene su origen en el matemático italiano PEANO, quien designó a la cópula, tomada como significando la pertenencia de un individuo a una clase o conjunto, mediante la letra griega «ε» (inicial de la palabra griega «εστι», que significa «es»). Siendo X la clase de los bolcheviques y a el individuo Lenin, el enunciado atómico «Lenin es bolchevique» se simbolizaría:

$$a \,\varepsilon\, X$$

que se lee: «a pertenece a X» o «a es miembro de X».

Este tipo de formalización es normalmente utilizado en *cálculo de clases* y en *teoría de conjuntos.*

El lector podrá advertir el paralelo que guarda dicho tipo de formalización con el esquema ternario representativo de la forma de las proposiciones: *S est P* (sujeto-cópula-predicado) que ha prevalecido desde BOECIO (siglo VI) en la lógica tradicional.

§ 2. *Los diagramas de Venn para la proposición categórica*

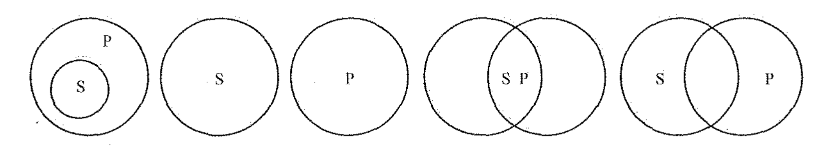
Los términos de la proposición categórica son nombres comunes, como «animal» o «triángulo», que no denotan un individuo de-

---

[5] Algo más sobre el sentido de la cópula puede verse en el Capítulo XII, § 2.

terminado, sino conjuntos o clases de individuos. Cuantitativamente hablando las relaciones estructurales de esos términos dentro de la proposición categórica, representadas por la cópula «es», son de inclusión o exclusión, total o parcial, de un conjunto en otro. Ello puede ilustrarse mediante diagramas.

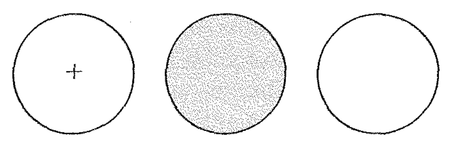
Desde EULER (siglo XVIII), se utilizan círculos para expresar gráficamente tales relaciones: un círculo pequeño dentro de otro mayor sería la imagen normal [6] de «Todo S es P»; dos círculos separados, de «Ningún S es P»; y la intersección de círculos puede servir para representar las dos particulares:



Modernamente, sin embargo, se ha impuesto en los manuales y tratados de lógica formal un nuevo tipo de diagramas, ideado por el lógico inglés John VENN (1834-1923), que se inspira en el cálculo de clases de BOOLE y arroja una imagen distinta y más precisa de la estructura de la proposición categórica.

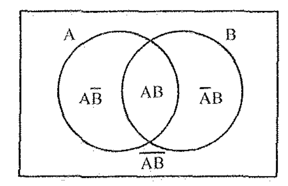
Los diagramas de VENN representan también la extensión de los términos mediante círculos, y mediante intersección de círculos las relaciones de inclusión entre clases. Pero tienen la ventaja de especificar además si la clase de que se trate es o no vacía. Una clase, conjunto o dominio (las tres palabras son aquí sinónimas) es vacía cuando carece realmente de individuos, como sucede, por ejemplo, con el conjunto de los círculos cuadrados o de los hombres de piel azul, y no es vacía en caso contrario. Esta especificación se efectúa representando con una cruz la presencia y mediante un sombreado la ausencia de individuos y dejando en blanco sin más la falta de información al respecto. Así, de estas tres figuras

[6] En la proposición universal afirmativa, lo normal es que la extensión del predicado sea mayor que la extensión del sujeto, como cuando se dice: «todo triángulo es una figura». Pero en determinados casos este tipo de proposición enlaza dos términos de igual extensión, como cuando se dice: «todo triángulo es un polígono de tres lados». El modelo gráfico de estos casos especiales sería un solo círculo, significativo de la superposición de dos concéntricos de igual radio.

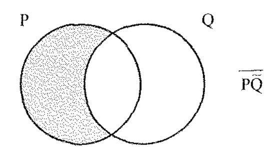


la primera representa un conjunto no vacío, la segunda uno vacío y la tercera otro del que no sabemos si lo está o no.

Por otra parte, la intersección de dos círculos representativos de sendos conjuntos puede ser mejor aprovechada, si se distingue en ella de un modo más explícito y sistemático la zona de intersección, compartida por los individuos de ambos, de las zonas de no intersección, privativas de los individuos de cada uno. Así, por ejemplo, la siguiente figura



describe sistemáticamente las diversas relaciones de extensión entre dos conjuntos P y Q, cada uno de los cuales está representado por un círculo (convengamos además en simbolizar por $\overline{P}$ la clase de las cosas que no pertenecen a P y por $\overline{Q}$ la clase de las cosas que no pertencen a Q). La zona de intersección entre los círculos es la integrada por individuos pertenecientes a ambos conjuntos, lo que se simboliza por la yuxtaposición de las letras PQ. Las zonas de no intersección en los círculos están integradas por los individuos de cada conjunto que no pertenecen al otro: las yuxtaposiciones de letras $P\overline{Q}$, $\overline{P}Q$, simbolizan, respectivamente, los individuos que pertenecen a P pero no a Q, y los que pertenecen a Q, pero no a P. El rectángulo que enmarca a ambos círculos incluye también la denotación del universo de discurso en cuanto habitado por los individuos que ni pertenecen a P ni pertenecen a Q; en símbolos, $\overline{P}\overline{Q}$.



En este esquema se nos da información negativa pero parcial sobre P, pues la zona de no intersección de las clases P y Q está vacía, es decir, no existe ningún individuo que sea P y no sea Q: $P\overline{Q}$. En nuestro lenguaje simbólico de cuantores, ello se expresaría así:

(1) $$\neg \bigvee x(Px \wedge \neg Qx)$$

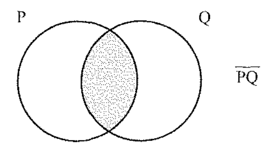
Pero también puede decirse que este esquema «informa» sobre la ausencia de sombreado en la zona de intersección, lo cual permite asegurar, no que hay individuos P que sean Q, pero sí que si los hay, serán Q; esto es: para todo individuo x, si x es P entonces x es Q. En nuestro lenguaje de cuantores ello se simbolizaría así:

(2) $$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$$

La equivalencia entre la formulaciones (1) y (2) se establece en esta cadena:

$$\neg \bigvee x(Px \wedge \neg Qx) \leftrightarrow \neg\neg \bigwedge x \neg (Px \wedge \neg Qx) \quad \textbf{(I DP)} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigwedge x \neg (Px \wedge \neg Qx)\ \textbf{(DN*)} \leftrightarrow \bigwedge x(Px \rightarrow Qx) \quad \textbf{(I DI)}$$

El esquema representativo de la proposición categórica *universal negativa* es



En este esquema se nos da información asimismo negativa sobre la zona de intersección PQ: no existe un individuo que sea P y sea Q. En símbolos:

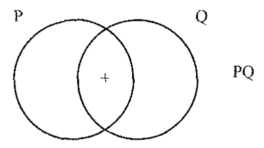
(3) $$\neg \bigvee x(Px \wedge Qx).$$

También podemos explotar, por otra parte, la información sobre ausencia de sombreado en la zona de no intersección de P y afirmar: para todo individuo x: si x es P, entonces x no es Q. En símbolos:

(4) $$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$$

La equivalencia entre (3) y (4) se puede establecer mediante una cadena similar a la anterior.

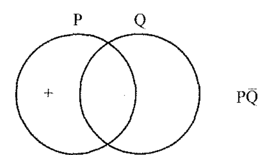
El esquema correspondiente a la proposición *particular afirmativa* es



En este esquema se nos brinda información positiva de existencia respecto a la zona de intersección, lo que se puede formular diciendo que existe algún individuo que es P y es Q. En símbolos:

(5) $$\bigvee x(Px \wedge Qx)$$

Finalmente el esquema correspondiente a la proposición particular negativa da información positiva de existencia sobre la zona de no intersección de P con Q:



lo que se puede formular diciendo que existe algún individuo x que es P y no es Q:

(6) $$\bigvee x(Px \wedge \neg Qx)$$

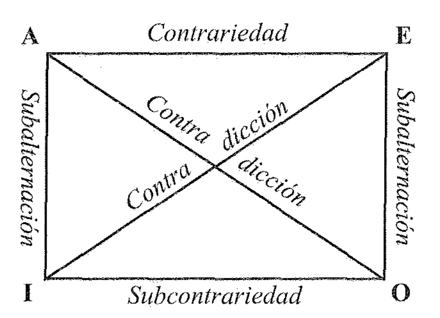
En adelante, pues, traduciremos formalmente así los esquemas tradicionales de proposición categórica:

Todo P es Q,	$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$
Ningún P es Q,	$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$
Algún P es Q	$\bigvee x(Px \wedge Qx)$
Algún P no es Q	$\bigvee x(Px \wedge \neg Qx)$

§ 3. *Teoría de la inferencia inmediata*

La lógica tradicional distingue entre *teoría de la inferencia inmediata*, o deducción de una sola premisa, y *teoría de la inferencia mediata*, o deducción de más de una premisa (esencialmente, el silogismo). La **teoría de la inferencia inmediata** comprende la doctrina de la oposición y de la conversión de las proposiciones, que se resume en esta sección.

Las **relaciones de oposición** se expresan tradicionalmente en el llamado «cuadrado de oposición», cuyos vértices simbolizan las cuatro proposiciones categóricas, y cuyas diagonales y lados representan esas relaciones:



Cada una de dichas relaciones da pie a determinadas inferencias:

1) La *contradicción* es la oposición que se da entre una proposición y su negación, es decir, entre A y O y viceversa, y entre E e I y viceversa. Dos proposiciones contradictorias no pueden ser simultáneamente verdaderas ni simultáneamente falsas. De donde se sigue que si una proposición es verdadera su contradictoria es falsa, y si es falsa su contradictoria es verdadera.

2) La *contrariedad* se da entre las universales: A, E. Dos proposiciones contrarias no pueden ser ambas verdaderas, pero sí ambas falsas (p. ej.: «todo negro es americano», «ningún negro es americano»). De acuerdo con ello, la verdad de una universal implica la falsedad de su contraria, mas no a la inversa.

3) La *subalternación* se da entre universales y particulares de la misma cualidad. Cada universal implica su correspondiente particular, pero no a la inversa. P. ej.: «todos los cuervos son negros» implica «algún cuervo es negro», pero no al revés.

4) La *subcontrariedad* se da entre particulares. Dos subcontrarias pueden ser ambas verdaderas, pero no ambas falsas. La falsedad de la una implica la verdad de la otra, mas no a la inversa. P. ej.: «algunos hombres son justos» y «algunos hombres no son justos» son ambas verdaderas, pero no podrán ser ambas falsas.

La teoría tradicional de la inferencia inmediata comprende también la **doctrina de la conversión**, operación consistente en invertir los términos de una proposición categórica manteniendo intacto el valor de verdad de la misma. La conversión puede ser de tres tipos:

1) *Simple*: permutación de los términos de la proposición sin cambio de cantidad ni de cualidad de ella. De este tipo de conversión son susceptibles la proposición E (p. ej.: de «ningún budista es católico» se infiere «ningún católico es budista», y viceversa) y la proposición I (p. ej.: de «algún negro es americano» se infiere «algún americano es negro», y al revés).

2) *Accidental*: permite pasar, permutando términos, de cualquier universal a la particular de la misma cualidad, pero no a la inversa. Vale para A (p. ej.: de «todo español es europeo» se infiere «algún europeo es español», aunque no a la inversa). Análogamente respecto de E.

3) *Por contraposición*: permutación de términos anteponiendo a cada uno una partícula negativa (y eliminando, eventualmente, cualquier doble negación). De este modo son convertibles A (de «todo justo es prudente» se infiere «todo imprudente es injusto», y al revés) y O (de «algunos chinos no son comunistas» se infiere «algunos no comunistas no son no chinos», o sea, «algunos no comunistas son chinos»).

La operación denominada *obversión* (término acuñado por Alexander BAIN) consiste en cambiar la cualidad de la proposición y negar el predicado. Las cuatro categóricas son obvertibles. P. ej.: la obversa de «todo A es B» es «ningún A es no B» y la de «ningún A es B», «todo A es no B».

§ 4. *El problema del compromiso existencial*

Los diagramas de VENN reflejan las relaciones estructurales y las analogías y diferencias entre los diversos tipos de proposición categórica.

En primer lugar puede observarse que los esquemas representativos de A (universal afirmativa) y de O (particular negativa) son diametralmente opuestos y no se dejan superponer, pues la zona negada o sombreada en el gráfico de A es la señalada positivamente en el gráfico de O. Esta oposición gráfica es reflejo de la relación lógica de contradicción o de incompatibilidad que existe entre A y O. Otro tanto sucede, respectivamente, con E (universal negativa) e I (particular afirmativa) y sus correspondientes diagramas. En este aspecto el modelo de VENN coincide con la lógica tradicional.

En segundo lugar el modelo de VENN, como puede comprobar el lector revisando los diagramas, separa radicalmente las proposiciones universales de las particulares no sólo por razón de la cantidad, sino porque las proposiciones particulares importan afirmación de existencia (como indica la cruz de sus respectivos diagramas), mientras que las universales no dicen nada positivo con respecto a este punto (pues el sombreado de sus respectivos esquemas indica sólo negación de existencia). En este segundo aspecto el modelo de VENN invalida determinadas tesis de la teoría tradicional de la inferencia, tanto inmediata como mediata.

Ello se patentiza, sobre todo, en el caso de que el sujeto de una proposición categórica sea un término denotativo de una clase vacía, esto es, carente de individuos, como la clase de los círculos cuadrados o la clase de los vampiros. Porque en tal caso resulta que la universal afirmativa

Todo vampiro es aristócrata,

en símbolos:

$$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx),$$

es verdadera, puesto que cualquiera de sus ejemplificaciones: $Pa \rightarrow Qa$, $Pb \rightarrow Qb$, etc. sería una implicación de antecedente falso (ya que no hay vampiros), y en consecuencia verdadera (pues una implicación de antecedente falso es verdadera).

En cambio la proposición particular afirmativa

Algún vampiro es aristócrata

en símbolos

$$\bigvee x\,(Px \wedge Qx),$$

es falsa, puesto que cualquier ejemplificación de lo afirmado en esta fórmula: $Pa \wedge Qa$, $Pb \wedge Qb$, etc., daría una conjunción cuyo primer componente sería con seguridad falso (ya que no hay vampiros), lo cual arrastraría la falsedad de dicha conjunción.

Al punto de vista según el cual las proposiciones categóricas cuyos sujetos sean denotativos de clases vacías son verdaderas si universales y falsas si particulares, se le denomina *teoría del compromiso* o *«importe» existencial* de la proposición categórica.

De acuerdo con estas consideraciones no sería aceptable ninguna ley lógica que permitiese, en principio, pasar por inferencia de lo general a lo particular, ni, por tanto, de una proposición tipo A a una proposición tipo I. Porque si no se dispone de información adicional previa relativa a la efectiva existencia de individuos, una inferencia semejante podría dar lugar al tránsito de lo verdadero a lo falso. Ahora bien, todas aquellas zonas de la teoría tradicional de la inferencia que impliquen el paso de lo general a lo particular sin información previa relativa a la existencia de individuos quedan sujetas a ese riesgo. Tal sucede en la teoría tradicional de la inferencia inmediata con las leyes de subalternación y de conversión accidental, que permiten el paso directo de proposiciones de tipo A a proposiciones de tipo I. E igualmente sucede en la teoría de la inferencia mediata con algunos modos silogísticos, como *Darapti*, que constan sólo de premisas universales (AA en este caso), y sin embargo introducen una conclusión particular (I en este caso) [7].

---

[7] Es poco sabido que la teoría del compromiso existencial de la proposición categórica fue explícitamente formulada por el filósofo alemán Franz BRENTANO (1838-1917). En su *Psychologie vom empirischen Standpunkte* (1874; existe reimpresión reciente de esta obra en F. Meiner, Hamburgo, vol. I, 1955, vol. II, 1959), libro II, cap. VIII, Brentano propuso una interpretación revolucionaria de las proposiciones categóricas, considerando que las particulares tienen un carácter eminentemente existencial y que las universales son tan sólo la negación de las particulares. Brentano tenía plena conciencia de las drásticas consecuencias que acarreaba su teoría para la doctrina tradicional de la inferencia, especialmente para la ley de subalternación y los modos silogísticos basados en ella.

Para resolver el problema del paso de lo general a lo particular, en lógica de cuantificadores se da normalmente por supuesta la exclusión de clases vacías. En esta suposición, que no es estrictamente formal, se basa, obviamente, el uso de la regla de eliminación de generalizador (EG) y la aceptación de determinadas leyes deductivas tales como:

$$\bigwedge x Px \vdash \bigvee x Px$$ [8].

El supuesto de la exclusión de clases vacías permite, pues, el establecimiento de determinadas inferencias que van de lo general a lo particular, como también comprobar la identidad de la lógica (monádica) de cuantificadores con la mayor parte de la silogística aristotélica. Sin embargo, aun con este supuesto, las citadas leyes tradicionales de subalternación y conversión accidental y los modos silogísticos tipo *Darapti* continúan siendo inaceptables para el cálculo de cuantificadores. El lector se percatará de ello si intenta deducir con la ayuda de las reglas de este cálculo la ley de subalternación «de A se infiere I», en nuestro lenguaje simbólico:

$$\bigwedge x(Px \to Qx) \vdash \bigvee x(Px \land Qx).$$

La manera más segura de salvar estas leyes consistiría en excluir del ámbito del cálculo no sólo las clases vacías, sino también los individuos. Tal es la actitud de Jan ŁUKASIEWICZ (1878-1956), que ha logrado confeccionar un sistema axiomático de la silogística de Aristóteles sin renunciar a ninguna de sus leyes ni a ninguno de sus modos. Este sistema [9] se basa en la idea de que los términos puestos en conexión por las proposiciones y silogismos aristotélicos son *términos universales*, que han de cumplir la doble condición de ser no contradictorios y no singulares. He aquí las palabras de ŁUKASIEWICZ:

---

[8] El lector sabrá resolver esta deducción aplicando a la premisa la regla **EG** y al resultado de ello la regla **IP** (véase Cap. IX, § 14). Dicha fórmula representa, por así decirlo, una especie de correlato, admisible en cálculo de cuantores, de la primera ley de subalternación de la lógica tradicional. Con la diferencia, claro está, de que en la ley tradicional de subalternación (que no es admisible sin más en cálculo de cuantores), las fórmulas cuantoriales implicadas son más complejas, ya que han de poseer la estructura de proposiciones categóricas:

$$\bigwedge x(Px \to Qx) \to \bigvee x(Px \land Qx).$$

[9] Véase Capítulo XIV, § 6.

«La lógica de Aristóteles no solamente ha sido mal entendida por lógicos venidos de la filosofía, sino también por lógicos venidos de la matemática. En los textos de lógica matemática se lee una y otra vez que la ley de conversión de la premisa A y algunos modos silogísticos derivados por esta ley, como *Darapti* o *Felapton*, son inaceptables. Esta crítica se basa en la errónea noción de que la premisa aristotélica universal afirmativa "Todo S es P" significa lo mismo que la implicación cuantificada "para todo c, si c es a, entonces c es b", donde c es un término singular, y que la premisa particular afirmativa "algún S es P" significa lo mismo que la conjunción cuantificada "para algún c, c es a y c es b", donde c es también un término singular... No hay pasaje en los *Analíticos* que justifique semejante interpretación. Aristóteles no introduce en su lógica términos vacíos o singulares... Aplica su lógica sólo a términos universales como "hombre" o "animal". E incluso esos términos pertenecen sólo a la aplicación del sistema, no al sistema mismo. En el sistema tenemos sólo expresiones con argumentos variables...» [10].

Esta actitud acentúa al máximo la disparidad de la lógica aristotélica con respecto a la actual y paga el precio de condenarla a un cierto *apartheid* [11]. Pues una lógica que se desinterese por principio de los objetos individuales verá restringirse enormemente el campo de sus aplicaciones, lo mismo en matemática que en ciencia empírica o en el uso cotidiano del lenguaje.

El problema del compromiso existencial no ha encontrado aún una solución teórica totalmente satisfactoria. En la práctica, posiblemente sea el mejor expediente, como ha indicado CHURCH [12],

---

[10] J. ŁUKASIEWICZ, *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la moderna lógica formal*, traducción castellana de Josefina Fernández, revisada por Manuel Garrido, Tecnos, Madrid, 1977.

[11] «La silogística aristotélica no es una lógica de clases ni de predicados. Existe aparte de otros sistemas deductivos, teniendo su propia axiomática y sus propios problemas», *íd., ibíd.* La actitud de ŁUKASIEWICZ encontraría un respaldo semántico-filosófico en el realismo de universales, que ha dominado en lógica hasta Port-Royal. Una defensa de este punto de vista, frente al iniciado por BOLZANO, que introduce los individuos en el campo de las interpretaciones de la lógica, se encuentra en L. E. PALACIOS («La relación inversa entre comprensión y extensión de conceptos», capítulo segundo de su «Prólogo crítico» a la *Introducción a la lógica* de A. MENNE, Gredos, Madrid, 1969, pp. 14-22.

[12] A. CHURCH, «The history of the question of existential import of categorical propositions», publicado en Y. BAR-HILLEL, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Proceed. of the 1964 Internat. Congress, N. Holland, Amsterdam, 1965. En este artículo se rehabilitan las teorías de la escolástica tardía relativas a la *constancia*.

condicionar el uso de las proposiciones categóricas universales a presuposiciones de contexto que permitirán o no, según el caso, la aplicación de las referidas leyes de subalternación y conversión accidental. La explicitación formal de presuposiciones existenciales defendida por STRAWSON [13] y algunos autores contemporáneos suele acarrear algunos inconvenientes formales de tipo inferencial.

§ 5. *El silogismo categórico*

La teoría del silogismo categórico constituye el principal núcleo de la lógica tradicional. Esta teoría, tal y como se la expone usualmente, es una especie de cóctel en donde se mezclan la lógica de Aristóteles, la tradición medieval y el pensamiento moderno hasta Kant. Los tratados de lógica simbólica suelen ocuparse de ella en relación con la lógica monádica de cuantificadores, respecto de la cual nos servirá de ilustración y contraste, por cuanto significa una manera distinta de enfocar la misma materia lógica.

El silogismo categórico es una inferencia a partir de dos premisas, en la que tanto éstas como la conclusión son proposiciones categóricas. Un ejemplo de silogismo es la argumentación:

Ningún árabe es israelí
Todo palestino es árabe
∴ Ningún palestino es israelí

En todo silogismo intervienen tres términos: el término *menor*, que es sujeto de la conclusión y figura en una de las premisas (llamada por ello premisa menor); el término *medio*, que figura en ambas premisas, pero no en la conclusión; y el término *mayor*, que es predicado de la conclusión y figura en la otra premisa (llamada por eso mayor). En el anterior ejemplo estos tres términos son, respectivamente: palestino, árabe, israelí.

El silogismo se divide con arreglo a un doble criterio formal: (a) por la colocación del término medio en las premisas, y (b) por la

[13] *Introduction to logical theory*, Methuen, Londres, 1952.

cantidad y cualidad de éstas. El primer criterio lo divide en *figuras* y el segundo en *modos*.

Es tradicional distinguir cuatro figuras, según que el término medio sea: 1. sujeto en la premisa mayor y predicado en la menor; 2. predicado en ambas; 3. sujeto en ambas, o 4. predicado en la mayor y sujeto en la menor. He aquí los respectivos esquemas [14], donde S, M y P representan, por este orden, los términos menor, medio y mayor:

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
M-P	P-M	M-P	P-M
S-M	S-M	M-S	M-S
S-P	S-P	S-P	S-P

(El ejemplo de silogismo antes citado pertenece, obviamente, a la primera figura, puesto que su término medio: árabe, es sujeto en la mayor, y predicado en la menor.)

El número de modos silogísticos teóricamente posibles es 256. Para calcular esta cifra basta tener en cuenta lo siguiente. La premisa mayor puede revestir cualquiera de las cuatro formas A, E, I, O; pero otro tanto sucede con la menor y asimismo con la conclusión. Ello da lugar a $4 \times 4 \times 4 = 64$ combinaciones posibles, sin tener en cuenta la diversidad de figuras. Pero como éstas, a su vez, son cuatro, el total de modos posibles resulta ser $64 \times 4 = 256$.

De las 256 combinaciones posibles, sólo un número muy reducido, exactamente 24, constituyen modos *válidos* o lógicamente concluyentes, seis para cada figura. Todos los demás son inválidos. Los criterios para decidir la validez de un silogismo se consideran en la siguiente sección.

Para designar a cada uno de los 24 modos válidos se emplean 24 palabras mnemotécnicas de origen medieval, cuyas vocales indican

---

[14] La tradición medieval impuso la costumbre de exponer los silogismos comenzando por la premisa mayor, frente a Aristóteles que prefería hacerlo empezando por la menor. Tampoco es aristotélica la cuarta figura, atribuida erróneamente a GALENO (siglo II). El criterio utilizado por Aristóteles para dividir el silogismo en figuras era comparar la extensión del término medio con la de los otros dos términos, lo que daba lugar únicamente a tres figuras: extensión intermedia entre ambos (Fig. 1), mayor que la de ambos (Fig. 2), menor que la de ambos (Fig. 3).

el tipo de proposición categórica que corresponde, respectivamente, a las premisas mayor y menor y a la conclusión, y cuyas consonantes tienen también un significado.

Los diecinueve modos principales se recogen en estos versos latinos que los ordenan por figuras:

Barbara, Celarent, Darii, Ferioque prioris;
Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundæ;
Tertia *Darapti, Disamis, Datisi, Felapton,*
Bocardo, Ferison habet. Quarta insuper addit
Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.

A estos diecinueve (cuatro de la primera figura, cuatro de la segunda, seis de la tercera y cinco de la cuarta) debe añadirse un grupo de cinco modos llamados «subalternos», que se caracterizan por ofrecer una conclusión particular, aunque las premisas permitirían que fuese universal. Estos modos son *Barbari, Celaront* (Fig. 1); *Cesaro, Camestrop* (Fig. 2); y *Camenop* (Fig. 4).

Los modos válidos de la primera figura (Barbara, Celarent, Darii, Ferio y subalternos) presentan, como solía decir KANT, el mecanismo de la *subsunción*, puesto que consisten en el establecimiento de una ley o regla general, positiva o negativa (premisa mayor), al que sigue un enunciado en el que se afirma que algo cumple una determinada condición (premisa menor) por virtud de lo cual queda incluido o excluido respecto de esa ley (*dictum de omni et de nullo*). Ejemplo en Barbara: Todo animal es viviente y todo hombre es animal, luego todo hombre es viviente.

Los modos válidos de la segunda figura (Cesare, Camestres, Festino, Baroco y subalternos) presentan todos una conclusión negativa, lo que los hace particularmente aptos para la exposición de argumentos destinados a la refutación de hipótesis. Ejemplo en Cesare: Ningún oficial del ejército es pacifista; pero los cuáqueros son pacifistas. Por consiguiente, ningún cuáquero es oficial del ejército.

Los modos válidos de la tercera figura (Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo, Ferison) exhiben todos una conclusión particular, lo cual los hace particularmente aptos para la exposición de argumentos de instanciación inductiva. Ejemplo en Darapti: Todo mamífero es vertebrado y es animal, luego algunos animales son vertebrados.

§ 6. *Diagramas de Venn para el silogismo categórico*

La teoría tradicional de la inferencia suministra un conjunto de principios y reglas para decidir cuáles de los 256 modos posibles del silogismo son lógicamente aceptables (válidos) y cuáles inaceptables (inválidos) [15]. Por su parte los diagramas de Venn constituyen

---

[15] Las reglas tradicionales para decidir la validez de un silogismo pueden reducirse a tres:

R1. El término medio debe estar distribuido por lo menos una vez.

R2. Si uno de los términos extremos (el menor o el mayor) está distribuido en la conclusión, deberá estarlo también en las premisas.

R3. Si una de las premisas es negativa, debe serlo también la conclusión.

Las dos primeras reglas se mueven en torno al concepto de *distribución* y su empleo prerrequiere una breve noticia sobre dicho concepto (los autores medievales hablaban al respecto de *suppositio*).

En el contexto de una proposición categórica se dice que un término *está distribuido* (*supponit universaliter*) cuando está tomado en la totalidad de su extensión, debiendo entenderse entonces que lo que se afirme o niegue de él en esa proposición haya de afirmarse o negarse de todos y cada uno de los individuos contenidos en dicha extensión. Se dice en cambio que un término *no está distribuido* (*supponit particulariter*) cuando está tomado tan sólo en parte de su extensión, debiendo entenderse entonces que lo que de él se afirme o niegue será verdad de alguno o algunos, pero no necesariamente de todos los individuos contenidos en dicha extensión. Por ejemplo: es claro que el término universal «hombre» está distribuido en la proposición «todo hombre es mortal» y que no lo está en la proposición «algún hombre es blanco», pues en la primera se indica que el ser mortal conviene a todos y cada uno de los individuos humanos, mientras no es ese el caso respecto del ser blanco en la segunda.

La distribución del sujeto en una proposición categórica queda patente por la partícula de cantidad «todo» o «alguno» que se le antepone a modo de prefijo. La distribución del predicado no es normalmente manifiesta por tales partículas, pero el análisis lógico revela que *en las proposiciones categóricas negativas* (*E, O*) *el predicado está distribuido, es decir, supone universalmente*, mientras que *en las proposiciones afirmativas* (*A, I*) *el predicado no lo está, es decir, supone particularmente*. Así, por ejemplo, en la proposición «algún hombre no es justo» el predicado «justo» está distribuido, mientras que no lo está ninguno de los predicados («mortal», «blanco») de las dos proposiciones anteriormente aducidas.

Toda la teoría tradicional de la inferencia, mediata e inmediata, está gobernada por la doctrina de la distribución, la cual se resume en la prohibición de pasar de una proposición que tenga un término no distribuido a otra que contenga ese mismo término distribuido.

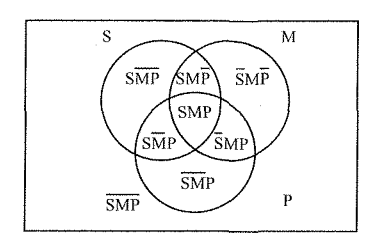
He aquí un ejemplo de modo silogístico inválido:

Todo egipcio es árabe
Algunos africanos son árabes
∴ Algunos africanos son egipcios,

que es inválido por no distribuir el término medio en las premisas conforme a la regla 1 («árabe» supone particularmente en ambas).

un excelente procedimiento gráfico para decidir con gran claridad cuándo un modo silogístico es válido y cuándo no.

Los diagramas de Venn para el silogismo categórico consisten en un conjunto de tres círculos en mutua intersección, dentro de los cuales quedan determinadas ordenadamente diversas zonas:



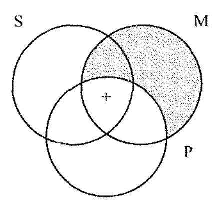
Cada uno de estos tres círculos representa el área de extensión de cada uno de los tres términos del silogismo S, M, P. La parte exterior a los círculos es la parte del universo de discurso cuya extensión excede a la de esos términos. En los tres círculos se distinguen tres zonas de no intersección: $S\overline{MP}$, $\overline{S}M\overline{P}$ y $\overline{SM}P$; tres zonas de intersección de dos términos: $S\overline{M}P$, $SM\overline{P}$ y $\overline{S}MP$; y finalmente una zona central de intersección de los tres términos: SMP.

A este criterio de demarcación de zonas deberá añadirse el criterio de discriminación existencial que se indicó en la sección segunda de este capítulo al tratar los diagramas de la proposición categórica: una cruz será señal de existencia y un sombreado señal de inexistencia en una zona así marcada, la ausencia de ambas significará ausencia de información respecto a la existencia de individuos en una zona.

Un silogismo correcto encuentra en los diagramas de Venn un modelo que manifiesta su validez. Sea, por ejemplo, un silogismo del modo *Darii* (Fig. 1): Todo M es P; algún S es M. Luego algún S es P. La premisa mayor indica que no hay M que no sea P, y de acuerdo con esta indicación se cubre con un sombreado el círculo M, salvo la zona de su intersección con P. La premisa menor indica que puede marcarse con una cruz la zona de intersección entre los círculos S y M. Salta a la vista entonces que existen individuos en la zona de intersección entre S y P (conclusión).

Darii

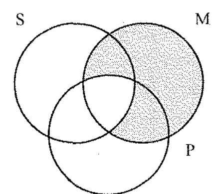
Todo M es P
Algún S es M
∴ Algún S es P



Los diagramas de Venn revelan que el modo *Darapti* no es concluyente si no se supone adicionalmente existencia en ciertas zonas. La premisa mayor indica el sombreado del círculo M salvo la zona de intersección con P. La menor indica otro tanto en relación con S. La zona de intersección entre S y P queda en blanco, y no puede ser marcada con cruz sin nueva información, relativa a la existencia de individuos en su interior.

Darapti

Todo M es P
Todo M es S
∴ Algún S es P (?)



Con este criterio resulta posible contrastar la validez de cualquier modo silogístico. Venn extendió su método al caso de deducciones que incluyesen cuatro términos, e incluso cinco, utilizando elipses en lugar de círculos. Pero el carácter intuitivo del modelo disminuye sensiblemente, y más allá de cinco términos no tendría sentido recurrir a estos diagramas [16].

---

[16] Allan MARQUAND (1881) y Lewis CARROLL (1886) emplearon gráficos de tipo rectangular como método de validación de modos silogísticos. El interés por la construcción de diagramas y modelos mecánicos de la lógica alcanzó un cierto apogeo en la segunda mitad del siglo XIX. Un singular ejemplo de ello, pese a su tosquedad, son las cartas de Cunynghame. El lector puede ilustrarse sobre la historia de los diagramas lógicos en el excelente libro de Martín GARDNER, *Logic machines and diagrams*, McGraw, Londres, 1958 (existe versión castellana de E. DE GORTARI, Grijalbo, México, 1973), de donde se toma la siguiente reproducción de las cartas de Cunynghame.

CARTAS SILOGÍSTICAS DE CUNYNGHAME

CARTAS MAYORES

Todo *M* es *P* Todo *S* es *P* Algún *S* es *P*	Ningún *M* es *P* Ningún *S* es *P* Algún *S* no es *P*	Algún *M* es *P* Algún *S* es *P*	Algún *M* no es *P* Algún *S* no es *P*
Todo *P* es *M* Ningún *S* es *P* Algún *S* es *P* Algún *S* no es *P*	Ningún *P* es *M* Ningún *S* es *P* Algún *S* no es *P*	Algún *P* es *M* Algún *S* es *P*	Algún *P* no es *M*

CARTAS MENORES

Todo *S* es *M*	Ningún *S* es *M*	Algún *S* es *M*	Algún *S* no es *M*
Todo *M* es *S*	Ningún *M* es *S*	Algún *M* es *S*	Algún *M* no es *S*

Las cartas de Cunynghame constituyen el modelo «mecánico» más simple de cuantos se han elaborado para resolver silogismos. Se trata de un conjunto de 16 cartas, divididas en dos grupos: ocho «mayores» y ocho «menores». Cada una de las ocho mayores ostenta en su cabecera una posible premisa mayor, y en sus partes media e inferior lleva escritas proposiciones que, eventualmente, pueden servir de conclusiones. Las ocho cartas menores llevan en cabeza una posible premisa menor y en su parte media o inferior ostentan uno o dos orificios a modo de ventanas.

La superposición de cualquier carta menor sobre cualquier carta mayor simula una combinación de premisas. La conclusión o conclusiones pertinentes aparecen a través de las ventanas (véase nota 16).

§ 7. *Teoría de la reducción de los modos imperfectos a modos perfectos*

Aristóteles llamaba «perfectos» a los silogismos de la primera figura, entendiendo que el orden de los términos en dicha figura es más natural que en las otras y ello hace intuitivamente evidente el paso a la conclusión. Un procedimiento clarificador de ese paso en los silogismos «imperfectos» (cualquier modo de cualquier otra figura) es la llamada *reducción*, que consiste en transformar cualquier modo imperfecto en uno de la primera figura cuya conclusión sea equivalente. Las consonantes de las denominaciones mnemotécnicas de los diferentes modos válidos dan la clave para las operaciones de reducción. La inicial del modo imperfecto indica que éste puede ser reducido al modo de la primera figura que lleve esa misma inicial. La presencia de la letra *m* significa que hay que mudar el orden de las premisas en el modo imperfecto. La letra *s* indica que la vocal que la preceda (o mejor la proposición denotada por esa vocal) debe ser convertida simplemente. La letra *p* significa la conversión accidental (*per accidens*) en análogas condiciones. He aquí un ejemplo de reducción de *Disamis* (Fig. 3) a *Darii* (Fig. 1):

Di Algunas serpientes son animales venenosos
sa Todas las serpientes son reptiles
mis Algunos reptiles son animales venenosos

Da Todas las serpientes son reptiles
ri Algunos animales venenosos son serpientes
i Algunos animales venenosos son reptiles

La operación ha consistido en este caso, en mudar premisas (letra *m*), después de haber convertido simplemente la mayor y la conclusión (letra *s*) en *Disamis*, con vistas (letra *D*) a obtener *Darii*.

Hay dos modos, caracterizados por la presencia de la letra *c*: *Baroco* y *Bocardo*, que sólo admiten una *reducción indirecta* a la primera figura. La reducción indirecta tiene un carácter dialéctico, pues parte del supuesto de que un eventual adversario admite nuestras premisas, pero no nuestra conclusión. La respuesta

recomendada por este procedimiento consiste en: 1) dar provisionalmente la razón a ese adversario y extraer por inferencia inmediata la contradictoria de la conclusión; 2) combinar la nueva proposición así obtenida con una de las anteriores premisas; y 3) inferir de tal combinación por modo Barbara la contradictoria de la otra premisa (que el adversario había admitido). He aquí un ejemplo:

Ba	Todo C es B	Todo C es B	Bar
ro	Algún A no es B	Todo A es C	ba
co	Algún A no es C	Todo A es B	ra

Cualquier modo de cualquier figura es reducible a Barbara por este método. Cabe observar que a la base de la reducción indirecta se encuentra el principio de contraposición de lógica de enunciados. Sean p, q, r las premisas mayor y menor y la conclusión del modo original. Dicho modo puede ser representado así:

	$p \wedge q \rightarrow r$	
o también así:	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	(por exportación)
de donde se sigue:	$p \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q)$	(por contraposición)

que sería el modo resultante de la reducción indirecta.

§ 8. *Formalización de la silogística*

Algunos cultivadores de la lógica matemática, en especial los representantes de la escuela lógica de Varsovia, entre los que destaca ŁUKASIEWICZ, han investigado seriamente los principales escritos lógicos de Aristóteles, sobre todo los *Primeros Analíticos*, donde se expone la teoría del silogismo.

Uno de los resultados de la investigación de ŁUKASIEWICZ fue la formalización y reconstrucción de la silogística en la forma de un sistema axiomático, inicialmente expuesto por él en 1929 y más tarde desarrollado en 1951. El Capítulo XIV, § 6, de este libro contiene un sumario de la sistematización de ŁUKASIEWICZ.

Pero en este momento me parece de más interés referirme al reciente ensayo de formalización de la silogística de Aristóteles llevado a cabo

por CORCORAN [17], que la interpreta como un sistema de deducción natural. El sistema de Corcoran es muy sencillo y elegante y admira comprobar hasta qué punto la aplicación de sus formalismos coincide literalmente con las explicaciones aducidas por Aristóteles en los *Analíticos*.

A continuación describo el sistema de CORCORAN y reproduzco su aplicación a dos casos de reducción, directa en el primero e indirecta en el segundo.

A diferencia de ŁUKASIEWICZ, CORCORAN no piensa que sea preciso fundamentar la silogística en la lógica de enunciados. Para él la silogística es un sistema deductivo que tiene por universo semántico los conceptos universales, o sea, hablando en términos ontológicos: las «sustancias segundas» aristotélicas o esencias universales de las cosas. El sistema se basa en la teoría aristotélica de que los silogismos perfectos (los cuatro modos de la primera figura) son intuitivamente evidentes, mientras que los imperfectos (los modos de las restantes figuras) presentan defectos de disposición y lagunas que subsana su reducción a un modo perfecto, reducción que puede ser o bien ostensiva o directa, o bien indirecta o por vía de absurdo. Las reglas específicas de inferencia del sistema son las tres leyes de conversión de la proposición categórica (conversión accidental de A y simple de E, I), los cuatro modos del silogismo perfecto (primera figura) y la ley de reducción silogística al absurdo.

Llamemos

S

a este sistema deductivo de la silogística. Aristóteles utilizaba las letras M, N, P, R, S, X como variables de conceptos universales; aquí utilizaremos las mismas en minúscula. Empleando los símbolos tradicionales A, E, I, O como constantes lógicas de carácter cuantificacional, podemos formular las siguientes reglas:

Regla de formación de fórmulas de proposición categórica

Un símbolo de cuantificación seguido de dos símbolos de concepto universal es una fórmula. P. ej.:

---

[17] John CORCORAN, «Aristotle's Natural Deduction System», artículo incluido en el libro, compilado por él, *Ancient Logic and its Modern Interpretations*, Reidel, Dordrecht, 1974, pp. 85-131.

Amn (Todo M es N)
Osp (Algún S no es P)

Reglas de inferencia

leyes de conversión

$$\frac{Asp}{Ips} \qquad \frac{Esp}{Eps} \qquad \frac{Isp}{Ips}$$

leyes del silogismo perfecto

barbara	*celarent*	*darii*	*ferio*
Amp	Emp	Amp	Emp
Asm	Asm	Ism	Ism
Asp	Esp	Isp	Osp

ley de reducción al absurdo

$$\frac{P, C(c) \vdash d \qquad P, C(c) \vdash C(d)}{P \vdash c}$$

(Siendo P el par de premisas de un silogismo, c su conclusión y C(x) la contradictoria de x, esta regla dice: si del par de premisas de un silogismo juntamente con la contradictoria de su conclusión se siguen una proposición, d, y su contradictoria, C(d), vale el referido silogismo P ⊢ c).

Una letra a la izquierda de cada línea de una deducción indica la función que cumple en ésta, de acuerdo con el siguiente código:

+	premisa
a	suposición aceptada
c	aplicación leyes de conversión
s	aplicación leyes de silogismo perfecto
h	hipótesis para una reducción al absurdo
abs	la contradictoria de la consecuencia de h
?	conclusión a establecer por reducción

Un caso de reducción directa: Cesare a Celarent:

el texto de Aristóteles	*deducción formal*
supongamos que M no se predica de ningún N	+Enm
pero se predica de todo X	+Axm
	?Exn
entonces, puesto que la premisa negativa se convierte, N no pertenece a ningún M	cEmn
pero se había supuesto que M pertenece a todo X	aAxm
por tanto, N no pertenecerá a ningún X	sExn

Un caso de reducción indirecta: Bocardo vía Barbara

el texto de Aristóteles	*deducción formal*
pues si R pertenece a todo S	+Asr
pero P no pertenece a ningún S	+Osp
es necesario que P no pertenezca a algún R	?Orp
pues si pertenece a todo R	hArp
y R pertenece a todo S	aAsr
entonces P pertenecerá a todo S	sAsp
pero habíamos supuesto que ello no es así	absOsp

§ 9. *Resolución de argumentos*

Ejercicio 1.º Formalizar y resolver el siguiente argumento:
Los ríos ecuatoriales no tienen estiaje. Hay ríos ecuatoriales que son muy caudalosos. Por consiguiente hay ríos que son muy caudalosos y no tienen estiaje.

Solución

Diccionario: R, E, T, C

Formalización

$$\bigwedge x(Rx \wedge Ex \rightarrow \neg Tx)$$
$$\bigvee x(\mathrm{Rx} \wedge Ex \wedge Cx)$$
$$\therefore \bigvee x(Rx \wedge Cx \wedge \neg Tx)$$

Derivación

1	$\bigwedge x(Rx \wedge Ex \rightarrow \neg Tx)$	
2	$\bigvee x(Rx \wedge Ex \wedge Cx)$	
3	$Ra \wedge Ea \rightarrow \neg Ta$	**EG** 1
4	$Ra \wedge Ea \wedge Ca$	
5	$Ra \wedge Ea$	**Simp**$_1$ 4
6	$\neg Ta$	**MP** 3, 5
7	Ra	**Simp**$_1$ 5
8	Ca	**Simp**$_2$ 4
9	$Ra \wedge Ca$	**Prod** 7, 8
10	$Ra \wedge Ca \wedge \neg Ta$	**Prod** 9, 6
11	$\bigvee x(Rx \wedge Cx \wedge \neg Tx)$	**IP** 10
12	$\bigvee x(Rx \wedge Cx \wedge \neg Tx)$	**EP** 2, 4-11

Ejercicio 2.º Formalizar y resolver el siguiente argumento:
Todo leninista es marxista.
Todo comunista que no sea estalinista o es leninista o es trotskista.
No hay nadie que sea estalinista o trotskista y no sea marxista.
Por consiguiente, si hay comunistas hay marxistas.

Solución

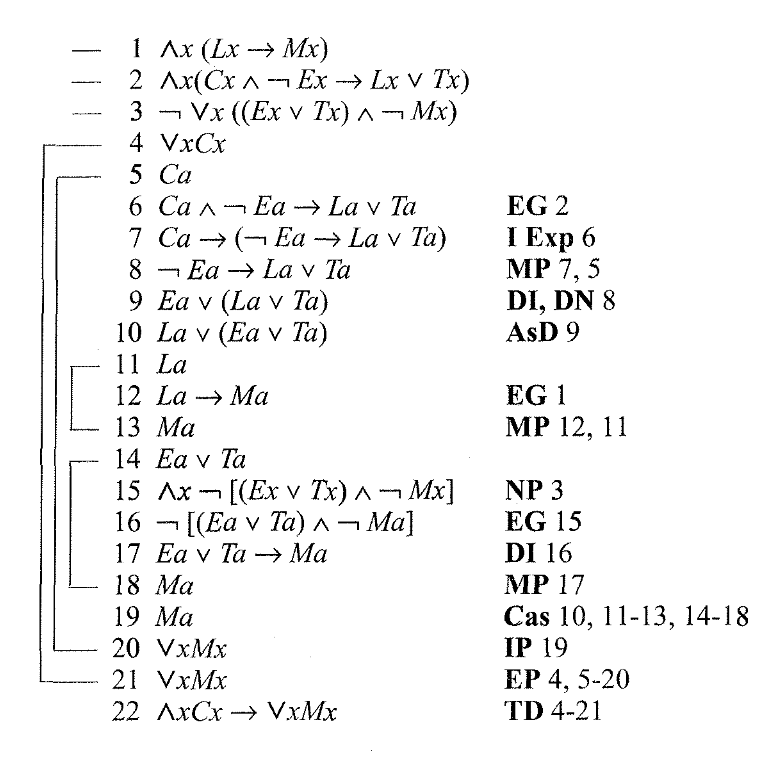
Diccionario

Lx	x es estalinista
Mx	x es marxista
Cx	x es comunista
Ex	x es estalinista
Tx	x es trotskista

Formalización

$$\bigwedge x(Lx \rightarrow Mx)$$
$$\bigwedge x(Cx \wedge \neg Ex \rightarrow Lx \vee Tx)$$
$$\neg \bigvee x((Ex \vee Tx) \wedge \neg Mx)$$
$$\therefore \bigvee xCx \rightarrow \bigvee xMx$$

Derivación



1	$\bigwedge x\,(Lx \rightarrow Mx)$	
2	$\bigwedge x(Cx \wedge \neg Ex \rightarrow Lx \vee Tx)$	
3	$\neg \bigvee x\,((Ex \vee Tx) \wedge \neg Mx)$	
4	$\bigvee x Cx$	
5	Ca	
6	$Ca \wedge \neg Ea \rightarrow La \vee Ta$	**EG** 2
7	$Ca \rightarrow (\neg Ea \rightarrow La \vee Ta)$	**I Exp** 6
8	$\neg Ea \rightarrow La \vee Ta$	**MP** 7, 5
9	$Ea \vee (La \vee Ta)$	**DI, DN** 8
10	$La \vee (Ea \vee Ta)$	**AsD** 9
11	La	
12	$La \rightarrow Ma$	**EG** 1
13	Ma	**MP** 12, 11
14	$Ea \vee Ta$	
15	$\bigwedge x \neg [(Ex \vee Tx) \wedge \neg Mx]$	**NP** 3
16	$\neg [(Ea \vee Ta) \wedge \neg Ma]$	**EG** 15
17	$Ea \vee Ta \rightarrow Ma$	**DI** 16
18	Ma	**MP** 17
19	Ma	**Cas** 10, 11-13, 14-18
20	$\bigvee x Mx$	**IP** 19
21	$\bigvee x Mx$	**EP** 4, 5-20
22	$\bigwedge x Cx \rightarrow \bigvee x Mx$	**TD** 4-21

Ejercicio 3.º Hallar la conclusión que puede obtenerse del siguiente conjunto de premisas [18]:

Ni una sola de las cosas que salen al paso y sin embargo quedan inadvertidas en un viaje espacial son marcianos.

Las cosas que salen al paso en un viaje espacial y son anotadas en el libro de ruta son, con toda seguridad, dignas de ser recordadas.

Jamás, durante un viaje espacial, encontré nada digno de ser recordado.

Las cosas que salen al paso y son advertidas en un viaje espacial son, con toda seguridad, anotadas en el libro de ruta.

[18] Este ejemplo es de Lewis CARROLL. Se trata de un caso de *sorites* (silogismo compuesto de una cadena de silogismos simples con omisión de las conclusiones intermedias). La solución se obtiene eliminando los términos medios en los pares de premisas que lo permitan. Las reglas adecuadas son **Sil** y eventualmente **Cp**.

Solución

Diccionario

Ax	x es advertido
Mx	x es marciano
Rx	x es anotado en el libro de ruta
Dx	x es digno de ser recordado
Ex	x es encontrado por mí

(En la formalización no se nos explicitará el universo de discurso, que está constituido por las cosas que salen al paso en un viaje espacial.)

Formalización y derivación

—	1	$\wedge x(\neg Ax \rightarrow \neg Mx)$	
—	2	$\wedge x(Rx \rightarrow Dx)$	
—	3	$\wedge x(Ex \rightarrow \neg Dx)$	
—	4	$\wedge x(Ax \rightarrow Rx)$	
	5	$\neg Aa \rightarrow \neg Ma$	**EG** 1
	6	$Ra \rightarrow Da$	**EG** 2
	7	$Ea \rightarrow \neg Da$	**EG** 3
	8	$Aa \rightarrow Ra$	**EG** 4
	9	$Ma \rightarrow Aa$	**Cp** 5
	10	$Ma \rightarrow Ra$	**Sil** 9, 8
	11	$Ma \rightarrow Da$	**Sil** 10, 6
	12	$Da \rightarrow \neg Ea$	**Cp** 7
	13	$Ma \rightarrow \neg Ea$	**Sil** 11, 12
	14	$\wedge x(Mx \rightarrow \neg Ex)$	**IG** 13

La línea 14 es la conclusión del argumento: nunca encontré un marciano.

CAPÍTULO XI

LÓGICA DE RELACIONES

A. CUANTIFICACIÓN MÚLTIPLE

§ 1. *Cuantificación de predicados relativos*

Uno de los puntos en que la lógica simbólica ha significado una mayor innovación con respecto a las concepciones de la lógica tradicional, ha sido el análisis formal de predicados relativos (véase Capítulo II, § 2) y esquemas deductivos basados en ellos.

Los lógicos tradicionales aplicaban invariablemente el esquema

S es P

a todo enunciado declarativo, cualquiera que fuese su estructura. Dicho esquema se amolda, sin duda, a enunciados del tipo de «los etíopes son africanos» o «algunos africanos son árabes», pero no a enunciados como «Asia es más grande que Europa», «los ácidos enrojecen el papel de tornasol» o «todo el mundo quiere a alguien», para los cuales el esquema «S es P» resulta una especie de camisa de fuerza.

La utilidad que pueda tener para la práctica de los razonamientos el uso de esquemas formales de predicación relativa, es obvia. En matemática, por ejemplo, no es posible dar un paso adelante sin emplear predicados relativos tales como «ser mayor que», «ser el sucesor de», «estar entre» que suelen desempeñar un papel clave en las deducciones. Y algo análogo sucede con tantas otras categorías, asimismo fundamentales, de la física, la biología o la historia, como «gravitar en torno a», «causar», «engendrar», «conquistar». Poder disponer de un lenguaje formal de relaciones es algo que, indudablemente, tiene interes [1].

---

[1] Justamente para llenar esta laguna de la lógica tradicional surgió en el siglo XIX la teoría de las relaciones con DE MORGAN y SCHRÖDER. Esta teoría constituye hoy un capítulo fundamental de la moderna teoría de conjuntos.

Ahora bien, la simbolización de enunciados de predicación relativa es tarea que debe hacerse con cuidado. Los predicados de carácter relativo arrastran consigo una pluralidad de símbolos de individuo, cada uno de los cuales puede, por su parte, requerir la presencia de un cuantificador. Pero con frecuencia estas circunstancias no están indicadas, o sólo a medias, en los enunciados de lenguaje informal, y hay que descubrirlas.

Veamos un ejemplo. Para formalizar el enunciado

Todo el mundo quiere a alguien

hay que tomar nota primero de que el predicado «querer» es diádico, y requiere, por tanto, la presencia de dos símbolos de individuo. Convengamos en que

$$Qxy$$

sea la versión formal de «x quiere a y». Por otra parte, en el enunciado que se pretende formalizar no hay nombres propios de individuo, lo cual deberá expresarse simbólicamente utilizando variables individuales que estén limitadas por cuantificadores, en este caso dos. El primero de ellos, de carácter universal, será la versión formal de «todo el mundo»; y el segundo, de carácter particular, corresponderá a la partícula «alguien». Se puede, pues, escribir:

$$\bigwedge x \bigvee y Qxy.$$

Repárese bien en la importancia que tiene saber elegir y situar correctamente el cuantificador. La traducción formal de estos tres enunciados

Hay quien quiere a todo el mundo
Todo el mundo quiere a todo el mundo
Hay quien no quiere a nadie

sería, respectivamente:

$$\bigvee x \bigwedge y Qxy.$$
$$\bigwedge x \bigwedge y Qxy.$$
$$\bigvee x \neg \bigvee y Qxy.$$

El criterio general a seguir para obtener un resultado correcto en esta tarea puede resumirse así. Una vez se hayan localizado los predicados relativos en los enunciados de lenguaje informal, hay que detectar las partículas de función nominal o pronominal que en ellos concurran. Luego se elegirán las letras predicativas y símbolos de individuos, constantes o variables, que convenga, según el caso. Finalmente se determinarán los cuantificadores que procedan para contrarrestar la posible ambigüedad de las variables individuales, pero teniendo buen cuidado de medir el alcance de cada uno y las relaciones de prioridad entre ellos.

Consideremos otro ejemplo. El lógico inglés DE MORGAN sostenía que la lógica tradicional aristotélica es incapaz de resolver un argumento como éste:

> «Todo caballo es un animal. Por tanto, la cabeza de un caballo es la cabeza de un animal.»

Y en realidad, si se intenta resolver este razonamiento con los solos medios de la lógica de cuantificación monádica, que es, más o menos, el equivalente moderno de la lógica tradicional, se comprobará que ello no es posible. Siendo

Cx	x es un caballo
Ax	x es un animal
Dx	x es la cabeza de un caballo
Ex	x es la cabeza de un animal,

es claro que de la premisa

$$\wedge x(Cx \rightarrow Ax)$$

no se sigue formalmente la conclusión

$$\wedge x(Dx \rightarrow Ex).$$

La clave de la formalización en nuestro caso está en darse cuenta de que las expresiones complejas «cabeza de caballo» y «cabeza de animal» no son dos predicados absolutos, sino dos combinaciones de un predicado relativo (el mismo en cada una de ellas) con un predicado absoluto (distinto en cada una).

Siendo

Cx	x es caballo
Ax	x es animal
Dyx	y es la cabeza de x,

la expresión «cabeza de caballo» a efectos del argumento de que se trata, no podrá ser formalizada si no se la entiende como «y es cabeza de x, siendo x un caballo», o lo que viene a ser lo mismo, «x es un caballo e y la cabeza de éste». Análogamente habría que entender «cabeza de animal». Con la formalización de estas dos expresiones:

$Cx \wedge Dyx$	x es un caballo e y su cabeza
$Ax \wedge Dyx$	x es un animal e y su cabeza,

se puede proceder ahora a la formalización completa del argumento [2]:

$$\bigwedge x(Cx \rightarrow Ax)$$
$$\therefore \quad \bigwedge x \bigwedge y(Cx \wedge Dyx \rightarrow Ax \wedge Dyx)$$

B. Deducción natural

§ 2. *Extensión de las reglas básicas del cálculo de cuantificadores*

En las deducciones que contienen predicados de dos o más variables, aumenta considerablemente el número de veces que es preciso recurrir a la aplicación de las operaciones básicas de introdución y eliminación de cuantificadores. Una manera de abreviar fatigosas reiteraciones es tomar el acuerdo de efectuar simultáneamente y, por tanto, en un solo paso, cualquier serie ininterrumpida de aplicaciones de una misma regla básica de cuantificadores, que hasta ahora hubiera requerido una serie correlativa de sucesivos pasos de derivación.

Así por ejemplo, la serie de pasos deductivos

— 1 $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(Pxy \vee Qz)$
2 $\bigwedge y \bigwedge z(Pay \vee Qz)$ **EG** 1

[2] La solución de este argumento puede verse en la sección cuarta del presente capítulo.

3 $\wedge z(Pab \vee Qz)$ **EG** 2
4 $Pab \vee Qc$ **EG** 3

se podría abreviar efectuando en un solo paso las tres eliminaciones de generalizador

— 1 $\wedge x \wedge y \wedge z(Pxy \vee Qz)$
2 $Pab \vee Qc$ **EG**^{3} 1

anotando en el comentario de la línea, a manera de exponente sobre las iniciales de la regla, el número de veces que ésta ha sido aplicada.

Esta convención para ahorrar repeticiones se puede reflejar en cuatro nuevas reglas derivadas, que son una mera extensión o reformulación de las cuatro básicas, entendiendo ahora que el número de parámetros individuales, y correlativamente el número de cuantificadores introducidos o eliminados, puede ser más de uno en cada regla.

Las cuatro nuevas reglas que extienden el alcance de las básicas son las de introducción reiterada de generalizador (**IG**^{n}), eliminación reiterada de generalizador (**EG**^{n}), introducción reiterada de particularizador (**IP**^{n}) y eliminación reiterada de particularizador (**EP**^{n}).

Pueden ser representadas esquemáticamente así

IG^n

$$\frac{Pa_1 \ldots a_n}{\wedge^n x_1 \ldots x_n P x_1 \ldots x_n}$$

EG^n

$$\frac{\wedge^n x_1 \ldots x_n P x_1 \ldots x_n}{Pa_1 \ldots a_n}$$

IP^n

$$\frac{Pa_1 \ldots a_n}{\vee^n x_1 \ldots x_n P x_1 \ldots x_n}$$

EP^n

$\vee^n x_1 \ldots x_n P x_1 \ldots x_n$
— $Pa_1 \ldots a_n$
:
— A
$\overline{A}$

Para las reglas **IG**^{n} y **Ep**^{n} valen, con las oportunas reiteraciones a todo parámetro, las mismas condiciones críticas que se especificaron para las reglas básicas **IG** y **EP** en el Capítulo IX, §§ 3 y 6.

En adelante haremos uso de estas reglas, salvo algunas ocasiones en que interese que la claridad prevalezca sobre la brevedad. Como ya se indica en la formulación de las reglas, a veces escribiremos también abreviadamente

$$\bigwedge xyzPxyz \qquad \text{o} \qquad \bigvee xyzPxyz$$

en lugar de

$$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge zPxyz \qquad \text{o} \qquad \bigvee x \bigvee y \bigvee zPxyz,$$

y análogamente en casos similares.

§ 3. *Leyes de cuantificación múltiple*

Las leyes de cuantificación múltiple componen un repertorio bastante reducido. Aquí consideraremos tres leyes de conmutación de cuantores:

$$\bigwedge x \bigwedge yPxy \leftrightarrow \bigwedge y \bigwedge xPxy$$
$$\bigvee x \bigvee yPxy \leftrightarrow \bigvee y \bigvee xPxy$$
$$\bigvee x \bigwedge yPxy \rightarrow \bigwedge y \bigvee xPxy$$

y otras dos de carácter condicionado que permiten, respectivamente, reducir a uno solo dos generalizadores

$$\bigwedge x \bigwedge yPxy \rightarrow \bigwedge xPxx$$

y desdoblar un particularizador

$$\bigvee xPxx \rightarrow \bigvee x \bigvee yPxy$$

(En estos dos últimos casos se ha de cumplir la condición de que el nuevo símbolo individual introducido no quede ligado por ningún otro cuantificador preexistente en la fórmula que lo recibe.)

Propiedad conmutativa del generalizador

$$\vdash \bigwedge x \bigwedge yPxy \leftrightarrow \bigwedge y \bigwedge xPxy$$

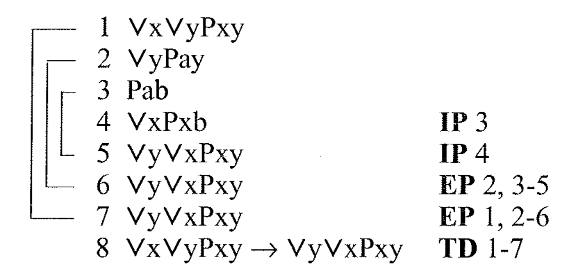
Demostración [3]

1	⋀x⋀yPxy	
2	⋀yPay	**EG** 1
3	Pab	**EG** 2
4	⋀xPxb	**IG** 3
5	⋀y⋀xPxy	**IG** 4
6	⋀x⋀yPxy → ⋀y⋀xPxy	**TD** 1-5
7	⋀y⋀xPxy	
8	⋀xPxa	**EG** 7
9	Pba	**EG** 8
10	⋀yPby	**IG** 9
11	⋀x⋀yPxy	**IG** 10
12	⋀y⋀xPxy → ⋀x⋀yPxy	**TD** 7-11
13	⋀x⋀yPxy ↔ ⋀y⋀xPxy	**ICO** 6,12

Propiedad conmutativa del particularizador

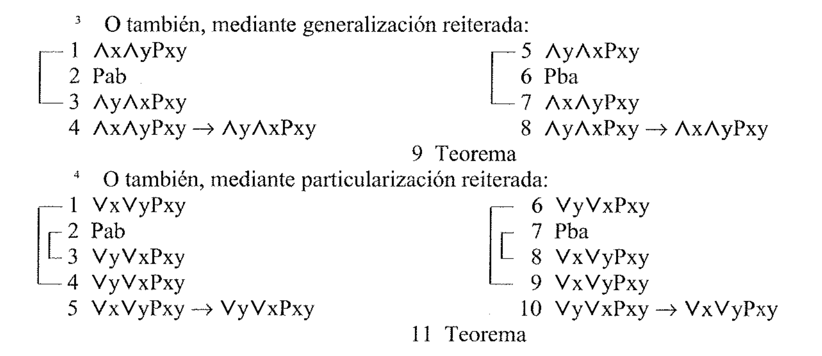
⊢ ⋁x⋁yPxy ↔ ⋁y⋁xPxy

Demostración [4]



1	⋁x⋁yPxy	
2	⋁yPay	
3	Pab	
4	⋁xPxb	**IP** 3
5	⋁y⋁xPxy	**IP** 4
6	⋁y⋁xPxy	**EP** 2, 3-5
7	⋁y⋁xPxy	**EP** 1, 2-6
8	⋁x⋁yPxy → ⋁y⋁xPxy	**TD** 1-7

[3] O también, mediante generalización reiterada:



1 ⋀x⋀yPxy
2 Pab
3 ⋀y⋀xPxy
4 ⋀x⋀yPxy → ⋀y⋀xPxy

5 ⋀y⋀xPxy
6 Pba
7 ⋀x⋀yPxy
8 ⋀y⋀xPxy → ⋀x⋀yPxy

9 Teorema

[4] O también, mediante particularización reiterada:

1 ⋁x⋁yPxy
2 Pab
3 ⋁y⋁xPxy
4 ⋁y⋁xPxy
5 ⋁x⋁yPxy → ⋁y⋁xPxy

6 ⋁y⋁xPxy
7 Pba
8 ⋁x⋁yPxy
9 ⋁x⋁yPxy
10 ⋁y⋁xPxy → ⋁x⋁yPxy

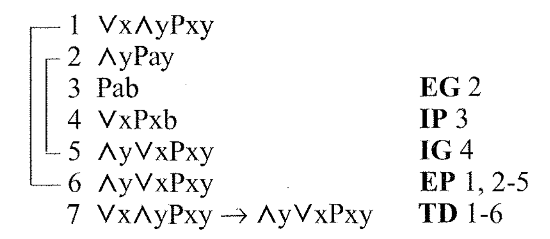
11 Teorema

9	∨y∨xPxy	
10	∨xPxa	
11	Pba	
12	∨yPby	**IP** 11
13	∨x∨yPxy	**IP** 12
14	∨x∨yPxy	**EP** 10, 11-13
15	∨x∨yPxy	**EP** 9, 10-14
16	∨y∨xPxy → ∨x∨yPxy	**TD** 9-15
17	∨x∨yPxy ↔ ∨y∨xPxy	**ICO** 8, 16

Ley de conmutación de particularizador y generalizador

⊢ ∨x∧yPxy → ∧y∨xPxy

Demostración



Obsérvese que esta ley tiene la estructura de una implicación. Su conversa [5] no es formalmente derivable. Comprobar por qué ello es así, puede servir de ejercicio de aplicación de las restricciones relativas al uso de variables:

— 1	∧y∨xPxy	
2	∨xPxa	**EG** 1
— 3	Pba	
4	∧yPby	(!)

La línea 4 es ilegítima, puesto que viola la restricción de la regla **IG**: el parámetro que sirva de base a la generalización, en este caso a, no debe figurar en ninguna hipótesis previa. Pero la línea 3, en la que ese parámetro figura, es una hipótesis previa.

[5] La fórmula conversa de una implicación es la resultante de permutar sus dos componentes. La conversa de A → B es B→ A.

Hasta qué punto es importante respetar la prioridad de alcances en la agrupación de cuantificadores es algo que se patentiza considerando el siguiente ejemplo. Supóngase el universo de discurso de los números naturales y convéngase en que el predicado *Pyx* significa: «*y* es mayor que *x*». En ese caso las dos fórmulas que siguen:

(1) $\wedge x \vee y Pyx$
(2) $\vee y \wedge x Pyx$

se traducirían así:

(1) para cualquier número *x*, hay otro número *y* mayor que él;
(2) hay un número *y* que es mayor que todo número *x*.

Es claro que mientras la fórmula (1) así interpretada es un enunciado verdadero, la fórmula (2) para esa interpretación es falsa. No es legítimo, por tanto, pasar de (1) a (2) por vía lógica.

Reducción de generalizador

$\wedge y \wedge xPxy \rightarrow \wedge xPxx$

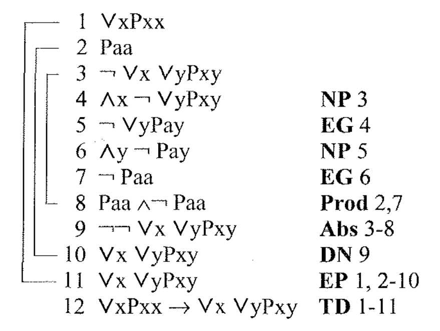
Demostración

1	$\wedge y \wedge xPxy$	
2	$\wedge xPxa$	**EG** 1
3	Paa	**EG** 2
4	$\wedge xPxx$	**IG** 3
5	$\wedge y \wedge xPxy \rightarrow \wedge xPxx$	**TD** 1-4

Duplicación de particularizador

$\vee xPxx \rightarrow \vee x \vee yPxy$

Demostración



1	$\vee xPxx$	
2	Paa	
3	$\neg \vee x \vee yPxy$	
4	$\wedge x \neg \vee yPxy$	**NP** 3
5	$\neg \vee yPay$	**EG** 4
6	$\wedge y \neg Pay$	**NP** 5
7	$\neg Paa$	**EG** 6
8	$Paa \wedge \neg Paa$	**Prod** 2,7
9	$\neg\neg \vee x \vee yPxy$	**Abs** 3-8
10	$\vee x \vee yPxy$	**DN** 9
11	$\vee x \vee yPxy$	**EP** 1, 2-10
12	$\vee xPxx \rightarrow \vee x \vee yPxy$	**TD** 1-11

§ 4. *Ejercicios de traducción y resolución de argumentos*

Ejercicio 1.º Este ejercicio es la resolución del argumento de DE MORGAN [6] ya citado al comienzo del presente capítulo.

Un caballo es un animal. Por tanto, la cabeza de un caballo es la cabeza de un animal.

Formalización

Cx	x es un caballo
Ax	x es un animal
Dyx	y es la cabeza de x

$$\bigwedge x(Cx \rightarrow Ax) \vdash \bigwedge x \bigwedge y(Cx \wedge Dyx \rightarrow Ax \wedge Dyx)$$ [7]

Derivación

— 1	$\bigwedge$x(Cx → Ax)	
2	Ca → Aa	**EG** 1
┌— 3	Ca ∧ Dba	
│ 4	Ca	**Simp**$_1$ 3
│ 5	Aa	**MP** 2,4
│ 6	Dba	**Simp**$_2$ 3
└— 7	Aa ∧ Dba	**Prod** 5,6
8	Ca ∧ Dba → Aa ∧ Dba	**TD** 3-7
9	$\bigwedge$x$\bigwedge$y(Cx ∧ Dyx → Ax ∧ Dyx)	**IG**^{2} 8

En la línea 3 se supone, previamente individualizado, el antecedente de la matriz de la conclusión, con vistas a su ulterior descarga por TD.

---

[6] *Formal logic*, 1847, p. 114.

[7] Obsérvese que la conclusión podía haber revestido también cualquiera de estas formas:

$$\bigwedge x(\bigwedge y(Cx \wedge Dyx) \rightarrow \bigwedge y(Ax \wedge Dyx))$$
$$\bigwedge x(\bigvee y(Cx \wedge Dyx) \rightarrow \bigvee y(Ax \wedge Dyx))$$

que están implicadas por la que figura en el texto. (El lector puede comprobarlo repasando, en el Capítulo IX, las leyes de distribución del generalizador en implicación.)

Ejercicio 2.º Resuélvase el siguiente argumento: Si dos líneas cualesquiera son perpendiculares a una tercera, entonces son paralelas entre sí. Si una línea es perpendicular a otra, entonces es perpendicular a la primera. Por tanto, si dos líneas cualesquiera no son paralelas, no se da el caso de que haya una tercera que sea perpendicular a ambas (ANDERSON-JOHNSTONE, *Natural deduction,* p. 223).

Formalización

Lx	*x* es una línea
Rxy	*x* es perpendicular a *y*
Pxy	*x* es paralela a *y*

$\bigwedge x \bigwedge y(Lx \wedge Ly \wedge \bigvee z(Lz \wedge Rxz \wedge Ryz) \rightarrow Pxy))$

$\bigwedge x \bigwedge y(Lx \wedge Ly \wedge Rxy \rightarrow Ryx)$

$\therefore \; \bigwedge x \bigwedge y(Lx \wedge Ly \wedge \neg Pxy \rightarrow \neg \bigvee z(Lz \wedge Rzx \wedge Rzy))$

Derivación

1	$\bigwedge x \bigwedge y(Lx \wedge Ly \wedge \bigvee z(Lz \wedge Rxz \wedge Ryz) \rightarrow Pxy)$	
2	$\bigwedge x \bigwedge y(Lx \wedge Ly \wedge Rxy \rightarrow Ryx)$	
3	$La \wedge Lb \wedge \neg Pab$	
4	$Lc \wedge Rca \wedge Rcb$	
5	$La \wedge Lb \wedge \bigvee z(Lz \wedge Raz \wedge Rbz) \rightarrow Pab$	**EG**^{2} 1
6	$Lc \wedge La \wedge Rca \rightarrow Rac$	**EG**^{2} 2
7	La	**Simp**$_1$ 3
8	$Lc \wedge Rca$	**Simp**$_1$ 4
9	$La \wedge Lc \wedge Rca$	**Prod** 7,8
10	$Lc \wedge La \wedge Rca$	**CC** 9
11	Rac	**MP**$_2$ 6,10
12	$Lc \wedge Lb \wedge Rcb \rightarrow Rbc$	**EG** 2
13	Lc	**Simp**$_1$ 4
14	$La \wedge Lb$	**Simp**$_1$ 3
15	Lb	**Simp**$_2$ 14
16	Rcb	**Simp**$_2$ 4
17	$Lc \wedge Lb$	**Prod** 13, 15
18	$Lc \wedge Lb \wedge Rcb$	**Prod** 17, 16
19	Rbc	**MP** 12, 18
20	$Rac \wedge Rbc$	**Prod** 11, 19
21	$Lc \wedge Rac \wedge Rbc$	**Prod** 13, 20
22	$\bigvee z(Lz \wedge Raz \wedge Rbz)$	**IP** 21
23	$La \wedge Lb \wedge \bigvee z(Lz \wedge Raz \wedge Rbz$	**Prod** 14, 22
24	Pab	**MP** 5, 23
25	$\neg Pab$	**Simp**$_2$ 3
26	$Pab \wedge \neg Pab$	**Prod** 24, 25
27	$\neg(Lc \wedge Rca \wedge Rcb)$	**Abs** 4-26
28	$La \wedge Lb \wedge \neg Pab \rightarrow \neg(Lc \wedge Rca \wedge Rcb)$	**TD**$_3$ 3-27
29	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(Lx \wedge Ly \wedge \neg Pxy \rightarrow \neg(Lz \wedge Rzx \wedge Rzy))$	**IG** 28
30	$\bigwedge x \bigwedge y(Lx \wedge Ly \wedge \neg Pxy \rightarrow \bigwedge z \neg(Lz \wedge Rzx \wedge Rzy))$	**I Dist** 29
31	$\bigwedge x \bigwedge y(Lx \wedge Ly \wedge \neg Pxy \rightarrow \neg \bigvee z(Lz \wedge Rzx \wedge Rzy))$	**I DP** 30

C. Tablas semánticas

§ 5. *Tablas infinitas*

Una tabla semántica puede: (1) terminar en clausura completa (lo cual será señal indudable de que la fórmula o argumento a analizar mediante la tabla posee validez); (2) llegar a su fin sin que haya tenido lugar la clausura completa (lo cual es señal indudable de que la fórmula o argumento a analizar admite por lo menos un contraejemplo y carece, por tanto, de validez); pero también cabe una tercera posibilidad (3) consistente en que la tabla no llegue a clausurarse del todo ni a terminar abierta, es decir, que nunca alcance su fin. Tal puede suceder con las tablas de fórmulas y argumentos en donde intervienen predicados poliádicos. En tales casos las tablas resultantes son *tablas infinitas*.

He aquí un ejemplo. Sea la fórmula

$$\neg (\bigwedge x \bigvee y(\neg Rxx \wedge Rxy))$$

Inténtese, mediante la construcción de la correspondiente tabla, averiguar si esa fórmula posee o no validez universal.

La tabla se confeccionaría del siguiente modo:

1	$\bigwedge x \bigvee y(\neg Rxx \wedge Rxy)$	
2	$\bigvee y(\neg Raa \wedge Ray)$	**VG** 1
3	$\neg Raa \wedge Rab$	**VP** 2
4	$\neg Raa$	**VC** 3
5	Rab	**VC** 3

En este momento no se ha obtenido, desde luego, la clausura de la tabla. Pero tampoco puede darse ésta por terminada, mientras no se haya efectuado el intento de llegar a contradicción con todos los parámetros de que se disponga. Terminado un primer intento con el parámetro a y el «nuevo» b, habría que ensayar otra vez con otros parámetros:

6	$\bigvee y(\neg Rbb \wedge Rby)$	**VG** 1
7	$\neg Rbb \wedge Rbc$	**VP** 6
8	$\neg Rbb$	**VC** 7
9	Rbc	**VC** 7
....		

y así sucesivamente, puesto que la busca del contraejemplo debe proseguirse, mientras sea infructuosa, con todos los individuos de que se disponga. Supóngase que el universo de discurso es el conjunto de los números naturales: 0, 1, 2, . . . , n, . . . y que el significado de la relación diádica R es «menor que». La línea 4 de la tabla comprueba que no es cierto que 0 sea menor que 0 y la línea 5 que es cierto que 0 es menor que 1; la línea 8 comprueba que no es cierto que 1 sea menor que 1 y que es cierto que 1 es menor que 2, y así sucesivamente, en una serie de ensayos que se pierde en el infinito.

El fenómeno de la existencia de tablas infinitas permite poner al descubierto los límites del método de las tablas semánticas. Este método tiene, sobre otros métodos deductivos, la ventaja de que no depende de la inventiva de quien lo ejecuta, sino que puede ser aplicado de manera mecánica. A un método de esta clase se le denomina «algoritmo». Las tablas semánticas suministran un algoritmo para decidir la validez de una fórmula o de un argumento mientras no se rebase el ámbito de la lógica de conectores o de la cuantificación de predicados monádicos. En el caso de la cuantificación poliádica, puede suceder que el proceso de confección de la tabla correspondiente sea literalmente interminable. En tales casos el método de las tablas queda impotente para decidir si la fórmula o argumento en cuestión es válido o no lo es, puesto que tal decisión presupone la terminación de la tabla. (Sobre la noción de algoritmo y el problema de la decisión véase Capítulo XVI, §§ 5 y 6, donde se discute el significado epistemológico de esta limitación del método de las tablas semánticas, y Capítulo XVII, §§ 1, 4 y 5.)

CAPÍTULO XII

IDENTIDAD Y DESCRIPCIONES

La comparación y diferenciación de individuos requiere el uso de la idea de igualdad, o identidad, que es susceptible de ser formalizada y ordenada en un cálculo. El cálculo de identidad constituye un interesante estrato de la lógica que presupone el cálculo elemental de predicados y que, al sobreañadirse a este último, lo potencia.

Las tres secciones que siguen están dedicadas a revisar las nociones de función y de término, a la construcción del cálculo de identidad y al análisis de las descripciones de objetos.

§ 1. *Funciones y términos*

Funciones. El concepto de *función* es fundamental en matemática [1]. Una función es, dicho en lenguaje sencillo, una operación realizable sobre un número cualquiera (al que se denomina *argumento* o *variable independiente* de la función) y que da como resultado otro número (al que se denomina *valor* o *variable dependiente* de la función).

Sea, por ejemplo, la función consistente en elevar al cuadrado un número entero positivo cualquiera. Si se elige como argumento el número 3, el resultado, o valor, será 9; y si se elige como argumento el número 4, el valor de la función será 16. Utilizando la letra *f* para designar esta función, ello se escribiría en la notación matemática usual:

$$f(3) = 9$$
$$f(4) = 16,$$

y en términos generales:

$$f(\mathrm{x}) = y,$$

[1] El uso y la notación de la palabra «función» en matemática se debe, según CHURCH, a LEIBNIZ y EULER (siglo XVIII); el desarrollo posterior de este concepto se debe a los matemáticos del siglo XIX DIRICHLET, RIEMANN y HANKEL.

o también:

$$y = f(x),$$

que puede leerse: «y es función de x» (es decir: cuál sea el valor y depende de cuál sea el argumento x).

Un modo más adecuado de entender qué sea una *función* es considerarla como una relación de correspondencia o dependencia [2] entre dos conjuntos X e Y tal que para cada elemento del conjunto X corresponde o queda determinado exactamente un miembro del conjunto Y. Al conjunto X se le llama *dominio* o *rango de los argumentos*, y al conjunto Y *dominio* o *rango de los valores*. En el ejemplo que se acaba de indicar, el conjunto X es el conjunto de los enteros positivos: 1, 2, 3, ...; y el conjunto Y, el de los cuadrados de los enteros positivos: 1, 4, 9, ... Todo miembro del primer conjunto, una vez elevado al cuadrado, determina automáticamente como resultado un miembro del conjunto Y.

Como operadores [3] denotativos de función o *funtores* suele emplearse en matemática las letras minúsculas: f, g, h, ...

La definición de función y el ejemplo que se acaba de aducir sólo requieren la intervención de un argumento (funciones monádicas). Pero una función puede requerir, como es el caso, p. ej., de la función suma o la función producto, la intervención simultánea de dos, tres o más argumentos (funciones diádicas, triádicas o, en general, poliádicas) [4]. Las correlativas notaciones serían: $f(x, y) = z$, $f(w, x, y) = z$, o en general, $f(x_1, \ldots, x_n) = y$.

Función lógica. La función matemática está sujeta a la condi-

---

[2] La relación constitutiva de función entre dos conjuntos, que recibe el nombre técnico de *aplicación* o *mapeo* (del inglés «*mapping*») es una relación «de muchos a uno»: mediante ella el argumento determina el valor, pero no a la inversa.

[3] El término *operador*, más amplio que el de funtor, puede ser considerado como sinónimo de *símbolo incompleto*, o partícula lingüística destinada a la vinculación o modificación de expresiones. (La lógica tradicional habla, en este sentido de términos *sincategoremáticos*, por oposición a los *categoremáticos*, que tienen sentido aisladamente, como los nombres y verbos.) Los conectores y cuantificadores pueden ser considerados como operadores lógicos.

[4] Por composición de unas funciones con otras se obtienen funciones de funciones. P. ej.: siendo f la función cuadrado y g la función cubo:

$$f(f(x)), f(g(x))$$

serían, respectivamente, el cuadrado del cuadrado de x y el cuadrado del cubo de x.

ción de que tanto sus argumentos como sus valores son números. E igualmente sucede en la aplicación de este concepto a las ciencias empíricas. Cuando se dice, por ejemplo, que la presión de un gas es función de su volumen y su temperatura (ley de Boyle), se trata obviamente de una función entre magnitudes numéricas.

Debemos a FREGE la extensión del concepto de función al campo del lenguaje y de la lógica. Basta al respecto con levantar la restricción de que los argumentos y los valores hayan de ser números. La expresión «autor de» puede ser considerada como una función, cuyos argumentos serían nombres de obras literarias o artísticas y cuyos valores vendrían a ser los nombres de los autores de tales obras:

Autor de (*Quijote*) = Cervantes
Autor de (*Hamlet*) = Shakespeare.

Una función es una *función lógica* cuando sus argumentos y sus valores son entidades y valores lógicos. El concepto de *función enunciativa*, asimismo debido a Frege, es el de un predicado vacío: *Px*, que se convierte en enunciado tan pronto se especifique un parámetro adecuado: *Pa*, *Pb*, etc. La función sería aquí el predicado, el argumento lo sería el parámetro elegido, y el valor (variable dependiente) el enunciado resultante. De otra parte, como ya se vio en el Capítulo IV, § 1, todas las fórmulas de la lógica de conectores pueden ser consideradas como *funciones de verdad*, dado que el valor de verdad de las fórmulas moleculares de esa parte de la lógica, depende, o es función, del valor de verdad de las fórmulas atómicas de que se compongan. (P. ej., la verdad de $p \vee q \rightarrow r$ es función de la verdad de sus componentes p, q, r.)

Términos. En páginas anteriores distinguimos entre términos singulares (nombres propios) y términos universales (nombres comunes), con la indicación de que en un sentido más restringido llamaríamos términos solamente a los singulares. Pero dentro de los términos singulares podemos subdistinguir con el lenguaje natural entre términos simples, como «Cervantes» y complejos, como «autor del *Quijote*». En nuestro lenguaje formal no disponíamos hasta ahora de más términos que las constantes o parámetros individuales (términos simples). Pero una función es, formalmente hablando, un término singular complejo. La introducción de funciones en el cálculo exige revisar la definición técnica de «término» y «fórmula atomica» Esta revisión se adelantó, como recordará el lector, en el

Capítulo II, § 9, nota 14, y a ella podemos remitirnos ahora. En nuestra notación lógica de funciones suprimimos eventualmente los paréntesis que envuelven los argumentos en la notación matemática usual. Como letras metalingüísticas para denotar términos (simples o complejos) emplearemos: t, r, s, ...

§ 2. *Identidad*

La relación «igual a» o «idéntico a», a la que denotaremos por el símbolo «=», ocupa un lugar muy importante en el lenguaje matemático. Es la base de toda ecuación e interviene en la formulación de aserciones básicas, como el famoso principio de Euclides, según el cual «dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí».

Pero la idea de «igualdad» o «identidad» forma asimismo parte principal del lenguaje cotidiano (a esa idea nos remitimos, verbigracia, al exhibir nuestro documento de identidad ante el policía de la frontera), como también del lenguaje filosófico (de hecho, el término «identidad» goza, como el de «contradicción», de una tradición venerable en la historia de la filosofía).

El sentido de la identidad viene a coincidir con alguno de los sentidos del verbo «ser», aunque no con los más usuales. Con mucha frecuencia el verbo «ser» se emplea o bien para designar la relación de inclusión entre dos clases, como cuando se dice:

(1) Todos los griegos son europeos,

o bien para designar la pertenencia de un individuo a una clase, como cuando se dice:

(2) Sócrates es griego.

El sentido del verbo «ser» en (1) se expresa en teoría de conjuntos mediante el símbolo de inclusión «$\subset$», por el que se indica que una clase está contenida en otra más amplia. El sentido del verbo «ser» en (2) es el de la relación «miembro de», que se simboliza en teoría de conjuntos mediante la letra griega «ε», para indicar que un elemento o individuo está contenido en una clase. Siendo *G* la clase

de los griegos, E la de los europeos y denotando a Sócrates por a, podríamos formalizar (1) y (2) así:

(1') $G \subset E$
(2') $a \varepsilon G$.

En ambos casos se trata, aunque ciertamente con distinto matiz, del establecimiento inequívoco de una relación entre la parte y el todo. Pero a veces solemos emplear el verbo «ser» para poner en conexión un objeto o una clase de objetos con una expresión descriptiva o definitoria, como por ejemplo, cuando decimos

(3) Todo triángulo es un polígono de tres lados

o

(4) Sócrates es el maestro de Platón.

En estos dos casos, muy particularmente en el último, el sentido del verbo «ser» viene a coincidir con el sentido que aquí daremos al signo «=». Por lo demás conviene observar que este sentido no dista demasiado del que tienen muchas igualdades matemáticas. Pues del mismo modo que al escribir:

$$3 + 2 = 5$$

identificamos dos expresiones denotativas de un mismo número o de una misma cantidad, análogamente al escribir

Sócrates = maestro de Platón

igualamos dos expresiones denotativas de un mismo individuo.

En el tratamiento del concepto de identidad pueden distinguirse tres enfoques: filosófico, lógico y matemático. Por otra parte también cabe distinguir diferentes niveles de identidad: identidad de individuos, identidad de notas o predicados, identidad de relaciones. Aquí trataremos la igualdad únicamente al nivel de identidad de individuos o «igualdad numérica» (que es el nivel en que se mueve, si bien desde otra perspectiva, lo que en muchos tratados de filosofía se denomina el «problema de la individuación»).

El concepto de identidad individual puede ser introducido por definición. Una definición lógico-filosófica del mismo fue acuñada ya por LEIBNIZ: «dos individuos son idénticos (iguales) si y sólo si no es posible hallar una nota que los diferencie». (Esta definición, según veremos inmediatamente, no es formalizable en lógica elemental.)

Otra manera de introducir el concepto de identidad, y a este procedimiento nos ajustaremos aquí, consiste en considerarla como una idea primitiva, añadiendo a la tabla de símbolos primitivos de la lógica elemental el símbolo «=», como constante predicativa diádica cuyo sentido se establece, como el de los conectores y cuantificadores, por las reglas de inferencia que lo gobiernen. En lo que sigue nos atendremos al cálculo de deducción natural de identidad y descripciones elaborado en 1957 por los lógicos americanos MONTAGUE y KALISH [5], que es el mejor acabado de los conocidos. Este cálculo presupone la lógica elemental, a la que se sobreañade, y consta de dos reglas básicas de igualdad, una de introducción y otra de eliminación del símbolo «=».

Los tópicos principales en el tratamiento lógico-matemático de la identidad son cuatro propiedades de esta relación: reflexividad, simetría, transitividad y «sustitutividad» o intercambiabilidad, de las cuales la primera y la cuarta son las más importantes.

Pero antes de pasar al estudio de estas propiedades conviene especificar algunos detalles relativos a la formulación. Al símbolo primitivo «=» le daremos el nombre de *identificador* o *igualador*. Este símbolo es un predicado diádico [6] que vincula términos, simples o complejos, constituyendo *igualdades*, *ecuaciones* o *identificaciones*. P. ej., las expresiones:

$$a = b$$
$$t_1 = t_2$$
$$fa = t$$

[5] Este cálculo fue elaborado por R. MONTAGUE y D. KALISH en la serie de artículos «Remarks on description and natural deduction», *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, vol. III (1957), fascículo 1-2, pp. 50-64, y fascículo 3-4, pp. 65-73. Este mismo cálculo se encuentra incluido en el libro de D. KALISH y R. MONTAGUE, *Logic. Techniques of formal reasoning*, Harcourt, Nueva York, 1964. Una exposición muy completa del cálculo de identidad y descripciones puede encontrarse en el libro de Jesús MOSTERÍN, *Lógica de primer orden*, Ariel, Barcelona, 1970.

[6] CHURCH emplea en el mismo sentido el símbolo I; Iab se leerá «a es idéntico a b».

(que se leen: «a es igual (o idéntico) a b», etc.), son ecuaciones que identifican dos parámetros (términos simples) en el primer caso, dos términos (simples o complejos) en el segundo y un término complejo con otro (simple o complejo) en el tercero. Las ecuaciones son modos especiales de predicación (ya que el igualador es un predicado diádico), y corresponden, por tanto, como ellas, a la categoría de fórmulas atómicas. De acuerdo con ello puede convenirse en que todo símbolo lógico tenga un alcance mayor que el símbolo «=»; así las expresiones

$$\neg\, a = b, \qquad \bigvee x\; x = a$$

deberán entenderse en el sentido de

$$\neg(a = b), \qquad \bigvee x(x = a).$$

La expresión $\neg\, t = r$, siendo t y r términos, se abrevia: $t \neq r$.

Reglas básicas del cálculo de identidad

Las reglas básicas del cálculo de identidad de KALISH-MONTAGUE son, como ya queda dicho, dos, una de introducción y otra de eliminación del símbolo «=». En ambas intervienen términos.

Regla de introducción de identidad

Id$_1$

$$\frac{Pt}{\bigwedge x(x = t \rightarrow Px)}$$

El sentido de esta regla es el siguiente: supuesto que una nota se predique de un término determinado, esa misma nota podrá predicarse de todo individuo que se identifique con dicho término.

Por virtud de esta regla puede resolverse, por ejemplo, el siguiente argumento:

El autor del *Quijote* es manco
Cervantes es el autor del *Quijote*
∴ Cervantes es manco.

(Obsérvese que este argumento no es, propiamente hablando, un silogismo de primera figura, aunque el término complejo «el autor del *Quijote*» ocupe en las premisas la posición de sujeto en la mayor y predicado en la menor. La razón de ello es que dos de los términos que utiliza: «Cervantes» y «el autor del *Quijote*» son términos singulares, no universales).

Siendo *t*: el autor del *Quijote*, *a*: Cervantes y *M*: manco, tendríamos

$$Mt, a = t \vdash Ma$$

cuya resolución sería

—	1	Mt	
—	2	$a = t$	
	3	$\wedge x(x = t \rightarrow Mx)$	**Id**$_1$ 1
	4	$a = t \rightarrow Ma$	**EG** 3
	5	Ma	**MP** 4, 2

Regla de eliminación de identidad

Id$_2$

$$\frac{\wedge \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{t} \rightarrow \mathrm{Px})}{\mathrm{Pt}}$$

Esta regla permite que lo que se predica de cualquier individuo por el hecho de ser identificable con un término determinado se predique también de ese término. Por ella se puede pasar, por ejemplo, del enunciado

Todo intérprete de Hamlet habla irónicamente

al enunciado

Hamlet habla irónicamente.

Propiedad reflexiva **(Refl)**

$$\vdash \wedge \mathrm{x}(\mathrm{x} = \mathrm{x})$$

Demostración

1	$b = a$	
2	$b = a$	**Id** 1
3	$b = a \rightarrow b = a$	**TD** 1-2
4	$\wedge x(x = a \rightarrow x = a)$	**IG** 3
5	$a = a$	$\mathbf{Id}_2$ 4
6	$\wedge x(x = x)$	**IG** 5

Comentario. Las líneas segunda y tercera se justifican por lógica de enunciados. (No se confunda la regla **Id**, de dicho cálculo, con las dos reglas $\mathbf{Id}_1$ e $\mathbf{Id}_2$ que son del nuevo.) La línea 4 se justifica por lógica de cuantificadores. La línea 5, que es la decisiva en esta demostración, se apoya en la regla básica del nuevo cálculo de igualdad $\mathbf{Id}_2$. Con este fin entendemos que la línea 4 es la premisa de dicha regla $\mathbf{Id}_2$, leyéndola del siguiente modo: de todo individuo x que se identifique con el término a, se predica la nota «ser igual a a». (Obsérvese que el predicado P de la regla $\mathbf{Id}_2$ toma aquí, en el consiguiente $x = a$ de la línea 4, la forma concreta «=a»). De donde se sigue, por $\mathbf{Id}_2$ que la nota «ser igual a a» se predica del término en cuestión, el cual es, en nuestro caso, a (línea 5). La conclusión (línea 6) se sigue sin más por la regla cuantificacional **IG**.

Propiedad de simetría **(Sim)**

$$\vdash \wedge x \wedge y(x = y \rightarrow y = x)$$

Demostración

1	$b = b$	**Refl**
2	$\wedge x(x = b \rightarrow b = x)$	$\mathbf{Id}_1$ 1
3	$\wedge x \wedge y\ (x = y \rightarrow y = x)$	**IG** 2

Comentario. La línea 1 se limita a enunciar la propiedad, ya demostrada, de simetría. La línea 2 se apoya en la regla $\mathbf{Id}_1$, entendiendo que si del término b se predica la nota «ser igual a b» (en símbolos: «b =»), tal y como se establece en la línea 1, entonces para cualquier individuo x que se identifique con dicho término b puede valer la predicación de esa nota. La conclusión (línea 3) se sigue por mero trámite cuantificacional.

Propiedad transitiva **(Tr)**

$$\vdash \bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$$

Demostración

1	$a = b \wedge b = c$	
2	$b = c$	**Simp$_2$** 1
3	$\bigwedge x(x = b \rightarrow x = c)$	**Id$_1$** 2
4	$a = b \rightarrow a = c$	**EG** 3
5	$a = b$	**Simp$_1$** 1
6	$a = c$	**MP**4, 5
7	$a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$	**TD** 1-6
8	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	**IG^3** 7

Comentario. El paso de la línea 2 a la línea 3, que se efectúa de acuerdo con **Id$_1$**, tiene lugar entendiendo que el predicado del término b en la línea 2 es la nota «ser igual a c» («=c»).

Propiedad de intercambio **(I)**

$$\vdash \bigwedge x \bigwedge y(x = y \rightarrow (Px \leftrightarrow Py))$$

Demostración

1	$\bigwedge x \bigwedge y(x = y \rightarrow y = x)$	**Sim**
2	$a = b \rightarrow b = a$	**EG^2** 1
3	$a = b$	
4	Pa	
5	$\bigwedge x(x = a \rightarrow Px)$	**Id$_1$** 4
6	$b = a \rightarrow Pb$	**EG** 5
7	$b = a$	**MP** 2, 3
8	Pb	**MP** 6, 7
9	$Pa \rightarrow Pb$	**TD** 4-8
10	Pb	
11	$\bigwedge x(x = b \rightarrow Px)$	**Id$_1$** 10
12	$a = b \rightarrow Pa$	**EG** 11
13	Pa	**MP** 12, 3
14	$Pb \rightarrow Pa$	**TD** 10-13
15	$Pa \leftrightarrow Pb$	**ICO** 9, 14
16	$a = b \rightarrow (Pa \leftrightarrow Pb)$	**TD** 3-15
17	$\bigwedge x \bigwedge y(x = y \rightarrow (Px \leftrightarrow Py))$	**IG^2** 16

Este teorema podría formularse también como regla (derivada) de intercambio para términos iguales:

$$\frac{t_1 = t_2}{Pt_1 \leftrightarrow Pt_2}.$$

Con esta ley se enuncia el principio leibniziano de indiscernibilidad de idénticos: si dos cosas son iguales, todo lo que sea verdad de la una lo será de la otra, es decir, podrán intercambiarse, salvando la verdad del contexto.

El principio de indiscernibilidad de idénticos es la proposición conversa del famoso *principio*, asimismo leibniziano, de *identidad de indiscernibles*: dos cosas son idénticas si no es posible hallar un predicado que las distinga. Este segundo principio no puede ser formalizado sin ayuda de la lógica superior, que permite la cuantificación de predicados (y no sólo de individuos, como sucede en la lógica elemental):

$$\wedge x \wedge y(\wedge P(Px \leftrightarrow Py) \rightarrow x = y).$$

La unión de ambos principios daría lugar a la definición de identidad elaborada por LEIBNIZ, a la que ya se aludió al principio de esta sección y que podemos formular así:

$$\wedge x \wedge y(x = y \leftrightarrow \wedge P(Px \leftrightarrow Py))$$

§ 3. *Descripciones*

Descripciones definidas. Es frecuente, tanto en el uso del lenguaje ordinario como en el uso del lenguaje científico, recurrir al empleo de apodos o sobrenombres para referirse a individuos, en lugar de hacerlo mediante nombres de tipo simple. Los sobrenombres y apodos son circunloquios que permiten habitualmente referirse a individuos cuando no se quiere repetir su nombre o cuando se ignora. Tales circunloquios consisten en aludir a cualquier rasgo característico del individuo de referencia. Así sucede por ejemplo cuando nos referimos a Cervantes como «el autor del *Quijote*».

A una descripción de esta suerte la llamaremos *descripción definida* o *descripción* sin más. He aquí otros varios ejemplos de descripciones:

1) el asesino de Trotsky;
2) el actual rey de Francia;
3) la tercera cifra decimal del número π;
4) la raíz cuadrada de nueve;
5) el mayor de todos los números primos;
6) el ser mayor que pueda pensarse.

El estudio de esta clase de expresiones tiene interés desde un punto de vista lógico, entre otras razones, porque no es infrecuente que se den argumentos que descansan en el uso de las mismas.

El principal rasgo formal o invariante de una descripción es el artículo determinado «*el*», por virtud del cual se hace referencia a un individuo del que se entiende ser el único que posee las notas o caracteres indicados en la descripción. Para destacar mejor el carácter formal del artículo determinado en las descripciones añadiremos a nuestra lista de símbolos un nuevo operador (la letra griega «ι» en posición invertida):

$$\text{℩x}$$

que se leerá «el x tal que...» y que se utilizará como prefijo en lugar del artículo en toda descripción definida. A este nuevo símbolo le daremos el nombre de *descriptor definido* o *descriptor* sin más.

Por ejemplo, para formalizar la descripción:

el hombre que asesinó a Trotsky,

(siendo *Hx*: *x* es hombre; *Axy*: *x* asesinó a *y*; y *a*: Trotsky), escribiremos:

$$℩x(Hx \wedge Axa),$$

y para formalizar esta otra más breve:

El asesino de Trotsky,

escribiremos:

$$℩x\, Axa.$$

Una descripción es un término (complejo) al que llamaremos

término descriptivo. Un *enunciado descriptivo* será aquel en el que intervenga uno o más términos descriptivos.

El uso de las descripciones definidas. El uso de las descripciones definidas plantea problemas críticos de importancia. Toda descripción definida pretende referirse a un individuo preexistente mediante la especificación de notas o rasgos que solamente a él le convienen. Pero la existencia de un individuo en tales condiciones no es algo que esté garantizado en principio por la descripción.

En los casos en que nos referimos por descripción a un objeto que nos es familiar o conocido, contamos obviamente con esa garantía. Por ejemplo, al decir «el autor del *Quijote*», todo el mundo piensa en Miguel de Cervantes. Pero hay ocasiones en que la persona que utiliza una descripción desconoce la identidad del objeto descrito. Por ejemplo, yo no sé si existe el objeto descrito por la expresión «el abominable hombre de las nieves». Los enunciados basados en una expresión de esa índole como

el abominable hombre de las nieves es herbívoro,

son radicalmente problemáticos, puesto que no podemos saber si son verdaderos o falsos, es decir, si el predicado le conviene o no al sujeto tal y como en ellos se afirma, dado que desconocemos la existencia y la identidad de dicho sujeto.

La dificultad que plantea el uso de las descripciones sube de punto en el caso de las ciencias abstractas, como la matemática, donde la manipulación incontrolada de descripciones puede dar lugar a graves errores. Yo puedo hablar, por ejemplo de

el mayor de todos los números primos,

y expresar esta idea en lenguaje formal (siendo Nx: x es número; Px: x es primo; y Mxy: x es mayor que y) así:

$$\iota x(Nx \land Px \land \bigwedge y(Ny \land Py \rightarrow Mxy)).$$

Pero la construcción de esta expresión no garantiza por sí sola ni mucho menos la existencia del objeto descrito por ella. De hecho hay un teorema de aritmética elemental, el teorema de Euclides, según el cual el número de números primos es infinito, y no hay, por consiguiente, ni puede haber un número primo que sea mayor que todos los demás. A la luz de esta información nos en-

contramos en situación de determinar que un enunciado descriptivo como este:

no existe el mayor de todos los números primos,

es verdadero, mientras que este otro:

el mayor de todos los números primos es mayor que once,

es falso (en la medida en que supone falsamente algo).

Para obviar estos riesgos se impone tomar el acuerdo, particularmente en lógica formal y en matemática, de no hacer uso de una descripción definida sin haber decidido previamente la cuestión de la existencia y la identidad del objeto descrito. Pero adviértase que ello no se soluciona, en el caso de que la solución sea positiva, con una mera afirmación de existencia. La descripción presupone formalmente la condición de que el individuo posee las notas que se especifiquen con carácter exclusivo o único, o lo que viene a ser lo mismo, que ningún otro individuo las posee. Es decir, además de la *aserción de existencia* (existe por lo menos un individuo tal que...), se requiere una *aserción de unicidad o exclusividad* (existe a lo sumo un individuo tal que...). Es claro que la solución al problema de la existencia no despeja sin más el de la unicidad. Una cosa es, por ejemplo, probar la existencia de antepasados animales del hombre (evolucionismo), y otra probar que hubo una y solamente una pareja de donde todo hombre procede (monomorfismo); una cosa es querer probar la existencia de la divinidad (teísmo) y otra querer probar que la divinidad es una sola (monoteísmo). La condición de unicidad para una nota cualquiera P, podría expresarse formalmente así:

$$\bigvee y \bigwedge x(Px \rightarrow x = y)$$

en donde se excluye la multiplicidad de individuos que cumplan la nota P. La doble condición de existencia y unicidad se expresaría:

$$\bigvee y(Py \wedge \bigwedge x(Px \rightarrow x = y))$$ [7].

[7] Esta doble condición se expresa formalmente de modo más breve recurriendo al empleo de un nuevo cuantificador:

$$\bigvee !$$

Cuando se tiene garantía de que el objeto de una descripción existe en tales circunstancias, es decir, cuando existe un solo objeto que satisface una descripción, se dice que esa descripción es *propia*. En caso contrario, la descripción es *impropia*.

Descripciones indefinidas. También el artículo indeterminado «un» puede servir de prefijo descriptivo, para construir descripciones de la forma: «un x tal que...». En este caso podemos hablar de *descripciones indefinidas*. La descripción indefinida presupone únicamente la condición de existencia. Según que dicha condición se cumpla o no, la descripción indefinida será, correlativamente, propia o impropia. «Uno de los hombres que dispararon sobre Kennedy» sería un ejemplo de descripción indefinida propia. HILBERT usa la letra griega «η» para denotar el operador «un». De acuerdo co ello, la notación formal de una descripción indefinida sería para un predicado cualquiera P:

$$\eta xPx$$

que se lee: «un x tal que Px».

Cálculo de descripciones

El cálculo de descripciones[8], que deberá superponerse al de la lógica elemental con identidad, se reduce esencialmente a una *regla de descripción propia* (D) cuyo sentido es el siguiente: si una condición P es realmente satisfecha por un individuo y solamente por él, entonces es lícito introducir en el cálculo una descripción del referido objeto.

---

al que puede darse el nombre de *singularizador*. (En los *Principia Mathematica* se usa en este sentido el símbolo E!) La expresión

$$V!x\ Px$$

se leerá: «existe exactamente (es decir: por lo menos y a lo sumo) un x tal que P de x».

[8] El problema de la formalización e introducción de descripciones en un sistema deductivo se remonta a FREGE, y fue ulteriormente desarrollado por RUSSELL y HILBERT. En un artículo, hoy famoso, «On denoting», publicado en 1905 en la revista *Mind* (traducción castellana de Javier Muguerza en la colección de artículos de RUSSELL, *Ensayos sobre lógica y conocimiento*, Taurus, Madrid, 1966,

Regla de descripción propia

D

$$\frac{\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)}{P\iota xPx}$$

Esta regla permite introducir descripciones tan pronto como se tenga noticia de que cumplen las condiciones de propiedad, y aun antes de saber el nombre propio particular del objeto descrito. Ello permitiría, por ejemplo, hablar de «el autor del *Fausto* aun antes de saber que el nombre de ese individuo fue Goethe.

A continuación procederemos a la demostración de *algunos teoremas del cálculo de descripción*[9] que ofrecen particular interés.

---

pp. 51-74), RUSSELL propuso una técnica de eliminación de las descripciones que obviase, o cuando menos pusiese al descubierto en cada caso los problemas inherentes a la condición de unicidad del objeto descrito. Esta técnica consiste en sustituir todo enunciado en que intervenga una descripción, como

Walter Scott es el autor de *Waverley*

por otro equivalente en que se hagan explícitas las condiciones de propiedad de la descripción. El ejemplo del enunciado descriptivo que se acaba de mencionar se convertiría en este otro:

Existe un hombre, y solamente uno, que escribió *Waverley*.
y ese hombre era Walter Scott.

O dicho en lenguaje formal (siendo *Hx*: *x* es hombre, *Exy*: *x* escribió *y*; *b*: *Waverley*, y *a*: Walter Scott):

$$\bigvee y \bigwedge x(Hy \wedge Eyb \wedge (Hx \wedge Exb \rightarrow y = x) \wedge x = a).$$

De un modo más general una descripción como: ...ιxPx... vendría a ser definida así:

$$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y) (\ldots y \ldots),$$

donde los puntos suspensivos aludirían al contexto en que figura la descripción. Esta técnica fue empleada en los *Principia Mathematica*, pero tiene el inconveniente de que no hay un modo claro de determinar el alcance del contexto.

[9] MONTAGUE y KALISH, que son, como ya se ha dicho (véase, anteriormente, nota 5) los autores del cálculo de identidad y descripciones que aquí se expone, agregan una regla básica para descripciones impropias de la cual no haremos uso:

$$\frac{\neg \bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)}{\iota xPx = \iota z \neg z = z}$$

que tiene por finalidad asignar una denotación vacía de objetos o a las descripciones definidas que incumplen las condiciones de propiedad. Véase también la obra de MOSTERÍN citada en la nota 5.

El primero de ellos, expuesto en forma de regla derivada, permite introducir una identificación que vincula a la descripción con el objeto descrito.

D*

$$\frac{\bigwedge x(Px \leftrightarrow x = a)}{\iota x Px = a}$$

Deducción

—	1	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow x = a)$	
	2	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)$	**IP** 1
	3	$P\iota x Px$	**D** 2
	4	$P\iota x Px \leftrightarrow \iota x Px = a$	**EG** 1
	5	$\iota x Px = a$	**ECO** 4,3

Observación. En la línea 4 tiene lugar la eliminación de generalizador respecto de la línea 1 empleando al efecto un término singular ya autorizado: ιxPx, introducido como sujeto de predicación en la línea 3.

$\vdash \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = \iota x Px) \leftrightarrow \bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)$ **(Teor D_1)**

Demostración

1	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow x = \iota x Px)$	
2	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)$	**IP** 1
3	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow x = \iota x Px) \rightarrow \bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)$	**TD** 1-2
4	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)$	
5	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow x = a)$	
6	$\iota x Px = a$	**D*** 5
7	$\bigwedge x (Px \leftrightarrow x = \iota x Px)$	**I** 5, 6
8	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow x = \iota x Px)$	**EP** 4, 5-7
9	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y) \rightarrow \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = \iota x Px)$	**TD** 4-8
10	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow x = \iota x Px) \leftrightarrow \bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)$	**ICO** 3-9

$\vdash \bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y) \wedge Pa \rightarrow a = \iota x Px$ **(Teor D_2)**

Demostración

1	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y) \wedge Pa$	
2	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)$	**Simp**$_1$ 1
3	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow x = \iota xPx) \leftrightarrow \bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y)$	**Teor D**$_1$
4	$\bigwedge x(Px \leftrightarrow x = \iota xPx)$	**ECO** 3, 2
5	$Pa \leftrightarrow a = \iota xPx$	**EG** 3
6	Pa	**Simp**$_2$ 1
7	$a = \iota xPx$	**ECO** 5, 6
8	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = y) \wedge Pa \leftrightarrow a = \iota xPx$	**TD** 1-7

$\vdash \bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = a) \wedge a = \iota xPx \rightarrow Pa$ **(Teor D$_2$)**

Demostración

1	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = a) \wedge a = \iota xPx$	
2	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = a)$	**Simp**$_1$ 1
3	$P\iota xPx$	**DP**$_2$
4	$a = \iota xPx$	**Simp**$_2$ 1
5	Pa	**I** 3, 4
6	$\bigvee y \bigwedge x(Px \leftrightarrow x = a) \wedge a = \iota xPx \rightarrow Pa$	**TD** 1-5

Ejercicio 1.º (KALISH-MONTAGUE, *Logic. Techniques of formal reasoning,* p. 241.) Formalizar el siguiente enunciado, consistente en la identificación de dos descripciones:

La esposa de Justiniano fue la más lasciva de las mujeres citadas por Gibbon.

Solución

Diccionario

Exy	*x* es esposa de *y*
Lxy	*x* es más lasciva que *y*
Mx	*x* es mujer
Cxy	*x* es citado por *y*
a	Justiniano
b	Gibbon

Formalización

$$\iota xExa = \iota x(Mx \wedge Cxb \wedge \bigwedge y(My \wedge Cyb \wedge \neg y = x \rightarrow Lxy))$$

Ejercicio 2.º Descubrir las incorrecciones implícitas en la siguiente cadena de argumentos:

Felipe V y Fernando VI de España fueron padre e hijo; por consiguiente, Fernando VI fue el hijo de Felipe V.

Felipe V y Carlos III de España fueron padre e hijo. Por consiguiente, Carlos III fue el hijo de Felipe V.

Por consiguiente, Fernando VI fue Carlos III.

Solución. La descripción definida «el hijo de Felipe V», que se introduce en las dos primeras conclusiones, es impropia, porque no cuenta con la condición de unicidad.

Si se formalizan estos argumentos, siendo

Rxy	x es padre de y
a	Felipe V
b	Fernando VI
c	Carlos III,

resulta

$$\begin{array}{l} \quad Rab \\ \therefore\ b = \iota xRax \\ \quad Rac \\ \therefore\ c = \iota xRax \\ \therefore\ b = c. \end{array}$$

Pero el análisis del primer argumento revela que de una predicación como

$$Rab$$

puede inferirse la condición de existencia

$$\bigvee xRax$$

pero no la condición de unicidad, que permitiría introducir una descripción. En este caso concretamente, en que se pretende obtener la

identidad de un individuo con su descripción, sería preciso primero obtener en el primer argumento el enunciado

$$\bigvee y(Ray \leftrightarrow y = b)$$

que no se sigue de la predicación inicial. Otro tanto sucede en el segundo argumento. Siendo, pues, inaceptables las conclusiones

$$b = \imath xRax$$
$$c = \imath xRax$$

no procede la identificación final

$$b = c.$$

AXIOMATIZACIÓN DE LA LÓGICA

CAPÍTULO XIII

EL MÉTODO AXIOMÁTICO

§ 1. *El método axiomático*

El tipo de deducción que más frecuentemente se utiliza en la práctica ordinaria es el natural. La deducción natural se apoya en una variada serie de reglas de inferencia, que se aproximan al uso «natural» u ordinario de las partículas lógicas [1], para extraer consecuencias derivables de ciertas hipótesis inicialmente aceptadas sin examen previo por parte del lógico. Cualquiera que sea su contenido, trátese de enunciados y datos físicos, matemáticos, históricos o jurídicos, el establecimiento de estas hipótesis es algo en principio indiferente desde el punto de vista de la deducción natural. Todo el interés de análisis y del control lógico se dirige exclusivamente a la extracción de conclusiones.

Pero en la práctica científica interesa a veces someter también a control lógico riguroso las hipótesis iniciales. Tal sucede sobre todo, aunque no exclusivamente, en el estudio de teorías matemáticas. Dicho control se efectúa escogiendo, de acuerdo con un determinado criterio de racionalidad que se convenga en aceptar, unos enunciados determinados de la teoría de que se trate, a los que se da el nombre de *axiomas* o postulados, y procurando a partir de entonces no admitir en la teoría en cuestión otros enunciados que los que se deduzcan de los axiomas por inferencia lógica. A los enunciados así deducidos se les llama *teoremas*. Tal tipo de deducción constituye el *método axiomático.*

§ 2. *Historia del método axiomático*

Los primeros que cultivaron sistemáticamente el método axiomático fueron ARISTÓTELES en lógica y EUCLIDES en matemática

[1] Estas reglas coinciden plenamente con el uso natural u ordinario de las partículas lógicas en la praxis de la matemática, pero sólo parcialmente con el uso de tales partículas en el lenguaje de la vida cotidiana.

(ambos en el siglo IV a. de C.). ARISTÓTELES se ocupa de él en su obra *Segundos Analíticos*, dedicada a la teoría de la ciencia, en la que afirma que el razonamiento científico termina en *teoremas* o proposiciones demostrables, que pueden proceder a su vez de otros teoremas; pero sostiene que, si se pregunta por el origen de éstos, la razón no puede perderse en un regreso al infinito: tiene que haber unas proposiciones indemostrables, evidentes en sí mismas, a las que él llama principios o *axiomas*. Y añade que el paso de axiomas a teoremas es deductivo y se efectúa de acuerdo con las reglas lógicas de inferencia investigadas en los *Primeros Analíticos*.

Los *Elementos* de geometría de EUCLIDES, algo posteriores en el tiempo, han dominado la enseñanza de la matemática durante dos mil años. Los trece libros de que se compone la obra constituyen una formidable cadena deductiva de leyes matemáticas que tiene por base una triple serie de *postulados* (reglas técnicas de construcción geométrica, la quinta de las cuales es el famoso postulado de las paralelas), *nociones comunes* o axiomas (como «dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí» o «el todo es mayor que la parte») y *definiciones* de conceptos basicos de geometría (punto, línea, plano, figura, etc.).

En la época moderna, el interés de VIETA (siglo XVI) por la formalización del lenguaje matemático y de LEIBNIZ (siglo XVII) por la formalización de la matemática y de la lógica han contribuido notablemente al desarrollo de dicho método.

A él se ajustan incluso obras clásicas de la ciencia y la filosofía de la época, como los *Principios matemáticos de filosofía natural* de Newton o la *Ética demostrada según el orden geométrico* de Spinoza.

A partir del siglo XIX vuelve el método axiomático a alcanzar resonantes triunfos. El descubrimiento de las geometrías no euclidianas indujo a los matemáticos a desconfiar de la intuición espacial (en que se basaba la geometría euclidiana tradicional) y a buscar el fundamento de la geometría, y de la matemática en general, en el rigor del análisis y de las construcciones de la lógica. Las nuevas técnicas de formalización, introducidas en matemática y lógica por FREGE a fines del siglo XIX y por PEANO, RUSSELL y HILBERT a principios del XX, se vinculaban al própósito de fundamentar axiomáticamente la ciencia matemática. Un brillante resultado de este nuevo desarrollo del método axiomático es la actual *teoría axiomática de conjuntos*.

§ 3. *Formalización del método axiomático*

Una teoría axiomatizada es, pues, una teoría deductivamente ordenada en axiomas y teoremas según reglas de inferencia. La axiomatización adquiere mayor rigor cuando va acompañada de la formalización de la teoría científica que se trate de axiomatizar. El resultado de formalizar y axiomatizar una teoría científica es una *teoría formal* o *sistema formal* [2] o *axiomático*. Todo sistema axiomático debe constar de estos cuatro ingredientes:

(1) una tabla de símbolos primitivos, o alfabeto;
(2) un repertorio de reglas de formación de fórmulas [3];
(3) una lista de axiomas o postulados, que son las fórmulas primitivas del sistema; y
(4) un repertorio de reglas de inferencia.

Los dos primeros ingredientes componen, por así decirlo, el lenguaje o «gramática», y los otros dos la «lógica» del sistema.

Al concepto de regla de inferencia va unido el de *consecuencia inmediata* o *directa*. La regla de inferencia establece que una fórmula, llamada conclusión, puede ser inferida de otra u otras, llamadas premisas de la regla: la conclusión de la regla es consecuencia inmediata o directa de las premisas.

Una *demostración* [4] o *prueba* es una secuencia finita de fórmulas tales que cada una de ellas o bien es un axioma o bien una consecuencia inmediata de alguna o algunas de las que le preceden por virtud de una regla de inferencia. La fórmula final de la demostración es un *teorema*, o *fórmula derivada*.

Los términos teorema y axioma tienen aquí un sentido distinto al tradicional. Tradicionalmente se entendía por axioma una proposición inmediatamente evidente (verdad inmediata); por teorema, una proposición no inmediatamente evidente (verdad mediata) que se deduce de los axiomas; y por postulado, un principio que no se

---

[2] En rigor, la noción de sistema formal es más amplia que la de sistema axiomático. Por sistema formal se puede entender también un sistema de reglas de deducción natural. A un sistema formal considerado en su dimensión puramente sintáctica se lo llama también *cálculo*.

[3] Este repertorio puede incluir también, eventualmente, reglas de formación de términos.

[4] La demostración es un tipo de deducción (cfr. Cap. III).

acepta por necesidad, como el axioma, sino por convención. Hoy se entiende por axioma, simplemente, una fórmula del sistema convencionalmente elegida, es decir, algo parecido a lo que la tradición entendía por postulado. Desde un punto de vista estrictamente formal, la diferencia entre axioma y teorema queda un tanto trivializada . El axioma puede ser considerado como un teorema obtenido mediante una demostración de cero premisas. Teorema sería entonces: o bien cualquier axioma, o bien toda conclusión de una regla cuyas premisas sean teoremas.

En la elaboración de un sistema formal es útil, aunque no necesario, disponer también de *definiciones*, que son cláusulas por las que se introducen nuevos símbolos (*símbolos definidos* o *derivados*) en función de los ya conocidos, lo cual permite abreviar cómodamente la escritura de las fórmulas del sistema [5].

Finalmente, y una vez elaborado en su dimensión *sintáctica*, el sistema deberá ser *interpretado*, esto es, puesto en relación con el conjunto de los objetos considerados por la teoría científica que pretenda formalizar. (P. ej., con los números naturales, si se pretendiera axiomatizar la aritmética.)

Tal será la dimensión *semántica* del sistema.

---

[5] P. ej., la definición: $A \leftrightarrow B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ se entendería como convención para abreviar la formula: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, escribiendo en su lugar: $A \leftrightarrow B$. Este sentido que tiene la definición en los sistemas formales no es, naturalmente, el único de la palabra «definición».

CAPÍTULO XIV

SISTEMAS AXIOMÁTICOS DE LÓGICA ELEMENTAL

§ 1. *Axiomatización de la lógica*

La matematización de la lógica trajo consigo la voluntad de axiomatizarla. Puede decirse que debemos a FREGE (dejando aparte anteriores ensayos realizados por ARISTÓTELES y LEIBNIZ) la primera axiomatización absolutamente formalizada de la lógica elemental. A partir de este intento se han confeccionado otros sistemas con algunas variantes de criterio, sobre todo en lo que respecta a la lógica de enunciados. En el presente capítulo expondré en forma sucinta un sistema axiomático de lógica elemental con noticia adicional de otros sistemas similares. Finalmente consideraré algunos ejemplos de axiomatización de teorías matemáticas, que rebasan el ámbito de la lógica.

En realidad, buena parte de los ingredientes que integran un sistema axiomático de lógica han sido ya utilizados por nosotros al confeccionar el sistema de reglas de cálculo para la deducción natural. Lo que, en definitiva, distingue a la deducción axiomática de la natural es la presencia de axiomas, y a la consideración de tales elementos y de su papel en la deducción reduciremos esencialmente nuestro examen.

Pero antes de seguir adelante conviene hacer una observación previa sobre los criterios de confección de un sistema axiomático. El número de nociones primitivas, axiomas y reglas de inferencia que en concreto se establezca como base para la edificación de un sistema axiomático es hoy considerado materia de convención. Si el principal propósito es la facilidad inicial en la obtención de fórmulas derivadas (teoremas), como también el estudio pormenorizado de las diferentes partes o zonas del sistema, interesará que el repertorio de axiomas y/o el repertorio de reglas de inferencia sea variado. Pero si lo que se pretende, y este es nuestro caso, es más bien obtener una visión sintética del sistema, con vistas a la determinación de las propiedades que lo caracterizan globalmente, y que deberán ser demostradas a título

de *metateoremas* [1], entonces interesará que prevalezca el criterio de economía, es decir, que el número de símbolos primitivos, axiomas y reglas sea mínimo, entre otras razones, para facilitar, por brevedad de recorrido, la aplicación del principio de inducción semiótica [2] en la demostración de los metateoremas que lo requieran.

§ 2 *Sistema axiomático de lógica elemental*

A continuación se expone un sistema axiomático de lógica elemental o de primer orden [3], ideado por CHURCH 1956 [4], que denominamos **L.** La confección de este sistema se ajusta al criterio de economía de supuestos, y en él se apoyará la demostración de los principales metateoremas en los Capítulos XV y XVI.

Símbolos. Los símbolos lógicos primitivos del sistema son solamente tres, dos conectores:

$$\rightarrow \text{ (implicador)}, \neg \text{ (negador)}$$

---

[1] Al estudio de los principales metateoremas se dedican los Capítulos XV-XVI.

[2] Véase Capítulo VII, § 7.

[3] Recordamos al lector que la lógica elemental o de primer orden, que es la parte más simple de la lógica formal, se caracteriza porque en ella las únicas variables susceptibles de ser cuantificadas son las variables de individuo. Sobre la lógica de primer orden cabe edificar lógicas de orden superior que permiten cuantificar también las letras predicativas.

Dentro de la lógica elemental se distinguen dos estratos ya conocidos por nosotros: la lógica de conectores (lógica de enunciados) y la lógica de cuantificadores (lógica cuantificacional, también llamada lógica de predicados o cálculo funcional). Esta última se subdivide a su vez en lógica cuantificacional monádica y lógica cuantificacional poliádica.

La lógica elemental puede ser *pura* (cuando no contiene constantes predicativas ni individuales) o *aplicada* (cuando las incluye). Frecuentemente la lógica elemental es suplementada con la intervención de términos complejos y la adición de la constante predicativa (diádica): «=» (lógica de la identidad o de la igualdad).

[4] A. CHURCH desarrolló su sistema, al que sigue gran número de tratadistas lógicos, en la obra *Introduction to mathematical logic,* vol. I, Princeton, 1956. Los axiomas correspondientes a la lógica de enunciados se inspiran en LUKASIEWICZ y los correspondientes a la lógica de predicados en RUSSELL. (Véase, más abajo, § 5, A y C.)

Un sistema contemporáneo del sistema de CHURCH, que goza asimismo de gran predicamento entre los tratadistas es el de KLEENE, 1952, inspirado en HILBERT; una reseña del sistema de lógica elemental de KLEENE y del sistema de HILBERT para la lógica de enunciados figuran más adelante en este Capítulo (§ 3 y § 5, B).

y un cuantificador

$\wedge$ (generalizador)

Los símbolos no lógicos son los ya establecidos por nosotros en el Capítulo II, § 7.

Fórmulas. Las reglas de formación de fórmulas son también, con ligeras restricciones, las ya establecidas en el referido Capítulo II, § 9 [5].

Axiomas

A1 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
A2 $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3 $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
A4 $\vdash (A \rightarrow Pa) \rightarrow (A \rightarrow \wedge xPx)$ *Condición:* «a» no debe figurar en «A».
A5 $\vdash \wedge xPx \rightarrow Pa$

El lector advertirá que estas expresiones no son, en rigor, axiomas, sino esquemas de axiomas (véase nota 5). En adelante hablaremos de fórmulas, axiomas y teoremas refiriéndonos también, eventualmente, a esquemas de fórmula, de axioma o de teorema.

Los tres primeros axiomas corresponden a la lógica de enunciados. A1 es la ley de afirmación de consecuentes (carga de premisas); A2 es la ley de autodistribución del implicador; y A3 es la ley de contraposición [6].

Los dos últimos axiomas corresponden a la lógica de predicados. A4 es la ley de introducción condicionada del generalizador y supone el requisito de que a no ocurra en A ni tampoco en la matriz

[5] Para comodidad del lector se las resume aquí brevemente. Serán fórmulas atómicas: p, q, r, . . . , Pa, Pb, Pabc, . . . (eventualmente con intervención de términos complejos). Serán fórmulas moleculares: 1. $\neg A$, si A es una fórmula; 2. $A \rightarrow B$, si A y B son fórmulas; 3. $\wedge xPx$, si Pa es una fórmula. Las letras metalingüísticas A, B, C denotan fórmulas cualesquiera; las expresiones $A \rightarrow B$, Pa (en letra no cursiva) no son, propiamente hablando, fórmulas sino esquemas de fórmulas. También son metalingüísticos los símbolos $\leftrightharpoons$ (para definición) y $\vdash$ (para deducción), el cual indicará, cuando se anteponga a una fórmula o esquema de fórmula, que se trata de un axioma o teorema del sistema. Eventualmente, puede ir precedido de supuestos.

[6] Un sistema de análoga estructura resultaría utilizando en lugar de A1, el principio de PEIRCE $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$; en lugar de A2, la fórmula $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$; y en lugar de A3, la ley de (eliminación de) doble negación $\neg \neg A \rightarrow A$.

de la generalización final; y A5 es la ley de instanciación universal (eliminación de generalizador).

Símbolos definidos. Las cuatro definiciones que siguen permiten introducir los restantes signos lógicos usuales en función de los tres primitivos:

D1 $A \wedge B \leftrightharpoons \neg (A \rightarrow \neg B)$
D2 $A \vee B \leftrightharpoons \neg A \rightarrow B$
D3 $A \leftrightarrow B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
D4 $\bigvee xPx \leftrightharpoons \neg \bigwedge x \neg Px$

Reglas de inferencia. Las reglas primitivas de inferencia son solamente dos, una [7] para la lógica de enunciados:

R1 (*Modus ponens*, **MP**)

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

y otra para la lógica de predicados:

R2 (Generalización, **Gen**)

$$\frac{A \rightarrow Pa}{A \rightarrow \bigwedge xPx}$$

(a condición de que a no figure en A ni en la matriz de $\bigwedge xPx$).

[7] En las primeras axiomatizaciones de la lógica se formulaba explícitamente también la *regla de sustitución*, según la cual si se sustituye en un axioma o un teorema de la lógica de enunciados una cualquiera de sus letras enunciativas, en todas las ocurrencias de la misma dentro del axioma o teorema en cuestión, por una fórmula cualquiera, el resultado continúa teniendo el mismo valor lógico que la fórmula inicial. El uso explícito de la regla de sustitución es necesario cuando el sistema formal es presentado en lenguaje objeto. Pero cuando el sistema es expuesto en metalenguaje, de suerte que los axiomas y teoremas son realmente esquemas de axiomas y esquemas de teoremas, la operación de sustitución se convierte en trámite metalingüístico y puede ser omitida en la enumeración de reglas de inferencia, ya que, por definición, cualquier letra metalingüística está por cualquier fórmula o esquema de fórmula (la misma sin duda, en cada una de las ocurrencias de esa misma letra en un esquema de fórmula determinado), y por cualquier fórmula o esquema de fórmula puede, obviamente, ser reemplazada. La idea de trasladar la operación de sustitución al plano metalingüístico es de VON NEUMANN (1927).

Deducción de teoremas. Con tan exiguo arsenal de supuestos, la obtención de nuevas fórmulas ha de atenerse rígidamente al siguiente procedimiento:

1) Si la fórmula problema guarda relación de identidad formal con alguna de las fórmulas o esquemas de fórmula ya admitidos, entonces puede considerarse admitida sin más, puesto que se tratará tan sólo de una instancia o una variante literal, obtenida por sustitución, a partir de la fórmula o esquema de fórmula previamente admitido [8].

2) En el caso de que no sea viable esta primera medida, se hará coincidir la fórmula problema, mediante los oportunos cambios literales (sustituciones), con el extremo final subsiguiente a un implicador en cualquiera de las fórmulas o esquemas de fórmula ya admitidos.

3) Acto seguido se tratará de liberar este consecuente (es decir, la fórmula problema) del antecedente o los antecedentes que lo condicionen. Ello se efectuará por aplicación de la regla R2 (*modus ponens*), siendo la premisa superior de la regla la fórmula o esquema de fórmula en cuyo extremo terminal figure ahora la fórmula problema, y siendo la premisa inferior de la regla cualquier fórmula o esquema de fórmula ya admitido que sea formalmente idéntico al antecedente a eliminar de la premisa superior. A este fin convendrá efectuar previamente los cambios literales que procedan en la fórmula cuyo antecedente se desee eliminar o en la fórmula o esquema de fórmula admitido que guarde relación de identidad formal con dicho antecedente y deba hacer las veces de premisa inferior de la regla.

La primera fórmula a deducir será la *ley de identidad*, que anotaremos T1 (Teorema 1):

$$\text{T1} \quad \vdash A \rightarrow A$$

Obsérvese que para derivar esta fórmula en este momento se cuenta con un número muy reducido de supuestos: concretamente, los esquemas de axiomas A1 y A2 y la regla de inferencia R1. Ello se advierte considerando que la fórmula a deducir es de lógica de enun-

[8] P. ej., si el esquema de fórmula a deducir fuese: $A \rightarrow (B \vee C \rightarrow A)$, se lo admitiría inmediatamente considerando sin más que se trata de una mera variante literal del esquema de axioma A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, en donde B es una letra metalingüística que está por cualquier fórmula o esquema de fórmula, entre otros $B \vee C$.

ciados (lo cual permite excluir de antemano cualquier recurso a los dos últimos esquemas de axioma A4 y A5, que corresponden exclusivamente a la lógica de predicados, y por igual razón cualquier recurso a la regla R2); por otra parte la fórmula a deducir está exenta de negador (lo cual permite excluir también, en principio, el esquema de axioma A3).

El teorema a obtener no es formalmente idéntico a A1 ni A2. Pero si se reescribe A2 cambiando la letra C en sus dos ocurrencias por A, resultará una versión formalmente identificable del mismo axioma, con la circunstancia de que esta vez queda incluido como subfórmula terminal el teorema a demostrar:

$$1 \quad (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)).$$

El problema se reduce ahora a liberar dicha subfórmula terminal $A \rightarrow A$ de los antecedentes que la condicionan, lo cual deberá efectuarse con ayuda de la regla R1. Con vistas a dicha liberación realizamos en la fórmula anterior una segunda transformación, consistente en cambiar ahora la letra B —en sus dos ocurrencias, forzosamente— por la misma fórmula $A \rightarrow A$. El resultado será, pese a su aparentemente artificiosa complejidad, una nueva instancia o variante literal del referido axioma A2, cuya estructura formal no sufre realmente alteración. Con ello tenemos convenientemente «preparada» [9] la primera línea de la prueba:

$$1 \quad (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$$

El antecedente de la línea 1 se obtiene fácilmente cambiando en el axioma A1 la letra B, en su única ocurrencia, por el esquema $A \rightarrow A$, lo cual es correcto:

$$2 \quad A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A).$$

Aplicando la regla R1 a las líneas 1 y 2, por este orden, quedará liberado el consecuente de la primera, que será la nueva línea

[9] El lector observará que el plan de la deducción, que se centra en la preparación de la línea inicial, no es tarea mecánica, sino heurística, de ensayo y error, que requiere una cierta inventiva. Una vez descubierto el plan, la ejecución de la deducción sí es, naturalmente, tarea mecánica.

3 $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$.

Queda por eliminar el antecedente de la línea 3. Dicho antecedente puede ser construido también a partir del axioma A1, pero cambiando esta vez la letra B, en su única ocurrencia, por la letra A, lo que es igualmente correcto:

4 $A \to (A \to A)$.

En este momento la aplicación de R2 a las líneas 3, 4 permite obtener como conclusión el teorema buscado:

5 $A \to A$.

He aquí el esquema completo de la deducción:

1	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	A2
2	$A \to ((A \to A) \to A)$	A1
3	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	**MP** 1,2
4	$A \to (A \to A)$	A1
5	$A \to A$	**MP** 3,4

§ 3. *La regla de deducción*

En las exposiciones actuales del sistema axiomático de lógica elemental, es usual obtener como regla derivada R3 el *teorema de deducción* [10], a partir de los dos primeros axiomas A1 y A2 [11], la regla de inferencia R1 y el teorema de identidad T1. El uso de la regla R3, que tiene aquí carácter de metateorema, facilita extraordinariamente la derivación de nuevas fórmulas.

Introduciremos primero la regla de deducción para la lógica de enunciados y consideraremos después la extensión de la misma a la lógica de predicados.

---

[10] La formulación inicial del teorema de deducción se debe, independientemente, a HERBRAND y a TARSKI (1930). El lector debe estar ya familiarizado con este teorema, que GENTZEN utilizó como regla básica de *introducción de implicador* en su sistema de deducción natural (véase Cap. V, § 2). En los sistemas axiomáticos actuales (CHURCH 1956, KLEENE 1952, MENDELSON 1964) el teorema de deducción se introduce como regla derivada.

[11] O de los dos axiomas análogos mencionados en la nota 6.

La REGLA DE DEDUCCIÓN se enuncia así: *si es posible deducir una fórmula B de una serie de fórmulas* Γ *(que eventualmente puede ser vacía) y de otra fórmula A, entonces es posible deducir también la implicación* $A \rightarrow B$ *de la referida serie de fórmulas* Γ. Dicho abreviadamente:

$$si\ \Gamma, A \vdash B,\ entonces\ \Gamma \vdash A \rightarrow B.$$

Demostración. Llamaremos *deducción supuesta*, Δ_n, a la deducción de B a partir de Γ, A, entendiendo que el subíndice de Δ_n ($n \geq 1$) es el número de líneas (necesariamente finito) de la referida deducción, que la enunciación de la regla supone ya dada. Llamaremos *deducción subsiguiente*, Δ', a la deducción de $A \rightarrow B$ a partir de Γ, que es la deducción cuya existencia es preciso demostrar. A este fin se probará por inducción [12] que cualquiera que sea el número de líneas *n* de la deducción supuesta Δ_n, habrá siempre una deducción subsiguiente correlativa Δ', tal que $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Base de la inducción: n = 1. La deducción supuesta se reduce a una sola línea: $\vdash$ B. Pero ello sólo puede suceder porque B es: o bien (1) una fórmula de la serie Γ; o bien (2) la fórmula A; o bien (3) un axioma. Considerando dada ya la deducción supuesta, que anotaremos a la izquierda, construiremos a la derecha, en cada uno de estos casos, la deducción subsiguiente que corresponda.

Deducción supuesta, Δ_1	Deducción subsiguiente, Δ'	
	Casos 1 y 3	
$\vdash$ B	$B \rightarrow (A \rightarrow B)$	A1
	B	Δ_1
	$A \rightarrow B$	**MP**
	Caso 2	
$\vdash$ A	$A \rightarrow A$	T1

Paso de la inducción. En este paso hay que probar la existencia de Δ' para cualquier Δ_n, apoyándose en la correspondiente hipótesis inductiva, que podemos enunciar así: para cualquier deducción

[12] Sobre el concepto de inducción matemática, véase Cap. VII, § 7, y también Cap. XIV, § 8.

dada Δ_k, siendo $k < n$, existe, correlativamente, una deducción subsiguiente Δ'.

Siendo Δ_n una deducción supuesta de n líneas, para cualquier n, sea B_n su conclusión, es decir, la última línea de esa deducción. Pero B_n habrá de ser forzosamente: o bien (1) una fórmula de Γ; o bien (2) la fórmula A; o bien (3) un axioma; o bien, finalmente, (4) resultado de la aplicación de la regla R1 *(modus ponens)* a dos fórmulas situadas en dos líneas que anteceden a la línea n.

En los tres primeros casos, se demuestra la existencia de Δ' por idéntico procedimiento al que acabamos de utilizar en la base. En el caso 4, B_n procede, necesariamente, de dos premisas anteriores B_j y B_m, cuyos números de línea j, m son menores que n, y siendo además una de ellas, $B_j \leftrightharpoons B_m \rightarrow B_n$. Para ambas premisas nos permite suponer la hipótesis inductiva que es posible, correlativamente, deducir: $\vdash A \rightarrow (B_m \rightarrow B_n)$ y $\vdash A \rightarrow B_m$. La deducción subsiguiente Δ'que corresponda a Δn y cuya existencia hay que probar aquí, tendrá la siguiente estructura:

$A \rightarrow (B_m \rightarrow B_n)$	Hip.ind.
$A \rightarrow B_m$	Hip.ind.
$(A \rightarrow (B_m \rightarrow B_n)) \rightarrow ((A \rightarrow B_m) \rightarrow (A \rightarrow B_n))$	A2
$(A \rightarrow B_m) \rightarrow (A \rightarrow B_n)$	**MP**
$A \rightarrow B_n$	**MP**

NOTA SOBRE EL SISTEMA AXIOMÁTICO DE LÓGICA ELEMENTAL DE KLEENE. Un sistema axiomático reciente de lógica elemental, que puede ser también considerado, como el de CHURCH 1956 (véase anteriormente, § 2, nota 4), clásico entre los actuales tratadistas de lógica, es el desarrollado en 1952 por S. C. KLEENE en su *Introducción a la metamatemática*, Tecnos, Madrid, 1974.

Este sistema, inspirado en HILBERT-BERNAYS 1939 (véase, más adelante, § 5, B), opta por la vía de la abundancia en la elección de símbolos primitivos y axiomas.

Símbolos primitivos lógicos son los cuatro conectores:

$\supset$ (implica), & (y), $\vee$ (o), $\neg$ (no),

y los dos cuantificadores:

$\forall$ (para todo), $\exists$ (existe).

(La equivalencia: A ~ B, es definida ulteriormente como conjunción de las implicaciones recíprocas de A y B.)

Los *postulados* (axiomas y reglas) se dividen explícitamente en dos grupos, uno para la lógica de enunciados (cálculo proposicional en la terminología de KLEENE) y otro para la lógica de predicados (*o. c.*, pp. 81-82):

Grupo A. Postulados del cálculo proposicional.

(postulados de implicación)

1a. $A \supset (B \supset A)$

1b. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

2. $\dfrac{A, A \supset B}{B}$

(postulados de conjunción)

3. $A \supset (B \supset A \& B)$

4a. $A \& B \supset A$

4b. $A \& B \supset B$

(postulados de disyunción)

5a. $A \supset A \vee B$

5b. $B \supset A \vee B$

6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

(postulados de negación)

7. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

8.º $\neg\neg A \supset A$

Grupo B. Postulados del cálculo de predicados

9. $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$

10. $\forall x A(x) \supset A(t)$

11. $A(t) \supset \exists x A(x)$

12. $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$

Observaciones. La lectura de estas fórmulas no planteará problema al lector, porque se basan en un alfabeto similar al de este libro.

Por A(x) se entiende una fórmula que tenga libre la variable x. Las reglas de inferencia están incluidas, en forma de figuras deductivas, en la lista de postulados (postulados 2, 9, 12). En los postulados cuantificacionales 9 y 12 se supone que x no está libre en C; en los postulados 10 y 11, que t es un término que puede sustituir a x. La marca ° adosada al postulado 8 denota el carácter «no intuicionista» del mismo. Sin ese postulado, el Grupo A con todas sus consecuencias es aceptable por los intuicionistas. (Véase Cap. XV, § 1, nota 1.)

*§ 4. *Selección de teoremas. Dualidad*

El lector deberá tener en cuenta que en las dos primeras partes de este libro han sido tratados y deducidos detalladamente, desde el punto de vista de la deducción natural, gran número de teoremas de lógica elemental. La novedad del presente capítulo no está en la materia tratada, sino en el punto de vista y en el modo de tratarla, que es ahora el axiomático. Por esta razón nuestra intención debe ser aquí más teórica que práctica. En las dos secciones anteriores hemos concentrado principalmente la atención en la exposición y el análisis de los elementos basicos del sistema axiomático de lógica elemental y en las líneas generales y los objetivos estratégicos de la deducción axiomática de teoremas. Pero por lo que se refiere a las pruebas detalladas de éstos, nos limitaremos ahora a una breve selección, que se ceñirá a aquellos que sean útiles para la demostración de metateoremas en los Capítulos XV y XVI, donde la materia es enteramente nueva.

Por lo demás, suponemos al lector ya familiarizado con la práctica de la deducción formal y prescindiremos totalmente de las reiteradas observaciones y pesados comentarios que sirvieron de continuo acompañamiento didáctico en el estudio de la deducción natural. A su iniciativa dejamos el comparar las deducciones ahora expuestas con las anteriormente establecidas de las mismas fórmulas, o el intento de probar axiomáticamente fórmulas no tratadas en este capítulo pero ya conocidas por deducción natural.

La relación de teoremas [13] a demostrar en esta sección es la siguiente:

---

[13] Todos estos teoremas son ya, de un modo u otro, prácticamente conocidos por el lector, T2 es la ley del silogismo hipotético. T3 es la ley de negación de antecedente (*ex contradictione quodlibet*). T4 y T5 son las leyes de (eliminación y de introducción) de doble negación. T6 y T7 son modalidades de la ley de contraposición. T8

T1. $\vdash A \rightarrow A$
T2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
T3. $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
T4. $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
T5. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
T6. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
T7. $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
T8. $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
T9. $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (A \rightarrow B))$
T10. $\vdash A \rightarrow \neg (A \rightarrow \neg A)$
T11. $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$
T12. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
T13. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$
T14. $\vdash Pa \rightarrow \bigvee xPx$
T15. $\vdash \bigwedge xPx \rightarrow \bigvee xPx$
T16. $\vdash \bigwedge x\neg Px \rightarrow \neg\bigvee xPx$
T17. $\vdash \neg\bigwedge xPx \rightarrow \bigvee x\neg Px$
T18. $\vdash \bigwedge x \bigwedge yPxy \leftrightarrow \bigwedge y \bigwedge xPxy$

La regla de deducción facilita grandemente la obtención de nuevos teoremas. Gracias a ella podremos, a partir de ahora, cuando se nos exija la prueba de una implicación, empezar suponiendo los antecedentes y dedicarnos sin más a la búsqueda del consecuente. Porque una vez sea demostrado este último, las oportunas aplicaciones de la regla de deducción proporcionan la implicación deseada.

Comenzamos nuestra selección de teoremas, con la prueba axiomática del principio del silogismo hipotético:

T2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Bastará deducir:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$$

---

es una versión del *modus ponens* en forma de teorema (no de regla). T11 y T12 son formulaciones del principio apagógico de reducción al absurdo. T15 es la ley de descenso cuantificacional. T17 es la primera parte de la equivalencia que define la negación del generalizador, y T16 es la segunda parte de la equivalencia que define la negación del particularizador.

1	$A \to B$	Suposición
2	$B \to C$	Suposición
3	A	Suposición
4	B	**MP** 1,3
5	C	**MP** 2,4

Porque una vez se ha establecido que : $A \to B, B \to C, A \vdash C$, el **TD** nos permite pasar primero a: $A \to B, B \to C \vdash A \to C$, luego a $A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$, y finalmente a T2. Para mayor comodidad en futuras deducciones entenderemos también que T2 tiene la forma: $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

T3. $\vdash \neg A \to (A \to B)$

Bastará deducir:

$$\neg A \vdash A \to B$$

1	$\neg A$	Suposición
2	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	A1
3	$\neg B \to \neg A$	**MP** 2,1
4	$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	A3
5	$A \to B$	**MP** 4,3

Porque una vez se ha establecido que: $\neg A \vdash A \to B$, por una sola aplicación de **TD** resulta T3.

T4. $\vdash \neg\neg A \to A$

Bastará establecer:

$$\neg\neg A \vdash A$$

1	$\neg\neg A$	Suposición
2	$\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	T3
3	$\neg A \to \neg\neg\neg A$	**MP** 2,1
4	$(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	A3
5	$\neg\neg A \to A$	**MP** 4,3
6	A	

Acto seguido se hará uso de **TD**.

T5. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

1	$\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	T4
2	$(\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$	A3
3	$A \rightarrow \neg\neg A$	**MP** 2,1

T6. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Estableciendo:

$$A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$$

1	$A \rightarrow B$	Suposición
2	$\neg\neg A \rightarrow A$	T4
3	$\neg\neg A \rightarrow B$	T2 2,1
4	$B \rightarrow \neg\neg B$	T5
5	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	T2 3, 4
6	$(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	A3
7	$\neg B \rightarrow \neg A$	**MP** 6,5

Acto seguido se hará uso de **TD**. En adelante omitiremos esta referencia.

T7. $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

$$A \rightarrow \neg B, B \vdash \neg A$$

1	$A \rightarrow \neg B$	Suposición
2	B	Suposición
3	$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow \neg A)$	T6
4	$\neg\neg B \rightarrow \neg A$	**MP** 3,1
5	$B \rightarrow \neg\neg B$	T5
6	$\neg\neg B$	**MP** 5,2
7	$\neg A$	**MP** 4,6

T8. $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

1.	A	Suposición
2.	$A \to B$	Suposición
3.	B	**MP** 2,1

T9. $\vdash A \to (\neg B \to \neg (A \to B))$

$$A \vdash \neg B \to \neg (A \to B)$$

1	A	Suposición
2	$A \to ((A \to B) \to B)$	T8
3	$(A \to B) \to B$	**MP** 2,1
4	$((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$	T6
5	$\neg B \to \neg (A \to B)$	**MP** 4,3

T10. $\vdash A \to \neg (A \to \neg A)$

$$A \vdash \neg (A \to \neg A)$$

1	A	Suposición
2	$A \to ((A \to \neg A) \to \neg A)$	T8
3	$(A \to \neg A) \to \neg A$	**MP** 2,1
4	$((A \to \neg A) \to \neg A) \to (A \to \neg(A \to \neg A))$	T7
5	$A \to \neg(A \to \neg A)$	**MP** 4,3
6	$\neg(A \to \neg A)$	**MP** 5,1

T11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$

1	$(A \to \neg(A \to \neg A)) \to ((A \to \neg A) \to \neg A)$	T7
2	$A \to \neg(A \to \neg A)$	T10
3	T11	**MP** 1,2

T12. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

$$A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$$

1	$A \to B$	Suposición
2	$A \to \neg B$	Suposición
3	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	T6
4	$\neg B \to \neg A$	**MP** 3,1
5	$A \to \neg A$	Sil 2,4
6	$(A \to \neg A) \to \neg A$	T11
7	$\neg A$	**MP** 6,5

T13. $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

$$A \to B, \neg A \to B \vdash B$$

1	$A \to B$	Suposición
2	$\neg A \to B$	Suposición
3	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	T6
4	$\neg B \to \neg A$	**MP** 3,1
5	$(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg\neg A)$	T6
6	$\neg B \to \neg\neg A$	**MP** 5,2
7	$(\neg B \to \neg\neg A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$	T12
8	$(\neg B \to \neg A) \to B$	**MP** 7,6
9	B	**MP** 8,4

Antes de continuar con la prueba de esta selección de teoremas convendrá introducir nuevas reglas en el cálculo. Una de ellas, la *regla de intercambio*, se demostraría por modo similar al efectuado en deducción natural y nos limitaremos aquí a usarla en adelante suponiéndola ya demostrada. Dedicaremos alguna atención, en cambio, a la extensión del principio de dualidad a la lógica de predicados.

Dualidad. La noción de dualidad está históricamente relacionada con el desarrollo de la lógica de Boole. En este libro se la estudia en el contexto de la automatización del razonamiento. (Véase, Cap. XIX, § 3.).

Baste adelantar aquí que la dualización en lógica de enunciados es la transformación de una fórmula cuyo léxico lógico se reduzca a los tres conectores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, cambiando recíprocamente y en toda ocurrencia el conjuntor por el disyuntor y respetando el negador. Supuesto que la fórmula conste también de cuantificadores, añadiremos que en esa transformación el generalizador debe ser cambiado en todas sus ocurrencias por el particularizador y recíprocamente. Por ejemplo, la dual de la fórmula: $\bigwedge x Px \vee \neg \bigwedge x Px$ es la fórmula $\bigvee x Px \wedge \neg \bigvee x Px$. Si A es una fórmula, representamos a su dual como A'.

Estableceremos ahora para el cálculo de predicados tres principios de dualidad, cada uno de los cuales es la extensión correlativa de los correspondientes del cálculo de enunciados:

1.º *Si una fórmula A es lógicamente verdadera, entonces la negación de su dual ¬A' también lo es:*

si $\vdash$ A, entonces $\vdash \neg$ A′ (Principio general de dualidad)

2.º *Si dos fórmulas, A y B, son lógicamente equivalentes, entonces sus duales respectivas también lo son:*

Si $\vdash$ A $\leftrightarrow$ B, entonces $\vdash$ A′ $\leftrightarrow$ B′ (Principio especial de dualidad para equivalencia)

3.º *Si existe una relación de implicación lógica entre dos fórmulas, A y B, entonces existe también una relación de implicación lógica en sentido inverso entre sus respectivas duales,* A′ *y* B′:

Si $\vdash A \rightarrow B$, entonces $\vdash B' \rightarrow A'$ (Principio especial de dualidad para implicación).

El principio general se prueba por inducción, considerando, en lo que atañe a la lógica de enunciados, que la dual de una tautología es una contradicción. Por lo que atañe a la lógica de predicados nos limitaremos al caso de la generalización.

Sea la fórmula a dualizar una generalización: $A \leftrightharpoons \bigwedge xPx$. Por la hipótesis del principio de dualidad se tiene que $\vdash \bigwedge xPx$, de donde se sigue, por A5, Pa, y de ahí, por hipótesis inductiva, $\vdash \neg Pa'$. Pero de aquí puede inferirse por **Gen** $\vdash \bigwedge x \neg Px'$, lo que da lugar primero por D4 a $\vdash \neg \bigvee x \neg\neg Px'$ y luego con ayuda de T4, T5 e **I**, a $\vdash \neg \bigvee xPx'$, que es lo que se pretendía demostrar (la deducibilidad de la negación de la dual de A).

Los principios segundo y tercero son corolarios del primero. De la utilidad de los principios de dualidad para el cálculo puede hacerse el lector una idea revisando las fórmulas deducidas en los Capítulos VII, IX y XI. Gran número, son reciprocamente duales, de suerte que la deducción de una de ellas y los principios de dualidad hacen inmecesaria la deducción de la otra. Por ejemplo: las leyes de distribución

$\bigwedge xPx \wedge. \bigwedge xQx \leftrightarrow \bigwedge x(Px \wedge Qx)$	$\bigvee xPx \vee \bigvee xQx \leftrightarrow \bigvee x(Px \vee Qx)$
$A \wedge \bigwedge xPx \leftrightarrow \bigwedge x(A \wedge Px)$	$A \vee \bigvee xPx \leftrightarrow \bigvee x(A \vee Px)$

son dos pares de fórmulas duales entre sí (cada una de las que figuran a la izquierda es la dual de su correspondiente a la derecha y recíprocamente). La prueba de cualquiera de ellas hace superflua la prueba de la correspondiente dual (principio de dualidad para equivalencia).

T14. $\vdash Pa \rightarrow \bigvee xPx$

1	$\bigwedge x \neg Px \rightarrow \neg Pa$	A5[14]
2	$(\bigwedge x \neg Px \rightarrow \neg Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow \neg \bigwedge x \neg Px)$	T7
3	$Pa \rightarrow \neg \bigwedge x \neg Px$	**MP** 1,2
4	T14	D4 I 3

[14] El quinto axioma: $\bigwedge xPx \rightarrow Pa$ está formulado, como los demás, en metalenguaje, y es, por tanto, en realidad, un esquema de axioma. Correlativamente, el segmento lingüístico Pa es también un esquema de fórmula, en donde la letra P no está por un predicado concreto, sino por cualquier expresión, cualquiera que sea su grado de complejidad, predicativamente aplicable, en sentido metalingüístico, al parámetro a. P. ej., un esquema (o una fórmula) del tipo $\bigwedge xQx \wedge Ra$ podría ser, sin el menor inconveniente, metalingüísticamente denominado por Pa, correspondiendo entonces la letra P al complejo: $\bigwedge xQx \wedge R$, que es predicativamente aplicable al parámetro a. Lo mismo vale decir, por tanto, del esquema $\neg Pa$, que es una realización, como otra cualquiera, del esquema Pa (siendo esta vez el complejo $\neg P$ lo denotado por la letra P).

T15. $\vdash \wedge xPx \rightarrow \vee xPx$

1	$\wedge xPx \rightarrow Pa$	A5
2	$Pa \rightarrow \vee xPx$	T1
3	T15	Sil 1,2

T16. $\vdash \wedge x \neg Px \rightarrow \neg \vee xPx$

1	$\wedge x \neg Px \rightarrow \neg\neg \wedge x \neg Px$	T5
2	T16	D4 I 1

T17. $\vdash \neg \wedge xPx \rightarrow \vee x \neg Px$

T17 es la forma conversodual de T16. Queda probado por el principio especial de dualidad para implicación.

§ 5. *Nota histórica sobre sistemas de lógica de enunciados* [15]

La lógica de enunciados ha sido objeto de importantes ensayos de axiomatización en el presente siglo. Los tres históricamente principales, de los que sigue una breve descripción, se deben a WHITEHEAD-RUSSELL (1910), HILBERT-BERNAYS (1934) y ŁUKASIEWICZ (1929) [16].

A. *El sistema axiomático de lógica de enunciados de* WHITEHEAD-RUSSELL (sistema WR, 1910). Expuesto por sus autores en el primer volumen de los *Principia mathematica* (1910), constituye el estrato más sencillo del sistema total de lógica superior con teoría de los tipos, mediante el cual se pretendió en dicha obra «deducir» toda la matemática a partir de la lógica (programa logicista).

Los *conectores primitivos* del sistema son dos, negador y disyuntor, que en los *Principia mathematica* se representan: ~, v. Las *reglas de inferencia* (deficientemente tratadas en este sistema) se reducen prácticamente a sustitución y un equiva-

[15] El contenido de esta sección tiene carácter meramente histórico. Pero el sistema de notación de Łukasiewicz merece especial atención.

[16] Poco después de la publicación de los *Principia*, BERNAYS demostró que el cuarto axioma es superfluo o redundante. En 1917 J. NICOD, usando la barra de incompatibilidad de SHEFFER, «|» (*A* | *B* significa: *A* es incompatible con *B*) y la única regla de inferencia: «de *A* | (*B* | *C*) y A se sigue *C*», logró reducir todo el sistema *WR* a un solo axioma de complicada factura que reza así:

$$\{p \mid (q \mid r)\} \mid \{[t \mid (t \mid t)] \mid [(s \mid q) \mid ((p \mid s) \mid (p \mid s))]\}$$

(El símbolo principal de la fórmula es la tercera barra empezando a contar por la izquierda.)

lente del *modus ponens*, curiosamente presentado en forma de «definición» del implicador (símbolo en forma de herradura, $\supset$) en términos de negador y disyuntor:

$$p \supset q. = . \sim p \vee q \quad \text{Df.}$$

(El signo «=» con el comentario «Df» a la derecha de una fórmula es indicativo de definición en los *Principia*).

Los *axiomas* son los cinco que siguen, escritos en la grafía de los *Principia* (que incluye el uso del deductor como prefijo indicativo de validez, y el empleo de puntos en lugar de paréntesis), y acompañados de los respectivos sobrenombres que les asignaron sus autores:

1	$\vdash : p \vee p . \supset . p$	(principio de tautología)
2	$\vdash : q . \supset . p \vee q$	(principio de adición)
3	$\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$	(principio de permutación)
4	$\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$	(principio de asociación)
5	$\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$	(principio de sumación)

Los *símbolos* de conjunción y equivalencia material son *definidos así*:

$$p . q . = . \sim (\sim p \vee \sim q) \quad \text{Df.}$$
$$p \equiv q . = . (p \supset q) . (q \supset p) \quad \text{Df.}$$

El sistema de lógica de enunciados WR, que hoy acusa ya las huellas del tiempo, ha sido el primer sistema lógico que han «pensado» los computadores. En 1957 NEWELL, SHAW y SIMON construyeron un programa que permite la deducción axiomática de este sistema mediante computador. En 1958 HAO WANG construyó, recurriendo a técnicas de GENTZEN, un programa similar para el sistema WR y lo hizo pasar por un computador IBM 704: la máquina «demostró» 220 teoremas en tres minutos (véase Cap. XX, §§ 1 y 2).

B. *El sistema axiomático de lógica de enunciados de* HILBERT-BERNAYS (sistema HB, 1934). David HILBERT (1862-1943) había construido en 1899 un sistema axiomático de geometría en el que separaba en sendos grupos los axiomas propios de las diferentes zonas y estratos del universo geométrico. Un sistema análogo para la lógica de enunciados apareció en el primer volumen de la obra de D. HILBERT y P. BERNAYS *Grundlagen der Mathematik* [*Fundamentos de la matemática*], publicada en Berlín en 1934.

Este sistema utiliza como *símbolos primitivos* lógicos los cinco conectores por el siguiente orden:

$\rightarrow$	(implicador: es el símbolo que preside el sistema)
&	(conjuntor)
$\vee$	(disyuntor)
$\sim$	(símbolo de coimplicación o equivalencia)
$\overline{}$	(negador)

Los *axiomas* forman, correlativamente, cinco grupos distintos, cada uno de los cuales consta de tres fórmulas que permiten la introducción o la eliminación, en sus respectivos consecuentes, de cada una de las cinco partículas.

I. *Axiomas de implicación.*

1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2 $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

II. *Axiomas de conjunción.*

1 $A \,\&\, B \rightarrow A$
2 $A \,\&\, B \rightarrow B$
3 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \,\&\, C))$

III. *Axiomas de disyunción.*

1 $A \rightarrow A \vee B$
2 $B \rightarrow A \vee B$
3 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

IV. *Axiomas de equivalencia.*

1 $(A \sim B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
2 $(A \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
3 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \sim B))$

V. *Axiomas de negación.*

1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$
2 $A \rightarrow \overline{\overline{A}}$
3 $\overline{\overline{A}} \rightarrow A$

El lector reconocerá en estas fórmulas un buen número de las que poco más tarde serían reglas de deducción natural de GENTZEN, sólo que expuestas aquí aún en forma de axiomas.

Los cuatro primeros grupos constituyen la base de la llamada *lógica positiva*, a partir de la cual sólo es posible extraer teoremas totalmente exentos del signo de negación (ya que la entrada de dicho signo depende de la intervención de los axiomas del grupo V).

C. *El sistema de lógica de enunciados de* ŁUKASIEWICZ (sistema C-N, 1929). El implicador y el negador constituyen una pareja de operadores lógicos que parece especialmente acorde, desde el punto de vista intuitivo, con el sentido de la deducción. En estos dos operadores basaron su sistema axiomático Gottlob FREGE y, más recientemente, Jan ŁUKASIEWICZ (1878-1956), una de las principales figuras de la escuela lógica de Varsovia.

El *sistema C-N*, o sistema axiomático de lógica de enunciados de ŁUKASIEWICZ, fue expuesto por su autor en la obra *Elementy logiki matematycznej*, aparecida en Varsovia en 1929 [17].

---

[17] Una traducción inglesa, preparada por J. SŁUPECKI, de la segunda edición polaca de esta obra fue editada por Pergamon, en Oxford, 1963, con el título *Elements*

Uno de los rasgos característicos de este sistema es su original *principio de notación ausente de paréntesis*, de gran importancia teórica y práctica. La clave de esta notación reside en escribir los funtores lógicos antes que los argumentos sujetos a su alcance, con lo cual resulta posible una lectura absolutamente inequívoca de las fórmulas sin necesidad de recurrir al empleo de paréntesis ni de puntos. Dicha notación ha sido empleada por su autor desde 1929 [18].

Los operadores lógicos, en este caso las partículas conectivas, son designados por letras mayúsculas del alfabeto:

N es el símbolo de la negación
C es el símbolo de la implicación
K es el símbolo de la conjunción
A es el símbolo de la alternación (disyunción no exclusiva)
E es el símbolo de la equivalencia.

Estos símbolos se sitúan siempre inmediatamente delante de las variables o fórmulas afectadas por ellos, a la manera como se hace con el negador en las notaciones lógicas usuales. (Así por ejemplo, siendo *p, q, r* variables enunciativas, *Np, Cpq, Kpq, Apq, Epq* corresponderían, respectivamente, en nuestra notación a $\neg p, p \rightarrow q, p \wedge q, p \vee q, p \leftrightarrow q$).

Los *símbolos primitivos* del sistema son los funtores o constantes lógicas:

C (si . . . , entonces. . .)
N (no es cierto que. . .),

juntamente con los símbolos de variable enunciativa: *p, q, r* . . .

Las *reglas de formación de fórmulas* serían, según lo dicho: 1. cualquier variable enunciativa es una fórmula; 2. toda fórmula inmediatamente precedida de *N* es una fórmula; 3. dadas dos fórmulas, la concatenación de ambas precedida de *C* es una fórmula.

Símbolos derivados. Los funtores *K, A,* son definidos en términos de los dos primitivos así (usando el símbolo «=» como identificador en las definiciones):

Kpq = *NCpNq* (en nuestra notación: $p \wedge q \leftrightharpoons \neg (p \rightarrow \neg q)$)
Apq = *CNpq* (en nuestra notación: $p \vee q \leftrightharpoons \neg p \rightarrow q$)

y el operador *E* se define

Epq = *KCpqCqp* (en nuestra notación: $p \leftrightarrow q \leftrightharpoons (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$).

He aquí tres ejemplos de fórmulas: una, *CCpCqrCCpqCpr*, sería en nuestra notación: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$; las otras dos: *ENKpqANpNq*, *ENApqKNpNq* son las leyes de DE MORGAN, formuladas como equivalencias.

---

of mathematical logic. Una breve exposición del sistema C-N figura también en la obra sobre *La silogística de Aristóteles,* citada más abajo en la nota 20.

[18] Desde el punto de vista teórico, esta notación es particularmente adecuada para la formulación de lógicas polivalentes. Desde el punto de vista práctico, no sólo economiza paréntesis, sino que permite mecanografiar fórmulas lógicas con una máquina de escribir ordinaria. Otra ventaja de esta notación es su utilidad para la programación de problemas de lógica en computador. (P. ej., para la mentalidad mecánica del computador, que no visualiza de golpe, como nosotros, la fórmula en su totalidad, resulta más cómodo identificar el signo principal en posición inicial.)

Axiomas. A los enunciados de un sistema deductivo, sean axiomas o teoremas, ŁUKASIEWICZ les da el nombre de *tesis* o aserciones. Los axiomas del sistema C-N constituyen las tres primeras tesis; todas las restantes son teoremas. Los tres axiomas son:

T1 *CCpqCCqrCpr*
T2 *CCNppp*
T3 *CpCNpq*

T1, en nuestra notación: $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$, es la *ley del silogismo hipotético,* cuyo origen se remonta a ARISTÓTELES. T2, en nuestra notación: $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$, es llamada por ŁUKASIEWICZ la *ley de* CLAVIUS, un jesuita del siglo XVI que la formuló por vez primera en sus comentarios a la geometría de Euclides; y T3, en nuestra notación: $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$, es llamada por ŁUKASIEWICZ la *ley de* DUNS ESCOTO, debido a que se encuentra formulada por primera vez en un comentario a Aristóteles atribuido a dicho pensador.

Reglas de inferencia. Las reglas de inferencia del sistema C-N son tres:

1. *Sustitución:* dada una tesis aceptada en el sistema, es posible deducir de ella nuevas tesis cambiando una cualquiera de sus variables, en todas y cada una de sus ocurrencias, por una fórmula cualquiera.
2. *Separación (Modus ponens):* supuesta una tesis que tenga la estructura de un condicional y otra tesis que consista en el antecedente de dicho condicional, es posible afirmar una tercera tesis que consista en el consecuente separado del referido condicional.
3. *Intercambio:* si una expresión es tesis del sistema y otra expresión que sea parte de ella es idéntica por su forma con el extremo derecho («*definiens*») de una de las definiciones establecidas, o de cualquier sustitución correcta de la misma, puédese aceptar en el sistema cualquier expresión obtenida al reemplazar en la expresión primeramente indicada la parte aludida por el extremo izquierdo («*definiendum*») de la referida definición, o, en su caso, de la correcta sustitución de la misma.

Como subraya ŁUKASIEWICZ, la regla de sustitución equivale al *dictum de omni* de ARISTÓTELES; la regla de separación equivale al *modus ponens* de los estoicos; y la regla de intercambio es trasunto de la propiedad tradicional de las definiciones, según lo cual todo lo que sea verdad del extremo definiente (*definiens*) ha de serlo igualmente del extremo definido (*definiendum*).

Deducción de teoremas. Las deducciones se efectúan exclusivamente a partir de las tres reglas de inferencia: ordinariamente sustitución y/o separación y, eventualmente, intercambio.

Toda tesis en el sistema es numerada convenientemente, empezando por los axiomas a partir de 1. La inclusión de una nueva tesis, con su correspondiente nuevo número, supone forzosamente haber efectuado la deducción de la misma.

El plan de la deducción es indicado por ŁUKASIEWICZ en una línea que antecede, en la relación de tesis del sistema, a cada nuevo teorema. Dicha línea, a la que ŁUKASIEWICZ denomina *línea de deducción,* consta de dos partes, separadas por el signo «×»:

a) Una parte indicativa de las *operaciones de sustitución* a efectuar (operaciones que se realizan obviamente, con vistas a la inmediata obtención de la nueva tesis o a la construcción de una premisa que sirva de base a una aplicación del *modus po-*

nens); con este fin se anota el número de la tesis sobre el cual se efectúa la sustitución y a continuación la letra a sustituir y, separada de ella por trazo oblicuo, la fórmula sustituyente.

b) Una parte indicativa de las *operaciones de separación (modus ponens)* a efectuar sobre el resultado de las sustituciones, normalmente, que debe ser una implicación que tenga por antecedente una tesis ya admitida y por consecuente la tesis a demostrar: con este fin se escribe el símbolo *C* (implicador) y tras él los números de ambas tesis separados por un guión, que subraya el lugar de «separación» [19].

A título de ilustración reproducimos la demostración de la tesis de identidad implicacional, *Cpp*, a partir de los tres axiomas del sistema: T1 *CCpqCCqrCpr* (principio del silogismo); T2 *CCNppp* (ley de CLAVIUS), y T3 *CpCNpq* (ley de Duns ESCOTO). La tarea heurística de planear la demostración debe atenerse a las siguientes consideraciones. Es evidente que no se puede pasar inmediatamente por sustitución de ninguno de los tres axiomas a *Cpp*. Hay que optar por introducir esta fórmula (mediante la oportuna sustitución) al final de uno de ellos y tratar luego de eliminar el o los antecedentes a que quede sujeta dentro del axioma elegido. Revisando la estructura de los tres axiomas, es fácil ver que donde esa introducción podría efectuarse más naturalmente es en el axioma primero (principio de silogismo) cuyas tres letras finales casi coinciden con la tesis que se pretende demostrar.

Pero antes de proceder a tal sustitución conviene trazarse también el plan de eliminación de antecedentes en el principio del silogismo. Es asimismo fácil ver que si se sustituye en el referido principio la letra *q* por la fórmula *CNpq,* el resultado será una implicación cuyo principal antecedente se identificará por entero con el axioma segundo y será, por tanto, susceptible de ser eliminado por este último mediante *modus ponens*, con lo cual quedaría separada una nueva fórmula que tendría, en orden a la demostración de *Cpp*, las mismas ventajas que el principio del silogismo (sus tres letras finales casi coincidentes con *Cpp*) y menos inconvenientes (el número de antecedentes ha disminuido en uno). Conviene, pues, proceder primero a la deducción de esa fórmula y anotarla como tesis 4 del sistema.

De acuerdo con las anteriores consideraciones, la demostración de esta primera fórmula transcurriría así. La primera premisa se construye sustituyendo en el axioma primero (principio de silogismo) *q* por *CNpq:*

1 *CCpCNpqCCCNpqrCpr* T1 *q/CNpq*

La segunda premisa es el axioma tercero:

2 *CpCNpq* T3

Aplicando ahora la regla de separación a las dos líneas anteriores resulta la nueva fórmula

3 *CCCNpqrCpr* C T3-T4

[19] El sentido de las indicaciones (a) y (b) y de lo que sigue se entenderá mejor volviendo a leer las instrucciones especificadas en la sección segunda de este capítulo, p. 293, para obtener nuevos teoremas antes de la entrada en acción de la regla de deducción. El teorema de identidad es probado allí por modo semejante al que emplea ŁUKASIEWICZ, con la única diferencia de que, por las razones entonces aludidas, no se menciona explícitamente el uso de la regla de sustitución.

que anotaremos con el número T4 en la relación de tesis del sistema. (El comentario a la derecha de la línea 3 debe entenderse como indicativo de que se ha «separado» el consecuente (la nueva fórmula T4) del antecedente (la tesis T3) en una implicación (letra *C*) de una línea anterior (en este caso, línea 1)).

Continuando, por nuestra parte el proceso de deducción, la nueva T4: *CCCNpqrCpr* nos servirá de plataforma para la obtención de la fórmula *Cpp*. Sustituyendo *r* por *p* en la tesis T4 habremos insertado en el extremo final de esta última la fórmula deseada; y cambiando asimismo en T4 la letra *r* por *p* el antecedente que gravita ahora sobre *Cpp* resulta ser idéntico al segundo de los axiomas del sistema y puede ser, por tanto, eliminado. Si se efectúan, lo que es legítimo en este caso, ambas sustituciones simultáneamente, la deducción transcurre así:

1	*CCCNpppCpp*	T4 *q/p, r/p*
2	*CCNppp*	T2
3	*Cpp*	C T2-T5

La línea 3 es la fórmula buscada, Cpp, que pasa a la relación de tesis del sistema con el número T5.

He aquí ahora, en el formato sintético que utiliza su autor, la transcripción formal de este breve trozo del sistema axiomático de lógica de enunciados de ŁUKASIEWICZ:

T1 *CCpqCCqrCp*
T2 *CCNppp*
T3 *CpCNpq*
T1 *q/CNpq* × *C* T3-T4
T4 *CCNpqrCpr*
T4 *q/q, r/p* × *C* T2-T5
T5 *Cpp*

§ 6. *La axiomatización de la silogística por ŁUKASIEWICZ*

Debemos a Jan ŁUKASIEWICZ [20] una sistematización axiomática de la teoría del silogismo.

El sistema de Łukasiewicz consta fundamentalmente de:

(a) dos tesis o aserciones básicas de identidad en el contexto de las proposiciones afirmativas *A*, *I*;

(b) dos que sirven para definir las proposiciones negativas *E*, *O*;

(c) dos modos silogísticos primitivos: *Barbara* y *Datisi*.

---

[20] Este sistema se encuentra expuesto por vez primera en su obra *Elements of mathematical logic* citada en la nota 17.

Posteriormente aparece en el capítulo IV de su libro *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la moderna lógica formal*, traducción de Josefina Fernández, revisión de Manuel Garrido, Tecnos, Madrid, 1977.

Símbolos específicos del sistema:

a, *b*, *c* para términos silogísticos cualesquiera.
A, E, I, O como constantes lógicas indicativas de la cualidad y cantidad de las proposiciones categóricas.

Fórmulas específicas del sistema:

Una fórmula (proposición categórica) será cualquier par de símbolos de términos precedido de una cualquiera de las cuatro constantes de proposición categórica. Así:

Aac, Aca, Iba, Iab

son cuatro fórmulas categóricas, de las cuales las dos primeras son universales afirmativas y las otras dos particulares afirmativas.

Leyes de identidad:

1. *Aaa*
2. *Iaa*
3. *CKAbcAabAac* (Barbara)
4. *CKAbcIbaIac* (Datisi)

Reglas de inferencia:

Regla RE: *NI* puede ser siempre reemplazada por *E*, y a la inversa.
Regla RO: *NA* puede ser siempre reemplazada por *O*, y a la inversa.

De esta sencilla base se deducen íntegramente la teoría de la inferencia inmediata, incluyendo las leyes de subalternación y de conversión accidental, y la teoría completa de los modos silogísticos, incluyendo los discutidos *Darapti, Felapton* y afines.
Los presupuestos lógicos de tipo general en que se funda el sistema se reducen a un segmento de la lógica de juntores, en especial leyes de implicación : *modus ponens*, teorema de deducción, identidad, silogismo, contraposición y *modus tollens*, juntamente con la regla de intercambio.

I.	*CpCqp*	(ley de simplificación)
II.	*CCqrCCpqCpr*	(ley del silogismo hipotético, 2.ª forma)
III.	*CCpCqrCqCpr*	(ley de conmutación)
IV.	*CpCNpq*	(ley de Duns Escoto)
V.	*CCNppp*	(ley de Clavius)
VI.	*CCpqCNqNp*	(ley de transposición)
VII.	*CCKpqrCpCqr*	(ley de exportación)
VIII.	*CpCCKpqrCqr*	
IX.	*CCspCCKpqrCKsqr*	
X.	*CCKpqrCCsqCKpsr*	
XI.	*CCrsCCKpqrCKqps*	
XII.	*CCKpqrCKpNrNq*	
XIII.	*CCKpqrCKNrqNp*	
XIV.	*CCKpNqNrCKprq*	

Regla de sustitución. Si α es una expresión asertada del sistema, entonces cualquier expresión producida a partir de α por una sustitución válida es asimismo una expresión asertada. La única sustitución válida consiste en poner en lugar de variables-término *a*, *b*, *c*, otras variables-término, p. ej., *b* por *a*.

Regla de separación: Si *C*αβ y α son expresiones asertadas del sistema, entonces β es una expresión asertada.

Nota curiosa de este sistema es que el modo *Barbara*, que ocupa un lugar principal en el sistema aristotélico, únicamente entra en juego para justificar el par de modos *Baroco* y *Bocardo*. El modo clave en el sistema de Łukasiewicz es *Datisi* [21].

A. Las leyes de conversión

VII. *p/Abc, q/Iba, r/Iac* × *C*4-5

5. *CAbcCIbaIac*

5. *b/a, c/a, a/b* × *C*1-6

6. *CIabIba* (ley de conversión de la premisa-*I*)

III. *p/Abc, q/Iba, r/Iac* × *C*5-7

[21] En su artículo «On the categorical syllogism», *Dominican Studies*, vol. I (1948), pp. 35-37, I. M. Bochenski desarrolla un sistema similar al de Łukasiewicz, pero con la diferencia de que en este caso los modos silogísticos que sirven de axiomas son *Barbara* y *Ferio*.

7. *CIbaCAbcIac*
   7. *b/a, c/b* × *C*2-8
8. *CAabIab* (ley de subordinación de premisas afirmativas)
   II. *q/Iab, r/Iba* × *C*6-9
9. *CCpIabCpIba*
   9. *p/Aab* × *C*8-10
10. *CAabIba* (ley de conversión de la premisa-*A*)
   6. *a/b, b/a* × 11
11. *CIbaIab*
   VI. *p/Iba, a/Iab* × *C*11-12
12. *CNIabNIba*
   12. RE × 13
13. *CEabEba* (ley de conversión de la premisa-*E*)
   VI. *p/Aab, q/Iab* × *C*8-14
14. *CNIabNAab*
   14. RE, RO × 15
15. *CEabOab* (ley de subordinación de premisas negativas)

B. Los modos afirmativos

X. *p/Abc, q/Iba, r/Iac* × *C*4-16
16. *CCsIbaCKAbcsIac*
   16. *s/Iab* × *C*6-17
17. *CKAbcIabIac* (Darii)
   16. *s/Aab* × *C*10-18
18. *CKAbcAabIac* (Barbari)
   8. *a/b, b/a* × 19
19. *CAbaIba*
   16. *s/Aba* × *C*19-20
20. *CKAbcAbaIac* (Darapti)
   XI. *r/Iba, s/Iab* × *C*11-21
21. *CCKpqIbaCKqpIab*
   4. *c/a, a/c* × 22
22. *CKAbaIbcIca*
   21. *p/Aba, q/Ibc, b/c* × *C*22-23
23. *CKIbcAbaIac* (Disamis)
   17. *c/a, a/c* × 24
24. *CKAbaIcbIca*
   21. *p/Aba, q/Icb, b/c* × *C*24-25
25. *CKIcbAbaIac* (Dimaris)

18. *c/a, a/c* × 26

26. *CKAbaAcbIca*

21. *p/Aba, q/Acb, b/c* × *C*26-27

27. *CKAcbAbaIac* (Bramantip)

C. Los modos negativos

XIII. *P/Ibc, q/Aba, r/Iac* × *C*23-28

28. *CKNIacAbaNIbc*

28. RE × 29

29. *CKEacAbaEbc*

29. *a/b, b/a* × 30

30. *CKEbcAabEac* (Celarent)

IX. *s/Eab, p/Eba* × *C*13-31

31. *CCKEbaqrCKEabqr*

31. *a/c, q/Aab, r/Eac* × *C*30-32

32. *CKEcbAabEac* (Cesare)

XI. *r/Eab, s/Eba* × *C*13-33

33. *CCKpqEabCKqpEba*

32. *c/a, a/c* × 34

34. *CKEabAcbEca*

33. *p/Eab,q/Acb, a/c, b/a* × *C*34-35

35. *CKAcbEabEac* (Camestres)

30. *c/a, a/c* × 36

36. *CKEbaAcbEca*

33. *p/Eba, q/Acb, a/c, b/a* × *C*36-37

37. *CKAcbEbaEac* (Camenes)

II. *q/Eab, r/Oab* × *C*15-38

38. *CCpEabCpOab*

38. *p/KEbcAab, b/c* × *C*30-39

39. *CKEbcAabOac* (Celaront)

38. *p/KEcbAab, b/c* × *C*32-40

40. *CKEcbAabOac* (Cesaro)

38. *p/KAcbEab, b/c* × *C*35-41

41. *CKAcbEabOac* (Camestrop)

38. *p/KAcbEba, b/c* × *C*37-42

42. *CKacbEbaOac* (Camenop)

XIII. *p/Abc, q/Iba, r/Iac* × *C*4-43

43. *CKNIacIbaNAbc*

43. RE, RO × 44

44. *CKEacIbaObc*
44. *a/b, b/a* × 45
45. *CKEbcIabOac* (Ferio)
31. *a/c, q/Iab, r/Oac* × *C*45-46
46. *CKEcbIabOac* (Festino)
X.*p/Ebc, q/Iab, r/Oac* × *C*45-47
47. *CCsIabCKEbcsOac*
47. *s/Iba* × *C*11-48
48. *CKEbcIbaOac* (Ferison)
31. *a/c, q/Iba, r/Oac* × *C*48-49
49. *CKEcbIbaOac* (Fresison)
10. *a/b, b/a* × 50
50. *CAbaIab*
47. *s/Aba* × *C*50-51
51. *CKEcbAbaOac* (Felapton)
31. *a/c, q/Aba, r/Oac* × *C*51-52
52. *CKEcbAbaOac* (Fesapo)

El paradójico resultado obtenido por Łukasiewicz es que «fue posible deducir veinte modos silogísticos sin emplear el axioma 3, el modo Barbara. Incluso Barbari podría ser probado sin Barbara. El axioma 3 es la tesis más importante de la silogística, pues es el único silogismo que da lugar a una conclusión universal afirmativa, pero en el sistema de silogismos simples tiene un rango inferior, siendo necesario para probar tan sólo dos modos silogísticos, Baroco y Bocardo.

La prueba de ambos modos es como sigue:

XII. *p/Abc, q /Aab, r/Aac* × *C*3-53
53. *CKAbcNAacNAab*
53. RO × 54
54. *CKAbcOacOab*
54. *b/c, c/b* × 55
55. *CKAcbOabOac* (Baroco)
XIII. *p/Abc, q/Aab, r/Aac* × *C*3-56
56. *CKNAacAabNAbc*
56. RO × 57
57. *CKOacAabObc*
57. *a/b, b/a* × 58
58. *CKObcAbaOac* (Bocardo)

§ 7. *Axiomatización de teorías matemáticas*

La lógica formal ofrece un marco dentro del cual resulta posible controlar de modo riguroso la axiomatización de teorías científicas no estrictamente lógicas, en especial las teorías matemáticas.

Aunque no se recurra a la formalización, la mera ordenación deductiva de los enunciados de una teoría científica en axiomas y teoremas permite distinguir claramente en ella entre lo que se considera básico y lo que se considera derivado. Pero la inserción explícita de los axiomas dentro del marco de la lógica formal proporciona además innegables ventajas: permite distinguir también con análoga nitidez entre aquellas piezas estructurales que son específicas de la teoría y las que no lo son, y sobre todo asegurar al máximo el control racional de las consecuencias obtenidas. Por fundamentación lógica de una teoría suele entenderse muchas veces, precisamente, la exposición axiomática de la misma dentro del marco explícito de la lógica formal.

A las teorías que pueden ser formalizadas y axiomatizadas con la sola ayuda de la lógica elemental o de primer orden, se las llama *teorías de primer orden*. El aparato de la lógica de primer orden es, ciertamente, muy sencillo. Sin embargo es suficiente para servir de marco a la mayor parte de las teorías matemáticas, lo cual requiere, naturalmente, que se le adicionen conceptos y principios propios de la teoría que se pretenda axiomatizar. Incluso la teoría de conjuntos (que pretende servir a su vez de marco general al que pudiera reducirse toda teoría matemática) puede ser formalizada y axiomatizada con el elemental aparato de la lógica de primer orden.

La axiomatización de teorías no lógicas excede los límites de este libro. A título de mera ilustración sigue una revisión sumaria, dentro del marco de la lógica de primer orden, de la axiomatización de algunas de ellas.

§ 8. *Formalización de la aritmética elemental*

a. El «Formulario» de Peano

El matemático italiano Giuseppe PEANO (1858-1932) elaboró a fines de siglo un sistema axiomático de aritmética elemental, tomando como base tres nociones primitivas (no definidas) y cinco axiomas.

Las tres nociones primitivas son *cero*, *número* y *sucesor* [22].
Los cinco axiomas del sistema de PEANO son:

1. *Cero* es un *número*.
2. El *sucesor* de un *número* es un *número*.
3. Si dos *números* tienen un mismo *sucesor*, es que son iguales.
4. *Cero* no es *sucesor* de ningún *número*.
5. Toda propiedad que convenga a *cero* y al *sucesor* de cualquier *número*, supuesto que convenga también a ese cualquier *número*, conviene a todo *número* [23].

Para destacar los elementos no lógicos (en este caso, aritméticos) de los lógicos, se han escrito en cursiva los primeros. Las palabras que no van escritas en cursiva representan el marco lógico en el que se insertan y al que se sobreañaden los ingredientes específicos que constituyen la base de la aritmética [24].

La diferencia entre unos y otros elementos y la estructura de cada uno de esos axiomas se patentiza con más nitidez empleando lenguaje formal.

Si convenimos en designar las tres nociones primitivas del sistema axiomático de PEANO por los símbolos 0, *N* y ' (y estipulando

---

[22] Se llama sucesión a la operación generadora de los números naturales, consistente en añadir una unidad a un número; el sucesor de n es n + 1.

[23] El quinto axioma de PEANO es el *principio de inducción matemática*, ya conocido del lector. Con vistas a su inmediata formalización, obsérvese que el núcleo de este principio es una implicación cuyo consecuente se encuentra sujeto a una doble condición: «*si* es el caso que una propiedad: 1. conviene a cero, y además 2. si conviene a cualquier número, entonces conviene a su sucesor, *entonces* esa propiedad conviene a todo número».

El principio de inducción matemática, sea que se lo considere como axioma o que se lo considere como regla, es el fundamento de las pruebas por inducción matemática. La primera condición («la propiedad conviene a cero») corresponde a lo que llamamos *base* en esas pruebas. La segunda condición («si la propiedad conviene a cualquier número, entonces conviene a su sucesor») corresponde a lo que llamamos *paso* en dichas pruebas; y la hipótesis de esta segunda condición («conviene a cualquier número») es la *hipótesis inductiva* en que se apoya el paso.

[24] Para ser precisos, habría que añadir que lo no subrayado incluye, además de la lógica elemental de predicados pura, la lógica de la identidad, a la que pertenecen, p. ej., las palabras «mismo» y «dos» (sinónimo aquí de «distintos») del axioma tercero. Sobre la cuestión de saber si la formalización del quinto postulado requiere lógica de segundo orden, véase más abajo.

que el tercero de los símbolos mentados se adosará a un número de manera que *x'* signifique: «el sucesor de *x*»), los anteriores axiomas podrían ser formalizados de este modo [25]:

---

[25] PEANO elaboró la primera versión de su sistema en 1889, en su obra *Arithmetices principia*, con cuatro ideas fundamentales y nueve axiomas. Posteriormente, en su *Formulaire de mathématique* (1897-1899), estimó que algunos de esos axiomas pertenecía más bien a la lógica y redujo el sistema a cinco proposiciones. A esa época corresponde la versión en lenguaje ordinario reproducida en la página anterior, que es la más difundida.

En sucesivas versiones del *Formulaire*, a partir de 1901, habló también de seis axiomas. A continuación transcribo, en el simbolismo del autor, la versión del volumen V de esa obra (1908). En este V volumen, que PEANO titula ya *Formulario mathematico,* las notas y explicaciones a los simbolismos (es decir, lo que hoy diríamos el metalenguaje) se dan en un latín artificial, sin declinaciones, con un vocabulario polígloto y exento de preceptos gramaticales rígidos: *latino sine flexione,* que pretendía valer de «lengua universal»:

«Ergo nos sume tres idea N_0, 0, + ut idea primitivo, per que nos defini omni symbolo de Arithmetica.

Nos determina valore de symbolo non definito N_0, 0, + per systema de propositio primitivo sequente.

·0 $N_o \, \varepsilon \, Cls$
·1 $0 \, \varepsilon \, N_o$
·2 $a \, \varepsilon \, N_o \, . \supset . \, a + \varepsilon \, N_o$
·3 $s \, \varepsilon \, Cls \, . \, 0 \, \varepsilon \, s : a \, \varepsilon \, s \, . \supset_a . \, a + \varepsilon \, s : \supset . \, N_o \supset s$ Induct
·4 $a, b \, \varepsilon \, N_o \, . \, a+ = b+ \, . \supset . \, a = \mathrm{b}$
·5 $a \, \varepsilon \, N_o \, . \supset . \, a + - = 0$

Lege:
·0 N_0 es classe, vel «numero» es nomen commune.
·1 Zero es numero.
·2 Si *a* es numero, tunc suo successivo es numero.
·3 N_o es classe minimo, que satisfac ad conditione · 0 · 1 · 2; id. es, si *s* es classe, que contine 0; e si *a* pertine ad classe *s*, seque pro omni valore de *a*, que et *a* + pertine ad *s;* tunc omni numero es *s*.

Ce propositione es dicto «principio de inductione», et nos indica illo per abbreviatione «Induct».

Omni conditione determina uno classe; ergo nos pote lege principio de inductione sub forma:

Si *s* es conditione, satisfacto ab numero 0, et si omni vice que illo es vero pro numero *a*, et es vero pro suo succesivo, tunc conditione *s* es vero pro omni numero.

·4 Duo numero, que habe successivo aequale, es aequale inter se.
·5 0 non seque ullo numero.

(*o. c.,* pp. 27-28). El simbolismo lógico de PEANO, sirvió de inspiración a los autores de los *Principia Mathematica.* La letra griega «ε» denota la pertenencia de un elemento a un conjunto; el punto denota la operación lógica «y» y también cumple la función de paréntesis; la implicación es un símbolo en forma de herradura; una variable suscrita al implicador indica su estado de variable ligada. El guión «—» significa negación. El símbolo «+», adosado a un número envuelve la idea de nuestro «'».

P1 $N0$
P2 $\wedge x(Nx \to Nx')$
P3 $\wedge x \vee y(Nx \wedge Ny \wedge x' = y' \to x = y)$
P4 $\wedge x(Nx \to \neg x' = 0)$
P5 $\wedge P(P0 \wedge \wedge x(Nx \wedge Px \to Px') \to \wedge y(Ny \to Py))$

El sistema de PEANO sirve hoy, en lo esencial, de base a las modernas axiomatizaciones de la aritmética. Pero con algunas precisiones y modificaciones que podemos resumir así:

Primero. La idea primitiva «número», simbolizada *N*, denota el universo de discurso o dominio al que ordinariamente hace referencia el sistema, y no necesita ser explícitamente relacionada como tal idea básica ni explícitamente mencionada en los axiomas. Por esta razón los dos primeros axiomas: «0 es un número», «el sucesor de un número es un número» no son propiamente axiomas, sino reglas de formación de fórmulas y términos, y pueden pasar por tanto a la parte meramente gramatical del sistema («cero es un término», «si a es un término, x' es un término», son así reglas gramaticales de formación de términos).

Segundo. En cambio resulta conveniente añadir al sistema dos nuevos signos primitivos: + y ·, denotativos, respectivamente, de las operaciones de adición y producto. Ello lleva consigo la anexión de cuatro axiomas, dos para cada uno de estos dos nuevos signos, a los que definen recursivamente:

Axiomas de adición	Axiomas de producto
$\wedge x(x + 0 = x)$	$\wedge x(x \cdot 0 = 0)$
$\wedge x \wedge y(x + y' = (x + y)')$	$\wedge x \wedge y(x \cdot y' = x \cdot y + x)$

(Para comodidad del lector, no se economizan paréntesis.)

Tercero. Asimismo conviene precisar los límites de la plataforma lógica sobre la cual se hace descansar la aritmética. El axioma correspondiente al principio de inducción matemática comienza haciendo referencia a «toda propiedad». Pero esta referencia sólo puede ser formalmente explicitada de manera satisfactoria recurriendo a la lógica de segundo orden, que permite la cuantificación de letras predicativas. De hecho, la quinta fórmula (el axioma formal P5) no pertenece a la lógica elemental, dado

que contiene la cuantificación de un predicado, *P*. En lógica de primer orden, sin embargo, cabe formalizar ese principio, aunque sólo sea limitadamente (véase el cuadro de la página siguiente), teniendo en cuenta que en este plano elemental las letras predicativas no son variables, sino parámetros (y un parámetro predicativo puede ser interpretado en principio como «cualquier» predicado).

Cuarto. Finalmente, y en orden a precisar los límites de la plataforma lógica de la aritmética, hay que especificar si esa plataforma es la lógica elemental sin la idea de igualdad o con esa idea. El sistema que hemos denominado L es de lógica elemental *pura* (sin igualdad). Para ser sobreañadida a la lógica elemental pura, la aritmética de PEANO necesita ser provista además, por tanto, de la idea de igualdad y axiomas complementarios.

b. *Sistema axiomático de aritmética elemental* [26]

Símbolos primitivos (constantes aritméticas):

=	predicado diádico de igualdad
'	funtor monádico denotativo de la operación «sucesión»
+	funtor diádico denotativo de la operación «más» (adición)
·	funtor diádico denotativo de la operación «por» (producto)
0	nombre propio del número cero

AXIOMAS

Axiomas de igualdad:

$$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x = y \rightarrow (x = z \rightarrow y = z))$$
$$\bigwedge x \bigwedge y(x = y \rightarrow x' = y')$$

Axiomas de PEANO:

$$\bigwedge x \bigwedge y(x' = y' \rightarrow x = y)$$
$$\bigwedge x(\neg x' = 0)$$
$$\mathrm{P0} \wedge \bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{Px} \rightarrow \mathrm{Px'}) \rightarrow \bigwedge \mathrm{yPy}$$

---

[26] El sistema N presupone al sistema de lógica elemental L, al que se sobreañade. La lógica de la igualdad está incluida en N.

Axiomas de adición:

$$\bigwedge x(x + 0 = x)$$
$$\bigwedge x \bigwedge y(x + y' = (x + y)')$$

Axiomas de producto:

$$\bigwedge x(x \cdot 0 = 0)$$
$$\bigwedge x \bigwedge y(x \cdot y' = x \cdot y + x)$$

REGLA DE INDUCCIÓN

$$\frac{\begin{array}{c} \mathrm{P0} \\ \bigwedge \mathrm{x(Px \rightarrow Px')} \end{array}}{\bigwedge \mathrm{yPy}}$$

§ 9. *Teoría de grupos*

Las operaciones de adición y producto se realizan en campos muy diversos, como son el dominio de los números naturales, el de los números racionales, el de los números reales, etc. En todos esos campos dichas operaciones se atienen a las mismas leyes básicas (asociación, etc.). Por otra parte, las dos operaciones guardan profundas semejanzas entre sí. Todo ello sugiere la idea de estudiar este tipo de operaciones y de dominios de aplicación abstractamente, con independencia de las particularidades concretas de tal o cual sistema matemático determinado. Así es como surgió la *teoría de grupos*, que es el núcleo de la moderna *álgebra abstracta,* una de las ramas de la matemática donde más fecundo resulta el uso del método axiomático.

Un grupo es un conjunto no vacío al que se aplica una operación diádica de acuerdo con los siguientes postulados:

1. *Todos los elementos del conjunto tienen libertad de asociación con respecto a esa operación (propiedad asociativa).*

2. *En ese conjunto existe un elemento tal que al ser sometido, en unión de otro cualquier elemento, a la referida operación, se obtendrá por resultado invariablemente ese otro elemento (existencia del elemento unidad).*

3. *Para todo elemento del conjunto, hay siempre otro inverso de él y tal que al aplicarse a ambos la aludida operación el resultado obtenido será el elemento unidad (existencia del elemento inverso).*

La formalización de estos enunciados sirve de base al *sistema formal de teoría de grupos*, que presupone la lógica elemental con igualdad. Utilicemos como símbolos primitivos: G para el conjunto no vacío de que se trate, $\circ$ para la opera-

ción diádica, 1 (a veces también se utiliza 0) para el elemento unidad, y -1, sobreañadido a manera de exponente a cualquier símbolo de individuo, para el elemento inverso.

He aquí los axiomas formales:

G1 $\wedge x \wedge y \wedge z((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z))$	Ley asociativa
G2 $\wedge x(x \circ 1 = x)$	Ley de existencia del elemento unidad
G3 $\wedge x \vee x^{-1}(x \circ x^{-1} = 1)$	Ley de existencia de elemento inverso

Un grupo no es, pues otra cosa que una *estructura matemática* integrada por un dominio de referencia no vacío G, una operación diádica $\circ$, una operación monádica -1 y un elemento unidad que satisface las exigencias de esos axiomas.

Una estructura que los satisface y es, por tanto, un grupo, es el conjunto de los enteros (positivos y negativos) con la operación de adición e incluyendo el 0 como «elemento unidad». Hay muchos otros sistemas no numéricos que pueden servir asimismo de modelo para esos tres axiomas. Por ejemplo, el sistema de rotaciones en el espacio de una esfera sobre su centro, siendo $x \circ y$ la secuencia de dos rotaciones consecutivas.

Cuando un grupo satisface además este cuarto axioma:

G4 $\wedge x \wedge y(x \circ y = y \circ x)$	Ley conmutativa

se dice que es un grupo *abeliano* o *conmutativo.* (No todo grupo es abeliano; por ejemplo, el sistema de rotaciones al que se acaba de aludir puede no serlo.)

§ 10. *Axiomatización de teorías científicas*

Por otra parte, aunque el campo propio de aplicación del método axiomático sean las ciencias formales, como la matemática y la lógica, también cabe ensayar el intento de aplicarlo a teorías empíricas. Sobre el valor epistemológico de este intento se dividen las opiniones. La axiomatización no influye en la expansión de las ciencias empíricas tan directamente como influye en la expansión de la matemática. Pero es sin duda alguna útil para la clarificación y el análisis lógico y metodológico de las hipótesis y teorías que interesan a las ciencias empíricas. El lógico alemán HERMES confeccionó en 1938 una axiomatización de la mecánica general. Henry WOODGER ha ultimado recientemente una valiosa axiomatización de la genética en la que venía trabajando desde varias décadas. VON NEUMANN y MORGENSTERN en 1948 y más recientemente SUPPES han axiomatizado la teoría económica de la decisión y la utilidad.

CAPÍTULO XV

METALÓGICA DE ENUNCIADOS

A. INTRODUCCIÓN

§ 1. *Las cuestiones críticas de la metateoría*

Un sistema formal, sea natural o axiomático, es una estructura sintáctica vacía de contenido, pero no enteramente arbitraria, puesto que se la construye con la intención de someterla a interpretación (semántica) y desde la perspectiva de una metateoría que no prescinde de la crítica ni del razonamiento intuitivo [1].

Una de las tareas de la metateoría consiste en considerar el sistema desde un punto de vista global y someterlo a estas tres preguntas:

---

[1] O, mejor dicho, de las zonas críticamente más seguras del razonamiento intuitivo.

A principios de siglo, L. E. J. BROUWER (1881-1966) y la escuela *intuicionista* presentaron objeciones muy graves contra el principio clásico de tercio excluso (*tertium non datur*), alegando que ese principio carece de validez cuando se lo aplica a conjuntos no finitos. Desde entonces suele distinguirse en matemática y lógica entre pruebas *clásicas* o *no constructivas*, que se apoyan en el uso no restringido del principio de tercio excluso, y pruebas *constructivas* o *finitistas*, que se atienen tan sólo a los principios más «seguros» de la lógica y de la matemática (principio de no contradicción, principio de inducción matemática).

El creador de la escuela *formalista*, David HILBERT (1862-1943), trató de mediar entre el pensamiento clásico y el pensamiento intuicionista, aceptando que una teoría formalizada, expuesta en lenguaje objeto, se gobernase por los principios de la lógica clásica, pero a condición de que se la sometiera a un análisis crítico, elaborado desde un metalenguaje informal e intuitivo, que demostrase su consistencia por métodos constructivos. Así fue como surgió, propuesta por HILBERT, la *metamatemática*, como una metateoría de teorías matemáticas que se sujeta estrictamente a criterios constructivos.

No todos, sin embargo, han seguido a HILBERT por este camino. Alfred TARSKI y su escuela, por ejemplo, continúan considerando que la metamatemática y la metalógica son teorías metalingüísticas de teorías formales, pero sin conceder por ello que las pruebas metamatemáticas hayan de renunciar al uso de los principios de la lógica clásica. Frente a la metamatemática hilbertiana, finitista y constructiva, la metamatemática de TARKI es clásica e infinitista.

(1) ¿Hay seguridad de que el sistema está exento de contradicción, es decir, de que no sólo no ha conducido, sino de que no conducirá a una conclusión contradictoria?

(2) ¿Hay seguridad de que el sistema tiene potencia o capacidad suficiente para suministrar todas aquellas conclusiones que, en principio, desearíamos obtener de él?

(3) ¿Existe un procedimiento que permita decidir de un modo mecánico si una fórmula es o no deducible en el sistema?

Si es posible contestar afirmativamente a la primera pregunta, se dice que el sistema es *correcto, consistente* o *no contradictorio*. Cuando es afirmativa la respuesta a la segunda, se dice que es *completo*. Y cuando asimismo sucede con la tercera, que es *decidible*. En caso contrario, el sistema será, correlativamente, inconsistente, incompleto o indecidible.

Consistencia (corrección), completud y decidibilidad son propiedades que afectan al sistema formal globalmente considerado. La demostración de que éste posee alguna de ellas, no es una tesis *del* sistema, susceptible sin más de ser deducida en términos de lenguaje formal, sino una tesis *acerca del* sistema, que deberá ser abordada con los criterios y los métodos de la metateoría.

En el presente capítulo nos ocuparemos del estudio de estas tres cuestiones para el estrato más simple del sistema de la lógica elemental, que es la lógica de enunciados (lógica de conectores).

Pero antes de seguir adelante, conviene establecer algunas precisiones respecto de cada una de las tres citadas preguntas.

Un sistema formal es consistente cuando todas las fórmulas que de él se derivan o pueden derivarse están exentas de contradicción. Cuando el sistema en cuestión pretende formalizar teorías lógicas, su no contradictoriedad se establece demostrando que las fórmulas en él derivables son verdades lógicas. La *tesis de consistencia* vincula, pues, en el caso de los sistemas lógicos, el concepto (sintáctico) de derivabilidad o deducibilidad formal con el concepto (semántico) de verdad lógica. Esta tesis podría enunciarse diciendo que: *si una fórmula A es formalmente deducible en el sistema, entonces es lógicamente verdadera.* Más brevemente:

$$\textit{si} \vdash A, \textit{ entonces} \models A.$$

La *tesis de completud* está relacionada con la anterior, cuya inversa es. Un sistema es completo cuando tiene potencia o capacidad suficiente para que de él se deriven todas aquellas fórmulas que co-

rrespondan a verdades de la parcela científica que el sistema en cuestión pretenda formalizar. Por ejemplo, un sistema que pretendiese formalizar la lógica clásica de enunciados y estuviese desprovisto de axiomas o reglas de negación, sería incompleto, porque carecería de capacidad para que de él se pudiesen derivar ciertas fórmulas con negador que corresponden a verdades de la lógica clásica, como sucedería, entre otras, con las leyes de DE MORGAN. La tesis de completud para un sistema lógico puede enunciarse así: *si una fórmula A es lógicamente verdadera, entonces es formalmente deducible en el sistema*. Más brevemente:

$$si \models A, entonces \vdash A.$$

Entre la tesis de consistencia y la tesis de completud para un sistema lógico se puede establecer el siguiente parangón. La primera exige que *sólo* puedan deducirse verdades lógicas, mientras que la segunda exige que puedan deducirse *todas* las verdades lógicas. Por la primera se afirma que la verdad lógica es condición necesaria de la deducibilidad formal; por la segunda, que la verdad lógica es condición suficiente de la deducibilidad formal.

La conjunción de ambas tesis constituye una aserción del máximo interés: la aserción de la coincidencia o equivalencia entre sintaxis y semántica. En símbolos:

$$\vdash \mathrm{A} \text{ sii } \models \mathrm{A}.$$

La demostración de este resultado para la lógica elemental fue obtenida en 1930 por GÖDEL. Se trata, tal vez, del más importante de los alcanzados en la investigación de sistemas de lógica elemental. El mismo resultado para la lógica de enunciados había sido obtenido ya por POST en 1920.

Añadiremos ahora algunas palabras sobre la *decidibilidad*. En general, se dice que un problema o un grupo de problemas es *decidible* cuando existe un procedimiento que permite resolverlo de una manera mecánica. A un procedimiento que permite resolver mecánicamente un problema o un grupo de problemas se le da el nombre de *procedimiento decisorio* o *algoritmo*. Un ejemplo de procedimiento de esta índole es el que existe en aritmética elemental para hallar el máximo común divisor de dos números (algoritmo de Euclides).

En el caso de los sistemas formales se habla de *decidibilidad* cuando existe un algoritmo o procedimiento decisorio que permita

determinar mecánicamente si una fórmula cualquiera es o no deducible. Un sistema formal será *decidible* o *indecidible* según que exista o no exista un tal procedimiento decisorio de la deducibilidad de sus fórmulas.

Mencionaremos finalmente una cuarta cuestión de menor importancia: la *independencia*. Un sistema formal o deductivo es llamado *independiente* cuando no se da el caso de que alguno de sus axiomas o alguna de sus reglas primitivas pueda ser derivada de los otros axiomas o de las otras reglas primitivas. Cuando ese caso se da, se dice que el axioma o la regla en cuestión, y por consiguiente el sistema mismo, es *redundante*. La cuestión de la independencia en un sistema no es un problema de necesidad, sino sólo de elegancia o de economía de supuestos. De hecho, en la confección de un determinado sistema puede haber razones que aconsejen su redundancia (por ejemplo, la comodidad en la realización de los cálculos).

En lo que sigue, abordaremos el estudio de cada una de las principales cuestiones de la metateoría, primero para la lógica de enunciados, y después para la lógica de predicados.

B. METALÓGICA DE ENUNCIADOS

El sistema de la lógica de conectores constituye un estrato inicial y muy simple de la lógica elemental, y puede ser tratado separadamente. Consideraremos: A) la consistencia; B) la completud, y C) la decidibilidad de dicho sistema.

§ 2. *Consistencia de la lógica de enunciados*

La prueba de consistencia del sistema de lógica de conectores se basa en la siguiente estrategia:

(1) determinar una propiedad que «inmunice» contra la contradicción; y
(2) demostrar a continuación que esa propiedad pertenece a toda fórmula del sistema, tanto a los axiomas como a los teoremas.

La propiedad en cuestión para dicho sistema es la *tautologicidad*, o propiedad de ser tautología. El concepto de tautología es un con-

cepto que «inmuniza» frente a la contradicción, puesto que por definición la excluye. Una contradicción es, justamente, la negación de una tautología.

Asegurarse de que los axiomas de la lógica de enunciados son tautologías es cosa fácil. Basta, por ejemplo, con someterlos, uno tras otro, al procedimiento de las tablas de verdad, que permite decidir mecánicamente y en un número finito de pasos si una fórmula enunciativa posee o no tal propiedad.

Queda por probar que cualquier teorema del sistema es también tautología. Examinar uno por uno todo posible teorema no es tarea efectuable en un tiempo finito. Pero cabe el siguiente recurso: probar que las reglas de inferencia del sistema transmiten hereditariamente esa propiedad a las conclusiones siempre que las premisas las posean. Si efectivamente se logra establecer que así es, no habrá teorema que escape a esa herencia, puesto que todos proceden de la aplicación de las reglas.

En un sistema axiomático usual (como el expuesto en el Capítulo anterior, § 2), el catálogo de reglas primitivas de inferencia de la lógica de enunciados puede reducirse al *modus ponens*. Ahora bien, una manera de asegurarse de que esta regla transmite hereditariamente la tautologicidad si sus premisas son tautologías consiste en inspeccionar la primera línea de la tabla de verdad correspondiente a una implicación. El examen de dicha primera línea permite advertir que si el antecedente A de una implicación y la implicación misma $A \to B$ son ambos verdaderos, entonces, necesariamente, también lo es el consecuente B. Porque de las cuatro atribuciones veritativas posibles para el par de componentes de la implicación, sólo la primera de ellas (primera línea) es compatible con el supuesto de la simultánea verdad de A y $A \to B$. Pero esa atribución incluye necesariamente

	A	B	$A \to B$
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

la verdad de B, que es el consecuente de la implicación y, en su caso, conclusión del *modus ponens*.

Queda, pues, demostrado que la regla MP transmite hereditariamente la tautologicidad cuando sus premisas la poseen y, por tanto,

la consistencia de la lógica de enunciados [2]: toda fórmula deducible en esta parte de la lógica es una tautología.

§ 3. *Completud de la lógica de enunciados*

El teorema de completud de la lógica de conectores exige que toda verdad lógica de este sistema, es decir, toda tautología, sea formalmente deducible: si A es tautología, entonces A es derivable.

La prueba de este teorema que más frecuentemente aparece expuesta en tratados y manuales es de KALMAR (1934-1935). Dicha prueba se basa en la previa demostración de un lema por el que se establece una conexión entre el concepto semántico de atribución veritativa y el concepto sintáctico de deducibilidad. En síntesis, lo que este lema pretende es mostrar que cada una de las líneas horizontales que componen una tabla de verdad puede ser considerada como una deducción, cuyas premisas son las variables enunciativas de que consta la fórmula que se analice en la tabla y cuya conclusión sería esa misma fórmula: bastaría con escribir en cada caso en lugar de V la letra o la fórmula así interpretada, y su negación en lugar de F. Por ejemplo, las cuatro líneas de la tabla de verdad de una implicación darían lugar a estas cuatro deducciones:

---

[2] El lector habrá reparado en el carácter semántico de esta prueba y del concepto de consistencia por ella obtenido, ya que las nociones de tautología y de contradicción como negación de tautología son nociones semánticas.

Desde un punto de vista sintáctico, la consistencia de un sistema formal puede ser definida como la imposibilidad de que en ese sistema una misma fórmula sea deducible y refutable; es decir, cuando no es posible en el sistema, siendo A una fórmula, que $\vdash$ A y $\vdash \neg$ A (consistencia en el sentido de HILBERT).

E. L. POST (1897-1954) definió un concepto especial de consistencia sintáctica, emparentado con el anterior. Un sistema es consistente en el sentido de POST cuando no es posible deducir en él una fórmula que se reduzca a una sola letra enunciativa, sin compañía de otras letras ni de operadores lógicos. Que esta condición es garantía de consistencia, se patentiza como sigue:

Supóngase que es posible derivar en lógica de enunciados una fórmula de esa índole, p. ej.: $\vdash$ p. La sustitución de (todas las ocurrencias de) una letra enunciativa en una fórmula del sistema por cualquier otra letra o cualquier otra fórmula es correcta siempre. Sustitúyase, en la fórmula que se supone obtenida, la letra p por la fórmula $\neg$ p. Ello daría por resultado: $\vdash \neg$ p, con lo cual se desemboca en la contradicción (sintáctica): $\vdash$ p y $\vdash \neg$ p. El supuesto inicial no puede ser admitido.

A	B	$A \to B$	
V	V	V	1 $A, B \vdash A \to B$
V	F	F	2 $A, \neg B \vdash \neg (A \to B)$
F	V	V	3 $\neg A, B \vdash A \to B$
F	F	F	4 $\neg A, \neg B \vdash A \to B$.

El enunciado del *lema* podría ser este: para toda fórmula A y para toda atribución veritativa de la misma, si la atribución verifica a A, A es deducible; y si la falsifica, es deducible $\neg$ A.

La *demostración* del lema se efectúa por inducción matemática sobre el grado lógico de A.

Base. El grado lógico de A es 0. Entonces A es una letra enunciativa, y sea que se la interprete como V o como F, la cuestión se reduce a una aplicación trivial de la ley de identidad: $A \vdash A$, o $\neg A \vdash \neg A$.

Paso. Por hipótesis de inducción se supone la validez del lema para cualquier grado lógico menor que *n* siendo *n* el grado lógico de A. Reduciendo previamente el repertorio de juntores a dos primitivos: $\neg$, $\to$, sólo hay que contemplar dos eventualidades, según que A sea una negación o una implicación.

Si A es una negación: $\neg$ B, la fórmula B por ella negada ha sido deducida ya en uno u otro sentido (hipótesis de inducción). Si lo fue positivamente, es porque había sido también positivamente interpretada; pero entonces A debe ser interpretada como F y es necesario deducir $\neg$ A: ello se obtiene aplicando a B la ley de introducción de doble negador, ya que $\neg \neg$ B es $\neg$ A. Si lo fue negativamente se tiene ya A, que es lo que en tal caso, y por similares razones, había que deducir.

Si A es una implicación $B \to C$, sus componentes B y C han sido ya deducidos positiva o negativamente (hipótesis de inducción). Si A es verdadera, entonces una de dos: o su antecedente B es falso, en cuyo caso se habrá obtenido ya $\neg$ B (hipótesis de inducción), y con ello A; o su consecuente C es verdadero, en cuyo caso se habrá obtenido ya C (hipótesis de inducción), fórmula que permite liberar de antecedente la (legítima) carga de premisa $C \to (B \to C)$, dando como resultado la implicación $B \to C$, esto es, A. Pero si A es falsa, es forzoso suponer que el antecedente B de la implicación es verdadero y el consecuente C falso y que, por hipótesis de inducción, se han obtenido ya B y $\neg$ C. De estas dos premisas se sigue $\neg (B \to C)$ por doble aplicación de MP al teorema T9, que aquí reescribimos: $\vdash B \to (\neg C \to \neg (B \to C))$. (La demostración de este teorema se expuso en el capítulo anterior, § 4.)

Una vez probado el lema, la demostración del teorema discurre así: según la hipótesis del mismo, A es tautología. Pero si A es tautología, entonces, de acuerdo con la definición de dicho concepto, A es verdadera para todas y cada una de sus atribuciones veritativas. Y a su vez, si A es verdadera para todas y cada una de sus atribuciones veritativas, entonces, y de acuerdo con el lema, se sigue que A es positivamente deducible de cualquiera de ellas. Es decir, que A es deducible a partir de la serie completa de las letras enunciativas de que consta, y cualquiera que sea el valor de verdad que tomen éstas. Ello puede expresarse así: Siendo $p_1, ..., p_n$ las letras enunciativas de que consta A, y siendo p_i $(1 \leq i \leq n)$ cualquiera de esas letras en *cualquiera* de sus atribuciones veritativas, tendríamos que para p_n:

(a) $p_i, ..., p_n \vdash A$

(b) $p_i, ..., \neg p_n \vdash A$,

es decir, que A se sigue tanto de p_n (y cualesquiera otros supuestos) como de su negación (y esos mismos cualesquiera supuestos). Pero si una fórmula B y su negación $\neg B$ dan lugar a un mismo resultado A, este resultado debe ser admitido, como se indica en el teorema T13, que aquí reescribimos: $\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow A)$. (Véase la demostración de dicho teorema en el capítulo anterior, § 4.) Ahora bien, lo que se establece en (a) y (b) para p_n, puede establecerse igualmente para todas y cada una de las letras enunciativas de que consta A. Siendo p_i cualquiera de ellas, sin excluir a p_n $(1 \leq i \leq n)$, es obvio que puede pasarse de $p_i \vdash A$ y $\neg p_i \vdash A$, mediante TD, a $\vdash p_i \rightarrow A$ y $\vdash \neg p_i \rightarrow A$, con lo que se dispone de los oportunos antecedentes para liberar por doble aplicación de MP la conclusión A en la instancia correspondiente de T13: $(p_i \rightarrow A) \rightarrow ((\neg p_i \rightarrow A) \rightarrow A)$. Esta rutina se repetiría, naturalmente, para cada una de las letras p_i.

§ 4. *Decidibilidad de la lógica de enunciados*

Un sistema formal o teoría deductiva es decidible, como ya se indicó en la sección primera de este capítulo, si se cuenta con un procedimiento decisorio o algoritmo que permita resolver mecánicamente el problema de saber si una fórmula es deducible en el sistema. La decidibilidad de la lógica de juntores se demuestra de un modo muy sencillo.

La unión del metateorema de consistencia (toda fórmula deducible es tautología) y del metateorema de completud (toda tautología es deducible) en el sistema de lógica de juntores, permite afirmar que una fórmula es deducible en este sistema si y sólo si es tautología. La tautologicidad resulta ser así condición necesaria y suficiente de la deducibilidad. Decidiendo la primera, se decide la segunda.

Ahora bien, para decidir si una fórmula es tautológica existe una diversidad de procedimientos algorítmicos, entre los que se cuentan el método de las tablas de verdad y el método de reducción a formas normales. Según el método de las tablas de verdad (véase Cap. IV, § 2), las fórmulas tautológicas se caracterizan inequívocamente porque en la columna final de la tabla el resultado es siempre V, lo cual no sucede con ninguna otra clase de fórmulas. La teoría de las formas normales en lógica de enunciados enseña (véase Cap. XVIII, § 2) que dada una fórmula cualquiera es posible reducirla, en un número finito de pasos, a otra equivalente a ella en forma normal conjuntiva, consistente en una conjunción de disyunciones en la cual se comprueba por simple inspección si se trata o no de una tautología (en el caso de que la fórmula sea tautológica, cada una de las disyunciones que integran la forma normal deberá incluir la afirmación y la negación de una misma letra enunciativa).

Dada la existencia de tales métodos, queda demostrado sin más que el sistema de lógica de enunciados es decidible. La tesis de la decidibilidad trivializa, al menos en teoría, los problemas de estrategia deductiva en la resolución de argumentos en lógica de juntores, ya que, en definitiva, esos problemas resultan ser mecánicamente solubles por métodos no deductivos. En la práctica, sin embargo, el recurso a las estrategias deductivas lleva consigo una considerable economía de espacio y de tiempo en la resolución de muchos casos.

§ 5. *Independencia en lógica de enunciados*

Hablando en términos generales, un axioma es independiente en un sistema si no es posible obtenerlo por deducción a partir del resto del sistema.

Las pruebas de independencia se confeccionan, ordinariamente, buscando modelos que satisfagan a todos los axiomas del sistema menos a aquel cuya independencia se pretende demostrar. El hallazgo de tal método es prueba evidente de que el axioma en cues-

tión es independiente (pues si dependiera deductivamente del resto del sistema, tal y como una conclusión depende de sus premisas en un argumento correcto, no podría darse el caso de un modelo que satisfaciendo a las premisas no satisficiese a la conclusión) [3].

El método usual para establecer la independencia de axiomas en lógica se basa precisamente en la construcción de modelos adecuados. Para la construcción de tales modelos se ha utilizado la idea de extrapolar o generalizar el método de las tablas de verdad, ampliando el criterio normal de bivalencia al de *n*-valencia [4].

A este fin se determina un número *n*, que puede ser superior a 2, de valores a los que, por su similitud con los veritativos, se les puede llamar «cuasi-veritativos», y se selecciona de entre esos valores uno que haya de servir para definir la tautologicidad, o, por me-

---

[3] Éste es un procedimiento que podemos llamar directo. También cabe practicar un procedimiento indirecto, particularmente adecuado para resolver *negativamente* las cuestiones de independencia. Dicho procedimiento consiste en: (a) transformar el sistema sustrayéndole el axioma cuya independencia está bajo cuestión y agregándole, a cambio, la negación de ese mismo axioma; y (b) tratar de deducir una contradicción del sistema así transformado. Bien entendido: la obtención de una contradicción en esas condiciones es, claramente, una prueba de que el axioma sometido a examen *no* es *independiente; porque cuando un enunciado cualquiera*, A, es lógicamente independiente con respecto a un conjunto de enunciados Γ, que se supone consistente, para la consistencia de ese conjunto Γ debe ser totalmente indiferente que se le incorpore, o bien el enunciado A, o bien su negación, ¬ A: en ninguno de ambos extremos es de temer que Γ se convierta en fuente de contradicción.

Un caso histórico de gran interés en este sentido fue el secular e infructuoso intento de probar la *no* independencia del llamado *axioma de las paralelas* (*quinto postulado de* EUCLIDES) («si una línea recta que corta a otras dos forma ángulos internos del mismo lado de la secante cuya suma sea menor de dos rectos, esas otras dos rectas, cuando se las prolonga hacia este lado, se encuentran»). La escasa transparencia intuitiva del contenido de este axioma, unida a otras circunstancias, indujo desde muy antiguo a los matemáticos a intentar reducirlo a teorema deduciéndolo del resto del sistema. Ante el reiterado fracaso de los intentos de prueba directa de dependencia, en el siglo XVIII el jesuita SACCHERI ensayó la vía indirecta, tratando de obtener una contradicción a partir de la geometría euclidea *sin* el axioma de las paralelas, pero *con* la negación de éste. Como es sabido, el intento de SACCHERI no desembocó en contradicción, sino en el descubrimiento de un cuerpo entero de doctrina: la *geometría no euclidiana*, instaurada como nueva rama científica con GAUSS, LOBATSCHEVSKI y BOLYAI a principios del siglo XIX. En la segunda mitad de dicho siglo BELTRAMI primero y luego Félix KLEIN exhibieron modelos euclidianos que satisfacían las exigencias de la geometría no euclidiana, garantizando así la consistencia de ésta. Con lo cual, el primitivo ensayo de prueba de no independencia del axioma de las paralelas daba por resultado la prueba de su independencia.

[4] El descubrimiento de este método se debe, independientemente, a BERNAYS y ŁUKASIEWICZ.

jor decir, la «cuasi-tautologicidad» de las fórmulas. Acto seguido se procede a la construcción de las tablas por las que se define el sentido que ha de darse a las partículas conectivas de carácter primitivo en el sistema. De acuerdo con estas tablas, que llamaremos *primitivas*, se confeccionarán las correspondientes a cada axioma. Si se obtiene como resultado que todos los axiomas del sistema poseen la nota de «cuasi-tautologicidad» salvo aquel cuya independencia se desea probar, puede decirse que el axioma en cuestión es independiente [5].

Pasemos ahora a demostrar la independencia de cada uno de los axiomas A1, A2 y A3 que componen el estrato correspondiente a la lógica de enunciados del sistema de lógica elemental L, expuesto en el capítulo anterior, §§ 2 y siguientes, cuyos conectores primitivos son implicador y negador. El modelo ofrecido es distinto para la prueba de independencia de cada axioma. Cada modelo consistirá en una tabla, bien sea bivalente (valores: 0, 1), bien sea trivalente (valores: 0, 1, 2), definitoria del sentido que haya de darse al implicador y otra similar para el negador. Seleccionamos el valor 0 como privilegiado, indicativo de «cuasi-verdad» en estos modelos. En cada caso deberá resultar, una vez construidas las tablas para los distintos axiomas, que todos ellos poseen la «cuasi-tautologicidad» salvo el axioma cuya independencia se pretenda establecer.

Por lo que respecta a las tablas que se componen más abajo, tal vez valga la pena esta aclaración. Las tablas definitorias de los símbolos primitivos en cada modelo se han confeccionado, siguiendo a ŁUKASIEWICZ, de forma que las dobles entradas se ocupen por los valores correspondientes a cada uno de los argumentos de la función lógica a definir, cuando ésta es diádica. La intersección de dichas entradas es en cada caso el valor que corresponde a la función. La tabla correspondiente al implicador en lógica bivalente clásica (siendo el número 1 símbolo de «verdadero» y el número 0 símbolo de «falso») es así:

$\rightarrow$

	0	1
0	1	1
1	0	1

[5] También puede demostrarse, correlativamente, la independencia de una regla primitiva de inferencia, con respecto al resto de un sistema, mediante la exhibición de un modelo que satisfaga a dicho resto, pero en el cual una regla no transmita el valor seleccionado. Véase CHURCH, *Introduction to mathematical logic*, vol. I, 1956, pp. 112 ss.

Los encabezamientos que preceden a cada fila de la tabla son los valores del primer argumento de la función lógica A → B; y los encabezamientos de columna son los valores del segundo argumento. La intersección de unos y otros es, en cada caso, el valor de la función; por ejemplo, 1 cuando el primer y el segundo argumento valen 0, y 0 cuando el primer argumento vale 1 y el segundo 0. Si para economizar espacio en la exposición de tablas primitivas, que son la clave del modelo, adosamos a la anterior la tabla del negador (siendo entonces también los encabezamientos izquierdos de fila los valores argumentales correspondientes), resultará esta figura.

→	0	1	¬
0	1	1	1
1	0	1	0

De esta manera deberán leerse las tablas definitorias de símbolos primitivos en cada uno de los modelos que siguen a continuación. Pero con la diferencia de que en esas tablas el número de valores puede ser superior a 2, el símbolo elegido como valor «veritativo» de privilegio es 0 y el valor que en cada caso cobra cada función no es el de la lógica ordinaria.

I. MODELO DEMOSTRATIVO DE LA INDEPENDENCIA DE A1

TABLAS PRIMITIVAS

→	0	1	2	¬
0	0	2	2	1
1	2	2	0	1
2	0	0	0	0

TABLA DE A2: (A → (B → C)) → ((A → B) → (A → C))

A	B	C	B → C	D_1 A → (B → C)	A → B	A → C	D_2 (A → B) → (A → C)	D_1 → D_2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	2	2	0	2	2	0
0	0	2	2	2	0	2	2	0
0	1	0	2	2	2	0	0	0
0	1	1	2	2	2	2	0	0
0	1	2	0	2	2	2	0	0
0	2	0	0	0	2	0	0	0
0	2	1	0	0	2	2	0	0
0	2	2	0	0	2	2	0	0
1	0	0	0	2	2	2	0	0
1	0	1	2	0	2	2	0	0
1	0	2	2	0	2	0	0	0
1	1	0	2	0	2	2	0	0
1	1	1	2	0	2	2	0	0
1	1	2	0	2	2	0	0	0
1	2	0	0	2	0	2	2	0
1	2	1	0	2	0	2	2	0
1	2	2	0	2	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	2	0	0	0	0	0
2	0	2	2	0	0	0	0	0
2	1	0	2	0	0	0	0	0
2	1	1	2	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0	0	0

TABLA DE A3: (¬ A → ¬ B) → (B → A)

A	B	¬ A	¬ B	¬ A → ¬ B	B → A	(¬ A → ¬ B) → (B → A)
0	0	1	1	2	0	0
0	1	1	1	2	2	0
0	2	1	0	2	0	0
1	0	1	1	2	2	0
1	1	1	1	2	2	0
1	2	1	0	2	0	0
2	0	0	1	2	2	0
2	1	0	1	2	0	0
2	0	0	0	0	0	0

TABLA DE A1: A → (B → A)

A	B	B → A	A → (B → A)
0	0	0	0
0	1	2	2
0	2	0	0
1	0	2	0
1	1	2	0
1	2	0	2
2	0	2	0
2	1	0	0
2	2	0	0

La inspección de las tablas revela que, para este modelo, A2 y A3 son «cuasi-tautologías», pero no A1.

II. MODELO DEMOSTRATIVO DE LA INDEPENDENCIA DE A2

TABLAS PRIMITIVAS

→	0	1	2	¬
0	0	1	1	2
1	0	0	1	1
2	0	0	0	0

TABLA DE A1: A → (B → A)

A	B	B → A	A → (B → A)
0	0	0	0
0	1	0	0
0	2	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	2	0	0
2	0	1	0
2	1	1	0
2	2	0	0

TABLA DE A3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \rightarrow \neg B$	$B \rightarrow A$	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
0	0	2	2	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	2	2	0	0	0	0
1	0	1	2	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0
2	0	0	2	1	1	0
2	1	0	1	1	1	0
2	2	0	0	0	0	0

TABLA DE A2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

				D_1			D_2	
A	B	C	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow C$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	$D_1 \rightarrow D_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	2	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	2	1	1	1	1	0	0
0	2	0	0	0	1	0	0	0
0	2	1	0	0	1	1	0	0
0	2	2	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	2	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	1	1	1
1	2	0	0	0	1	0	0	0
1	2	1	0	0	1	0	0	0
1	2	2	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
2	0	2	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0	0	0

La inspección de las tablas revela que, para este modelo, A1 y A3 son «cuasi-tautologías», pero no A2.

III. MODELO DEMOSTRATIVO DE LA INDEPENDENCIA DE A3

TABLAS PRIMITIVAS

$\rightarrow$	0	1	$\neg$
0	0	1	0
1	0	0	1

TABLA DE A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A	B	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0

TABLA DE A2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

				D_1			D_2	
A	B	C	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow C$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	$D_1 \rightarrow D_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

TABLA DE A3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \rightarrow \neg B$	$B \rightarrow A$	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0

La inspección de las tablas revela que, para este modelo, A1 y A2 son «cuasi-tautologías», pero no A3.

CAPÍTULO XVI

METALÓGICA DE PREDICADOS

La lógica cuantificacional de primer orden es consistente y completa (correcta), pero no dedicible, o al menos sólo parcialmente. Trataremos separadamente cada una de estas cuestiones. Después de considerar la consistencia (§ 1), nos ocuparemos del teorema de completud, resultado de inestimable importancia cuya demostración será expuesta con detalle (§ 2). Del teorema de completud se siguen, a manera de corolario, el resultado de LÖWENHEIM-SKOLEM y el teorema de compacidad (§§ 3, 4). Finalmente distinguiremos las zonas parciales de decidibilidad de la lógica cuantificacional de primer orden (§ 5) del problema general de su indecidibilidad (§ 6).

§ 1. *Consistencia de la lógica de cuantificadores*

La demostración de la consistencia de la lógica de cuantificadores de primer orden se obtiene recurriendo a una cierta reducción de la misma al plano de la lógica de conectores y a la idea de tautología (que fue el eje de la prueba de la consistencia en ese plano).

Si en una fórmula cuantificacional cualquiera, A, se efectúa la doble operación de: (1) suprimir todos los cuantificadores y símbolos de individuo, y (2) reemplazar después convenientemente las letras predicativas por letras enunciativas que no figurasen antes en la referida fórmula A, caso de que las hubiera, se obtiene como resultado una fórmula enunciativa A′, a la que podemos llamar con CHURCH *fórmula enunciativa asociada* a la fórmula cuantificacional A.

Por ejemplo, siendo $A \rightleftharpoons \bigwedge xPx \rightarrow Pa$, la fórmula enunciativa asociada correspondiente se obtendrá eliminando primero los símbolos de cuantificador y de individuo y sustituyendo después en el resultado: $P \rightarrow P$ de esta transformación las letras predicativas por letras enunciativas: $A' \rightleftharpoons p \rightarrow p$.

La consistencia de **L**[1] se establece considerando que:

1) Sus axiomas o bien son tautologías (tal es el caso de A1, A2, A3)[2] o bien tienen por fórmula enunciativa asociada una tautología (como es el caso de A4, cuya fórmula enunciativa asociada: $(A \rightarrow p) \rightarrow (A \rightarrow p)$ es tautológica, y de A5, según acabamos de ver en el anterior ejemplo); y

2) Sus reglas de inferencia transmiten la tautologicidad, lo cual se ha demostrado ya de la regla R1[3] y es asimismo cierto de la regla R2, puesto que si cambiamos en ella la premisa y la conclusión por sus fórmulas enunciativas asociadas, resultará:

$$\frac{A \rightarrow p}{A \rightarrow p}$$

que es, sencillamente, una modalidad esquemática del principio tautológico de identidad de la implicación.

De estas consideraciones se sigue sin dificultad que el sistema de lógica elemental **L** es consistente o correcto, es decir, que no es posible deducir de él un par de enunciados contradictorios $\vdash A$ y $\vdash \neg A$. Porque si suponemos que ello es posible, deberá aceptarse, según se acaba de establecer, que las fórmulas enunciativas A' y $\neg A'$, asociadas respectivamente a dichos enunciados A y $\neg A$, son tautologías. Ahora bien, si A' es una tautología, no es posible que su negación $\neg A'$ también lo sea, ya que la negación de una tautología no es otra tautología, sino una contradicción. Para evitar este absurdo semántico es preciso negar el supuesto de la deducibilidad del par de enunciados contradictorios y admitir, por tanto, que el sistema de lógica elemental es consistente.

Un modo alternativo de demostrar la consistencia de **L** se apoya en la idea de satisfacibilidad, que garantiza asimismo contra el riesgo de contradicción: un sistema que encuentra, cuando menos, un modelo no puede ser contradictorio. Ahora bien, el sistema **L** posee, cuando menos, un modelo. Elíjase un universo que conste de un solo individuo (y que, por tanto, no es vacío). En este universo, y ciñéndonos a los axiomas y reglas estrictamente cuantificacionales

---

[1] Véase la exposición de la base axiomática del sistema en Capítulo XIV, § 2.
[2] Véase la sección segunda de este capítulo.
[3] Véase la sección segunda de este capítulo.

del sistema, es evidente que A4: $(A \rightarrow Pa) \rightarrow (A \rightarrow \wedge xPx)$ y A5: $\wedge xPx \rightarrow Pa$ son verdaderos, puesto que en un universo semejante todo lo que pueda predicarse de un individuo (que es el único) se predica de todos (que se reducen a ese único). También es obvio que la regla de generalización R2 transmite la verdad en el sistema interpretado por referencia a un tal universo.

§ 2. *El teorema de completud de Gödel (prueba de Henkin)*

El sistema formal de lógica de cuantores será completo si todas las fórmulas que representan verdades lógicas son formalmente deducibles en el sistema. Como ya se indicó en la primera sección del capítulo anterior, la tesis de completud pone en relación el concepto semántico de verdad lógica con el concepto sintáctico de deducibilidad formal:

$$\text{si} \models A, \text{ entonces} \vdash A.$$

La completud de la lógica cuantificacional de primer orden fue demostrada por GÖDEL en 1930 [4]. En 1949 [5] HENKIN presentó una prueba más sencilla del teorema, que es la que normalmente sirve de base a la exposición del mismo en la mayoría de los manuales [6].

El medio demostrativo de la prueba de HENKIN es el establecimiento de una nueva relación que conecta la sintaxis con la semántica: la relación entre el concepto (sintáctico) de consistencia y el concepto (semántico) de satisfacibilidad.

A este fin HENKIN prueba primero un teorema, que aquí llamaremos [7] *teorema de satisfacción*, según el cual todo conjunto de fór-

---

[4] K. GÖDEL, «Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls» [«La completud de los axiomas del cálculo funcional lógico»], *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 37 (1930), pp. 349-360. Este resultado no debe ser confundido con el más famoso «teorema de GÖDEL» sobre la incompletud de la aritmética, obtenido por su autor en 1931.

[5] L. HENKIN, «The completeness of the first-order functional calculus», *Journal of Symbolic Logic*, vol. 14 (1949), pp. 159-166.

[6] Este prueba fue simplificada por HASENJÄGER en 1952. Pruebas constructivas del teorema de completud se deben a HINTIKKA, BETH y SMULLYAN.

[7] Siguiendo a GOODSTEIN, *Development of Mathematical Logic*, Logos, Londres, 1971.

mulas (y, por supuesto, toda fórmula) que sea consistente es satisfacible. De este teorema se sigue fácilmente, como corolario, el teorema de completud. De este modo el problema de la completud (que autoriza el paso de la verdad lógica a la deducibilidad) es reducido al problema previo de autorizar el paso de la consistencia a la satisfacibilidad.

A continuación sigue una exposición, dividida en sendos apartados, de: A) las líneas generales de la prueba de HENKIN; B) el desarrollo pormenorizado de esta prueba, y C) el teorema de completud de GÖDEL. El lector no interesado por esta materia puede omitir el apartado B).

A. *El teorema de satisfacción de HENKIN: plan y líneas generales de la prueba*

El *teorema de satisfacción* de HENKIN (1949) puede enunciarse así: *Para cualquier conjunto Γ de fórmulas de lógica elemental, si Γ es consistente, entonces Γ es simultáneamente satisfacible* [8] *en un modelo enumerable* [9].

La demostración del teorema se divide estratégicamente en dos partes, una sintáctica y otra semántica:

1. *Parte sintáctica: maximalización del conjunto consistente dado.* Esta primera parte consiste en extender sistemáticamente al máximo el conjunto de fórmulas Γ (que se supone dado en la hipótesis del teorema), por adición sucesiva de toda fórmula posible que sea compatible con él, esto es, que no atente contra su consistencia. El resultado será un conjunto consistente *máximo* que, obviamente, incluye al anterior. Por *conjunto consistente máximo*, o *máximamente consistente*, se entiende un conjunto que no sólo es consis-

---

[8] Sobre la noción de «simultáneamente satisfacible», véase Capítulo VIII, § 6.

[9] En matemática se distingue usualmente entre infinito enumerable y no enumerable. *Enumerable* es el conjunto de los números naturales: 0, 1, 2, ..., n, ..., y cualquier otro conjunto equiparable al de los números naturales (p. ej., el conjunto de los números enteros negativos o el conjunto de los números racionales). Del infinito *no enumerable* se dice que posee una «infinitud» inmensamente superior a la del conjunto de los números naturales, con el que no se deja equiparar; tal sucedería, por ejemplo, con el conjunto de números reales (de cuyo estudio se ocupa la parte de la ciencia matemática denominada *análisis*) o con el conjunto de los puntos contenidos en una línea.

tente, sino que además comprende toda fórmula consistente, de forma que la adición de cualquier fórmula que no formase parte de él lo haría inconsistente.

La razón de ser de esta maximalización está en que el conjunto de fórmulas Γ, que se supone dado, puede ser cualquiera dentro del campo, aparentemente incontrolable, de los infinitos conjuntos posibles de fórmulas que sean consistentes. Una manera de controlar ese campo es construir, o dar el plan de construcción de un conjunto consistente máximo que los incluya a todos. Esta construcción lleva consigo la nada trivial exigencia de practicar un «recorrido completo» de un universo infinito, como es el de todas las fórmulas posibles de un lenguaje, consistentes y no consistentes, para ir seleccionando una tras otra, sin dejar una sola, todas aquellas que sean consistentes con el conjunto inicial dado Γ. Una vez construido semejante conjunto, la prueba de su satisfacibilidad podrá ser considerada sin más como una prueba de la satisfacibilidad del conjunto incialmente dado Γ, cualquiera que éste sea (ya que, por construcción, forma parte de aquél).

Por otra parte, y con vistas a su eventual satisfacibilidad por un modelo enumerablemente infinito, el conjunto consistente máximo Γ deberá poseer además una segunda condición: la garantía de que toda fórmula existencial en él contenida sea virtualmente instanciable por un individuo «nuevo» del modelo, de acuerdo con los mecanismos lógicos propios del cuantificador existencial. Dicha condición exige que el sistema disponga de un número de parámetros individuales que no sólo sea suficiente, sino que además esté suficientemente controlado, para que en todo momento pueda ser instanciada cualquier fórmula existencial por el parámetro que corresponda. Daremos a esta segunda condición el nombre de *saturación existencial.*

La principal dificultad con que se enfrentó HENKIN en el curso de su prueba (1949) fue la de dar con un plan de construcción del conjunto máximo que simultanease ambas condiciones. La extensión al máximo de un conjunto consistente no sólo puede no implicar la saturación existencial, sino incluso ser anulada por ésta. Recíprocamente un conjunto consistente existencialmente saturado puede perder esta condición cuando se lo convierte, por extensión, en máximamente consistente. En la prueba de HENKIN esta tensión dialéctica entre ambas condiciones da lugar a una escalada infinita de extensiones y saturaciones del conjunto consistente Γ inicial-

mente dado, hasta llegar finalmente a un superconjunto Γ_w, que es a la vez máximamente consistente y existencialmente saturado, a partir de lo cual se inicia la segunda fase de la prueba.

Una simplificación de la prueba de HENKIN que permite obtener el conjunto Γ_w obviando ese enjambre de construcciones, se debe a HASENJÄGER (1953).

2. *Parte semántica: presentación del modelo enumerable.* La segunda parte de la prueba de HENKIN consiste en la exposición de un modelo enumerable y en la demostración de que el conjunto Γ_w, máximamente consistente y existencialmente saturado, es satisfacible por ese modelo. Un aspecto particularmente interesante de la construcción del modelo presentado es que se trata de una «autointerpretación» del sistema lógico, por virtud de la cual el propio lenguaje, con su infinita multitud de símbolos, se convierte en modelo enumerable de sí mismo. La prueba de que ese modelo satisface al conjunto Γ_w se efectúa por inducción semiótica. Con ella queda demostrado el teorema de satisfacción: porque es evidente que si Γ_w es satisfacible, lo será también el conjunto inicial Γ, que es parte propia suya.

B. *El teorema de satisfacción de HENKIN: desarrollo de la prueba*

Primera parte: Maximalización del conjunto dado

La complejidad de esta primera parte aconseja subdividir su exposición en los siguientes puntos:

1.1. Estratificación y enumeración previa de sistemas lingüísticos.
1.2. El plan de maximalización.
1.3. El método de saturación existencial.
1.4. Construcción de un conjunto de fórmulas, Γ_w, que es máximamente consistente y está existencialmente saturado.

1.1. *Estratificación y enumeración previa de sistemas lingüísticos*. Sea L_0 el lenguaje de la lógica elemental de predicados *sin parámetros individuales*. A las fórmulas de la lógica de predicados que no contienen parámetros de individuos se las denomina *puras*.

El lenguaje L_0 es un sistema lingüístico que comprende el infinito número de fórmulas posibles, tanto las consistentes como las no consistentes, de la lógica elemental de predicados sin parámetros individuales.

Sea, de otra parte, una lista infinita de parámetros de individuo que podemos ordenar así:

$$\begin{array}{l} a^1_1\ a^1_2 \ldots\ a^1_i \ldots \\ a^2_1\ a^2_2 \ldots\ a^2_i \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^j_1\ a^j_2 \ldots\ a^j_i \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Cada línea de esta tabla se prolonga al infinito, como indica la serie de índices suscritos. Pero a su vez el número de líneas es también infinito, como se indica en la serie de números sobreescritos a los parámetros. Es claro que el número de parámetros que contiene la tabla, aunque infinito, es enumerable (vale decir: controlable por la serie de los números naturales), puesto que para cualquier parámetro

$$a^j_i\ (i = 1, 2, 3\ldots; j = 1, 2, 3\ldots)$$

el número suscrito y el sobreescrito indican inequívocamente a qué fila y a qué columna pertenece y, por tanto, su lugar exacto en la lista.

Sea ahora L_1 el sistema lingüístico resultante de agregar al sistema inicial L_0 (el lenguaje de la lógica elemental sin parámetros individuales) la primera fila: a^1_1, a^1_2, ..., a^1_i ... de la lista de parámetros. Sea L_2 el sistema resultante de agregar al anterior la segunda fila de la lista de parámetros. Y sea L_j el sistema resultante de agregar al anterior, L_{j-1}, la *j*-ésima línea de la lista de parámetros.

Tendremos así una serie estratificada de sistemas lingüísticos, cada uno de ellos, a partir del primero, basado en el precedente, pero incluyendo además un nuevo e infinito repertorio de parámetros:

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 = \{L_0,\ a^1_1\ a^1_2,\ \ldots,\ a^1_i,\ \ldots\} \\ L_2 = \{L_1,\ a^2_1\ a^2_2,\ \ldots,\ a^2_i,\ \ldots\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_j = \{L_{j-1},\ a^j_1,\ a^j_2,\ \ldots,\ a^j_i,\ \ldots\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Hagamos, finalmente, culminar esta serie en un sistema lingüístico L_w, tal que contenga todos cuantos símbolos aparezcan en cualquier sistema L_i (es decir, un sistema que comprende todos los anteriores):

$$L_w = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_j \cup ...$$

Cada uno de los sistemas lingüísticos considerados contiene un número infinito de fórmulas posibles, tanto consistentes como no consistentes. Y ello sucede con tanto mayor razón en el lenguaje L_w, que los abarca a todos. Pero obsérvese que incluso en el lenguaje L_w este número, aunque sea infinito es *enumerable*. Para cerciorarse de que así es, basta con tomar estas dos medidas: 1.º, clasificar las fórmulas en grupos, ordenados de menor a mayor, según el número de símbolos que intervengan en ellas (p. ej., $\bigvee xPx$ correspondería al grupo de fórmulas que constan de cuatro símbolos, $\bigvee xPx \vee \neg \bigvee xPx$, al grupo de las que constan de diez, etc.); y 2.º, establecer, dentro de cada grupo, un orden alfabético en las fórmulas que lo integren. Supóngase, pues, una ordenación de este tipo que nos permita hablar, por tanto, de la primera, la segunda, la tercera, etc., fórmulas del sistema lingüístico L_w.

1.2. *El plan de maximalización*. Tomemos ahora el conjunto consistente de fórmulas inicialmente dado Γ, que suponemos construido sobre la base del lenguaje de predicados sin parámetros individuales L_0, y procederemos a ampliarlo, dentro del ámbito de dicho lenguaje L_0, hasta convertirlo, por adición de nuevas fórmulas, en un conjunto consistente máximo.

Previamente marcaremos el conjunto dado Γ con un subíndice indicativo de que va a ser el primer de una serie de conjuntos consistentes cada vez más amplios:

$$\Gamma = \Gamma_{00}$$

Recorramos ahora, desde el principio, el infinito repertorio de fórmulas posibles, consistentes y no consistentes, del lenguaje L_0, por el orden que suponemos convencionalmente introducido ya en ellas (véase el anterior párrafo 1.1). Sea A la primera fórmula que puede ser agregada a Γ_{00} sin destruir su consistencia. Formemos un nuevo conjunto que conste del anterior y de esta nueva fórmula:

$$\Gamma_{01} = \{\Gamma_{00}, A\}$$

Y a medida que, en nuestro recorrido, vayan apareciendo nuevas fórmulas consistentes, las iremos añadiendo ordenadamente a lo ya acumulado, formando así, uno tras otro, nuevos conjuntos Γ_{0i+1} será, correlativamente, el resultante de añadir la nueva fórmula A_{i+1} al conjunto inmediatamente anterior Γ_{01}:

$$\Gamma_{0i+1} = \{\Gamma_{0i}, A_{i+1}\}$$

Finalmente, sea Γ_0 el conjunto formado por todas las fórmulas que aparezcan en cualquier Γ_{0i}. De este conjunto puede afirmarse:

1.º Γ_0 forma parte, como cualquiera de los conjuntos anteriores, del conjunto más amplio de fórmulas del lenguaje L_0 (que abarca tanto las consistentes como las inconsistentes); es decir: $\Gamma_0 \subset L_0$.

2.º Γ_0 contiene al conjunto consistencial inicial Γ; es decir, $\Gamma_{00} \subset \Gamma_0$.

3.º Γ_0 es consistente. Porque si no lo fuera, sería posible deducir formalmente de él una contradicción; pero toda deducción formal tiene, por definición, un número finito de premisas, y las que diesen lugar a esa contradicción tendrían que pertenecer a alguno de los subconjuntos Γ_{0i} de los que consta este conjunto final, lo cual es imposible, puesto que, por construcción, todos ellos son consistentes.

4.º Γ_0 *es máximamente consistente*, puesto que, según nuestro plan, el recorrido del infinito campo de fórmulas, consistentes o no, del lenguaje L_0 es tan minucioso, que no puede quedar una sola fórmula consistente de ese campo que no pertenezca a alguno de los subconjuntos Γ_{0i}.

1.3. *El método de saturación existencial*. Seleccionemos ahora, según el orden que suponemos convencionalmente establecido entre las fórmulas, la primera de tipo existencial:

$$A = \vee x P x$$

perteneciente al conjunto máximamente consistente Γ_0, y construyamos la oportuna instanciación de ella por introducción del primer parámetro del sistema lingüístico L_1 en todas las ocurrencias de la variable x en Px. Ese parámetro es a_1^1 (el primero de la primera línea de la tabla indicada en la página 347), y la fórmula resultante será:

$$A' = Pa_1^1.$$

Es fácil ver que el conjunto formado por la adición de A´ a Γ_0:

$$\{\Gamma_0, A'\}$$

es consistente. Porque si no lo fuera, daría lugar a contradicción, de la cual no sería responsable el conjunto Γ_0, del que nos consta que es consistente, sino la fórmula A´. Ello nos permitiría establecer que $\vdash \neg A$ (por T11, cuya demostración puede leerse en el Capítulo XIV, § 4, y MP). Pero $\vdash \neg A'$ es $\vdash \neg Pa^1_1$, de donde se sigue por **Gen** (siendo «∏ P» el predicado del caso) $\neg \wedge x \neg Px$, y utilizando la definición del particularizador (véase sección segunda del Capítulo XIV), $\vdash \neg \vee x \neg \neg Px$, lo que daría, finalmente, $\vdash \neg \vee x Px$ (con ayuda de las leyes de doble negación e intercambio, Capítulo XIV, § 4). Ahora bien, $\vdash \neg \vee x Px$ es $\vdash \neg A$, lo cual va contra nuestra hipótesis de que A forma parte de Γ_0 y Γ_0 es consistente. Así pues, el conjunto Γ_0, A´ es consistente [10].

De un modo similar podemos proceder, ordenamente según vayan apareciendo, con todas las fórmulas existenciales pertenecientes a Γ_0: a la *j*-ésima de ellas A_j la instanciaremos correlativamente, al objeto de formar la correspondiente A'_j, con el parámetro a^1_j de L_1 (el que ocupa el *j*-ésimo lugar en la primera fila de la tabla de parámetros).

Tras haber construido todas las A´(es decir, las instanciaciones, por inserción del oportuno parámetro, de las fórmulas existenciales de Γ_0) y haberlas agregado, una tras otra, a Γ_0:

$$\Gamma^*_0 = \{\Gamma_0, A', ..., A_j, ...\}$$

el conjunto Γ_0 se ha transformado ahora en el nuevo conjunto Γ^*_0, que cumple la condición de ser existencialmente saturado, pues cualquiera de sus fórmulas existenciales admite la instanciación correspondiente.

---

[10] En un sistema cuyo símbolo cuantificacional primitivo sea el generalizador, $\vee x Px$ es, sencillamente, una manera abreviada de escribir: $\neg \wedge x \neg Px$.

1.4. *Construcción de un conjunto* Γ_w *máximamente consistente y existencialmente saturado*. La saturación existencial del conjunto Γ_0 ha implicado un recurso al sistema lingüístico L_1, ya que L_0 carecía de parámetros. Ahora bien, en el contexto del sistema lingüístico L_1, de que forma parte el conjunto recién formado Γ^*_1, no subsiste ya, por el momento, la condición de consistencia máxima, porque no están, ni mucho menos, agotadas todas las posibilidades de fórmulas que sean adicionales a Γ^*_1 respetando su consistencia.

Este inconveniente se resuelve maximalizando ahora al conjunto Γ^*_1 para obtener, en el sistema lingüístico L_1, un nuevo conjunto máximamente consistente Γ_1, a la manera como se obtuvo el anterior Γ_0, dentro del lenguaje L_0, a partir del conjunto inicial Γ.

Pero a su vez el nuevo conjunto Γ_1, formado con base en el sistema lingüístico L_1, precisará cumplir el requisito de saturación existencial. Ello se logra por el procedimiento ya indicado en el punto 1.3: seleccionando convenientemente todas las fórmulas existenciales Γ_1 y recurriendo ahora a la serie de parámetros del sistema lingüístico L_2 (segunda fila de la tabla) para construir las debidas instanciaciones, que se adicionarán a Γ_1. El resultado será un nuevo conjunto Γ^*_2, que es parte propia del sistema lingüístico L_2 y que está existencialmente saturado, pero no es máximamente consistente.

Reiterando una y otra vez, indefinidamente, la doble rutina de saturación existencial y maximalización, resultará una serie infinita de conjuntos, que son, de modo alternativo, existencialmente saturados y máximamente consistentes. El conjunto máximamente consistente Γ_n se constituirá sobre el lenguaje L_n, tras haber usado la serie de parámetros correspondiente a la *n*-ésima fila de la tabla.

El orden de formación de los sucesivos conjuntos sería, esquemáticamente, éste (especificando el sistema lingüístico al que pertenece cada uno):

$$\begin{array}{l} \Gamma \subset L_0 \\ \Gamma_0 \subset L_0 \\ \Gamma^*_1 \subset L_1 \\ \Gamma_1 \subset L_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma^*_n \subset L_n \\ \Gamma_n \subset L_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Estos conjuntos se encuentran relacionados entre sí por la relación de inclusión:

$$\Gamma \subseteq \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1^* \subseteq \Gamma_1 \subseteq \ldots \subseteq \Gamma_n^* \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots$$

Finalmente, definiremos el conjunto Γ_w con base en el sistema lingüístico L_w y caracterizado por contener todas las fórmulas que contenga cualquiera de esos conjuntos Γ_n. El conjunto Γ_w es la unión de todos los anteriores:

$$\Gamma_w = \Gamma \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1^* \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n^* \cup \Gamma_n \cup \ldots$$

Es fácil advertir que este conjunto Γ_w:
1.º Es parte de L_w: $\Gamma_w \subset L_w$.
2.º Es máximamente consistente.
3.º Está existencialmente saturado.

Segunda parte: Presentación del modelo enumerable

La segunda parte de la prueba del teorema de HENKIN consiste en la exposición de una interpretación del conjunto máximamente consistente Γ_w sobre un universo enumerable (2.1) y en la demostración de que esa interpretación satisface a Γ_w (2.2).

2.1. *Interpretación de Γ_w sobre un universo enumerable.* Elíjase como universo el conjunto de parámetros de Γ_w y establézcase el siguiente sistema de valores:

1) A cada parámetro (considerado como símbolo de un sistema a interpretar) ese mismo parámetro (considerado como entidad individual).

2) A cada letra enunciativa, el valor V o F según que esa letra sea o no deducible en el sistema;

3) A cada letra predicativa n-ádica P, la clase de n-tuplos de parámetros individuales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tales que, para cualquiera de esos n-tuplos $\Gamma_w \vdash Pa_1\, a_2 \ldots a_n$.

Es evidente, por una parte, que el universo elegido es infinito y enumerable (basta contemplar la tabla de parámetros expuesta en la página 347). También es evidente que esta interpretación asigna un

valor único a cada fórmula de Γ_w: las cláusulas a)-3) asignan un valor único a cada fórmula atómica, y el valor de las moleculares es función del de las atómicas.

2.2. *Demostración de que la interpretación propuesta satisface a* Γ_w. Queda por demostrar que, para toda fórmula A de Γ_w, el valor que le corresponde relativamente a esa interpretación es V o F, según que sea o no sea deducible en Γ_w.

La prueba se efectúa por inducción semiótica sobre el grado lógico de A. Descartando el caso de las fórmulas atómicas, en las que ello es evidente por la misma atribución, las fórmulas moleculares han de reducirse, en un sistema como el nuestro en que los símbolos primitivos son $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, a negaciones, implicaciones o generalizaciones. Para una fórmula de cualquiera de esos tres tipos de grado *n*, se supone, por hipótesis de inducción, la validez de la tesis relativamente a las fórmulas de grado lógico *n*-1.

Caso 1. A es una negación: $\neg$ B. Si A es verdadera, entonces B es falsa y, por hipótesis de inducción, indeducible en Γ_w, cuya consistencia máxima permite asegurar que es deducible la negación de B y, por tanto, A. Pero si A es falsa, B es verdadera y (por hip. ind.) deducible; de la consistencia máxima de Γ se sigue que la negación de B, es decir, A, es indeducible.

Caso 2. A es una implicación: B $\rightarrow$ C. Supóngase que A es verdadera. Entonces, o bien el consecuente de la implicación, C es verdadero o el antecedente B es falso. Si sucede lo primero, tendremos, por hipótesis inductiva, que $\Gamma_w \vdash$ C, y a su vez la deducibilidad de C servirá para descargar por **MP** el antecedente en $\vdash$ C $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C) (reinscripción del esquema de axioma A1 del sistema de lógica elemental expuesto en el Capítulo XIV, § 2), dando lugar así a $\Gamma_w \vdash$ B $\rightarrow$ C, es decir, a $\Gamma_w \vdash$ A. Si sucede lo segundo (falsedad de B), tendremos, por hipótesis inductiva, $\Gamma_w \vdash$ B; pero la deducibilidad de $\neg$ B servirá para descargar por **MP** el antecedente en $\vdash \neg$ B $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C) (reinscripción del teorema T3 de nuestro sistema de lógica elemental, cuya demostración figura en el Capítulo XIV, sección 4), dando por resultado $\Gamma_w \vdash$ B $\rightarrow$ C, es decir, $\Gamma_w \vdash$ A.

Supóngase ahora la falsedad de A. Entonces B ha de ser verdadero y C falso. Por hipótesis de inducción se tendrá que $\Gamma_w \vdash$ B y $\Gamma_w \vdash \neg$ C. Pero la deducibilidad de B y de $\neg$ C permite descargar, por doble aplicación de **MP**, los dos primeros antecedentes en $\vdash$ (B $\rightarrow$ ($\neg$ C $\rightarrow$ $\neg$ (B $\rightarrow$ C)) (reinscripción del teorema T9 de nuestro sistema de lógica elemental, cuya demostración figura en el Capí-

tulo XIV, sección 4), con lo cual se obtiene $\Gamma_w \vdash \neg B \rightarrow C$, es decir, $\Gamma_w \vdash \neg A$.

Caso 3. A es una generalización: $\wedge xPx$. Si A es deducible de Γ_w, entonces también lo es Pa (basta recurrir al axioma 5 de nuestro sistema y al **Mp**), que será verdadera por hipótesis inductiva; pero la aplicación de **Gen** a Pa, en este caso correcta, transmite el valor verdadero a la fórmula A.

Si A es indeducible, entonces, por la consistencia máxima de Γ_w será deducible su negación $\neg$ A, es decir $\Gamma_w \vdash \neg \wedge xPx$ y, por tanto, $\Gamma_w \vdash \vee x \neg Px$(T17, véase su demostración en cap. anterior, § 4, y **MP**), lo que permite asegurar que Pa no es deducible y que, por hipótesis de inducción, es en consecuencia falsa. De donde se sigue que $\wedge xPx$, es decir, A, es falsa.

Con ello queda demostrado que todas las fórmulas del conjunto Γ_w son verdaderas y, por tanto, simultáneamente satisfacibles en el modelo enumerable expuesto. Y como el conjunto inicialmente dado Γ forma, por construcción, parte de Γ_w, queda probado el teorema de satisfacción.

C. *El teorema de completud de Gödel*

Una vez establecido el teorema de HENKIN, que pone en conexión la consistencia con la satisfacibilidad («si A es consistente, entonces A es satisfacible»), se sigue sin dificultad, a modo de corolario, el

TEOREMA DE COMPLETUD DE GÖDEL (TG 1930). *Para toda fórmula A de la lógica cuantificacional de primer orden, si A es lógicamente verdadera, entonces A es deducible.* O más brevemente:

$$\text{si} \models A, \text{ entonces} \vdash A.$$

La prueba de TG se reduce a consignar las siguientes premisas:

1) A es lógicamente verdadera: $\models$ A.

2) Si A es lógicamente verdadera, entonces $\neg$ A es insatisfacible.

3) Si $\neg$ A es insatisfacible, entonces $\neg$ A es inconsistente.

4) Si $\neg$ A es inconsistente, entonces da lugar a contradicción: $\neg A \vdash B$ y $\neg A \vdash \neg B$.

5) Si $\neg A \vdash B$ y $\neg A \vdash \neg B$, entonces $\vdash$ A.

Estas premisas se justifican así: 1) es la hipótesis de TG; 2) se sigue de la definición del concepto de fórmula lógicamente verdadera: su negación ha de ser satisfacible; 3) es la contraposición del teorema de HENKIN (con lo cual se patentiza la capital importancia del mismo en orden a la demostración de TG); 4) es mero análisis de la definición de inconsistencia, y finalmente 5) se funda en TD, que permite pasar de $\neg A \vdash B$ y $\neg A \vdash \neg B$. a $\vdash \neg A \rightarrow B$ y $\vdash \neg A \rightarrow \neg B$, respectivamente, y en MP, que permite, con ayuda de estas dos últimas fórmulas, eliminar los antecedentes en la *ley de reducción al absurdo*, que reescribimos aquí: $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg \neg A)$ (T12 en nuestro sistema L: véase su demostración en el Capítulo XIV, § 4); de $\vdash \neg \neg A$ se pasaría a $\vdash A$ por nueva aplicación de MP a la ley de doble negación $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$ (T4 en nuestro sistema, véase demostración en el mismo lugar).

Aceptadas estas premisas, basta el sencillo protocolo de aplicarles reiteradamente la regla MP, empezando por 2) y 1), siguiendo con 3) y el consecuente de 2), y así sucesivamente, hasta liberar el consecuente de 5):

$$\vdash A,$$

que es justamente la tesis del teorema de GÖDEL, el cual queda, por consiguiente, demostrado.

§ 3. *El teorema de Löwenheim-Skolem*

Del teorema de satisfacción de HENKIN se deriva como corolario el importante

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM. *Si un conjunto de fórmulas cualquiera Γ es simultáneamente satisfacible en cualquier dominio no vacío, entonces es simultáneamente satisfacible en un dominio enumerable* [11].

---

[11] Este teorema fue descubierto por LOWENHEIM (1915), y ulteriormente generalizado por SKOLEM.

La formulación original de LOWENHEIM era ésta: si una fórmula es válida en un dominio enumerablemente infinito, entonces es válida en todo dominio no vacío. Por contraposición de este enunciado y sustitución de válido por satisfacible, se obtiene la forma habitual del teorema.

SKOLEM generalizó este teorema extendiendo el caso de una sola fórmula a cualquier conjunto de fórmulas, como reza el enunciado de arriba.

Demostración. El teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM se sigue sin dificultad de estas dos aserciones:

1) Si un conjunto de fórmulas Γ es simultáneamente satisfacible, entonces es consistente. Aceptar esta aserción (que es la conversa del teorema de HENKIN) no ofrece problema alguno; las reglas de inferencia transmiten hereditariamente la propiedad de ser verdadero para cualquier interpretación determinada, y excluyen, por tanto, el riesgo de contradicción (inconsistencia).

2) Si un conjunto de fórmulas Γ es consistente, entonces es simultáneamente satisfacible en un dominio enumerable (teorema de HENKIN).

Supuesta la hipótesis del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM (Γ es simultáneamente satisfacible) y las aserciones 1) y 2), se sigue, por doble aplicación de MP, la tesis del teorema (Γ es simultáneamente satisfacible en un dominio enumerable).

§ 4. *El teorema de compacidad*

Otra consecuencia asimismo importante del teorema de satisfacción es el

TEOREMA DE COMPACIDAD. *Si todo subconjunto finito de un conjunto infinito de enunciados es satisfacible, entonces ese conjunto es, todo él, satisfacible.*

Demostración. Basta considerar cada uno de estos dos extremos: o bien ese conjunto es consistente, o bien es inconsistente. Si es consistente, entonces será posible derivar de él una pareja de fórmulas contradictorias, A y ¬ A. Pero en toda deducción formal y, por tanto, también en este caso de deducción contradictoria, interviene, por definición, un conjunto de fórmulas que es siempre *finito*, el cual será, por consiguiente, en este caso un subconjunto del conjunto dado. Por la hipótesis del teorema que se trata de demostrar, ese subconjunto debe ser satisfacible; no cabe, pues, admitir que el conjunto en cuestión sea inconsistente.

§ 5. *El problema de la decisión en lógica de cuantificadores. Forma normal prenexa*

El problema de la decisión en un sistema deductivo consiste (como ya se indicó en la sección primera del Capítulo XV) en hallar

un procedimiento mecánico o algoritmo que permita determinar en un número finito de pasos, para una fórmula cualquiera A, si esa fórmula es o no deducible en el sistema (es decir, si A es o no teorema formal del sistema).

Por lo que respecta a la lógica de predicados, y a diferencia de lo que sucede en lógica de enunciados (véase sección cuarta del Capítulo XV), el problema de la decisión no tiene solución general satisfactoria. De conformidad con un teorema descubierto por CHURCH en 1936, *no existe un procedimiento efectivo que permita resolver el problema de la decisión en la lógica cuantificacional de primer orden*. De la significación de este resultado nos ocuparemos más adelante (§ 6).

Según el teorema de CHURCH, la lógica cuantificacional de primer orden, considerada como un todo, es indecidible. Sin embargo, y sin menoscabo de este aserto, hay determinados estratos y zonas de esta parte de la lógica que, considerados aisladamente, son decidibles. En la presente sección estudiaremos, en sendas subsecciones, cada una de esas zonas de solución positiva *parcial* del problema de la decisión en lógica de cuantores.

Pero antes de ello conviene hacer un par de observaciones generales sobre los métodos de ataque del problema de la decisión y los criterios de distribución de las referidas zonas.

El teorema de completud autoriza, como sabemos, el paso de la validez (verdad) lógica [12] a la deducibilidad. Este resultado suministra, en principio, un hilo conductor para abordar el problema de la decisión. Pues si se dispone de un algoritmo que determine mecánicamente la validez de una fórmula, se tiene resuelto sin más, por virtud del mencionado paso, el problema de la deducibilidad de esa fórmula.

De hecho, en esta estrategia se basa la solución del problema de la decisión mediante tablas de verdad (e igualmente, en cierto modo, la solución basada en la técnica de normalización conjuntiva) en lógica de enunciados. También es útil en lógica de predicados buscar un método que determine la validez, mejor que la deducibilidad de una fórmula. Ese método no puede ser, ciertamente, el método de las tablas de verdad, que no es ya aplicable a esta parte de la

[12] Los términos «lógicamente verdadero», «lógicamente válido», «universalmente válido» y «válido» sin más pueden considerarse sinónimos, a pesar de que entre «verdad» y «validez» queda establecer alguna diferencia de matiz. Una fórmula es lógicamente verdadera ((universalmente) válida) cuando es verdadera para cualquier interpretación en cualquier universo no vacío (véase Cap. VIII, § 6).

lógica, a excepción de una zona limitadísima de ella (fórmulas cuantificacionales referidas a un universo finito). Sin embargo, hay métodos que permiten una cierta reducibilidad del problema de establecer la validez de algunas fórmulas cuantificacionales al problema de establecer la validez (tautologicidad) de fórmulas enunciativas con ellas emparentadas. A este fin, es necesario primero desplazar los cuantificadores de las fórmulas y subfórmulas problema hacia la cabecera de ellas, de suerte que ningún cuantificador quede dentro de ningún paréntesis (de ninguna matriz). De las fórmulas resultantes de estas transformaciones se dice que están en *forma normal prenexa*. El apartado *c*) de esta sección se ocupa de la conversión de fórmulas cuantificacionales en su forma normal prenexa correspondiente.

De otra parte, es un hecho ya conocido por el lector que el concepto semántico de «satisfacibilidad» está íntimamente conectado con el de «verdad» o «validez» (véase Capítulo VIII, § 6). A veces resulta más fácil la obtención de un algoritmo que decida la satisfacibilidad o la insatisfacibilidad de una fórmula, que la de un algoritmo directamente decisorio de la validez. Por ejemplo, el método de las tablas semánticas proporciona un método decisorio de la validez y la deducibilidad de las fórmulas del cálculo de conectores y del cálculo monádico de cuantificadores decidiendo la insatisfacibilidad (ausencia de contraejemplo) de su negación (véanse Capítulos VI y IX, B). Una solución al problema de la decisión de la deducibilidad de una fórmula puede, pues, ser obtenida o bien por la vía de la decisión de su validez, o bien por la vía de la decisión de su satisfacibilidad. A la revisión de los conceptos de validez y satisfacibilidad y a la precisión de las relaciones que guardan entre sí se dedica el apartado *b*) de esta sección.

Por lo que se refiere a los criterios de distribución de las zonas de solución parcial del problema de la decisión en el cálculo cuantificacional, son esencialmente relevantes estos dos factores:

1) *La cardinalidad del universo de referencia*. Por cardinalidad [13] de un universo (dominio) entendemos el número de individuos que lo integran. La cardinalidad de un universo puede ser, ante todo, finita o infinita [14]. Cuando el universo al que se refieren las

---

[13] El concepto de *cardinal*, tal y como fue acuñado por CANTOR, hace referencia al «número» de los individuos de un conjunto, sea finito o infinito.

[14] Hablar del infinito no es del todo utópico, al menos en matemática. Los enunciados de la aritmética (teoría de los números naturales) versan sobre un universo que

fórmulas cuantificacionales es finito, entonces la lógica de predicados se reduce a una extensión trivial de la lógica de enunciados y el problema de la decisión en semejante supuesto se reduce a un problema de construcción de tablas de verdad. Pero cuando el universo al que se refieran las fórmulas cuantificacionales posea una cardinalidad infinita, y tal es el caso, por ejemplo, cuando se pretenden formalizar los enunciados de la aritmética o del análisis, entonces conviene tomar en consideración el segundo factor relevante, que ahora se especifica [15].

2) *El carácter exclusivamente monádico de los predicados que intervengan en las fórmulas.* Dentro de la lógica cuantificacional de primer orden cabe distinguir, según sabemos, dos estratos: lógica monádica (en la que no intervienen predicados relativos, o poliádicos) y lógica poliádica (en la que intervienen predicados de esta índole). La lógica cuantificacional monádica, considerada como sistema aislado de la lógica cuantificacional poliádica, es decidible, cualquiera que sea su universo de referencia. De los métodos de decisión en este caso se ocupa el apartado *d*) de la presente sección.

3) Por lo que respecta a la lógica cuantificacional poliádica, no hay solución general al problema de la decisión. Sin embargo, hay clases de fórmulas, aun siendo poliádicas, que se caracterizan por presentar un *prefijo especial* (una agrupación especial de cuantificadores en situación de prefijo) cuando se las reduce a forma normal prenexa. Estas clases de fórmulas son decidibles. De ellas se hará mención en el apartado *e*) de la presente sección.

De acuerdo con ello, trataremos a continuación los siguientes puntos relativos a la solución parcial del problema de una decisión en lógica cuantificacional:

---

es infinito (*enumerable*). Los enunciados del análisis (teoría de números reales) versan sobre un universo todavía más vasto (infinito *no enumerable*). (Véase la sección 2 de este capítulo, nota 9.)

[15] En otros lugares de este libro (Cap. X, § 2, 4; Cap. VIII, § 6) se ha hecho mención del supuesto, básico en los sistemas usuales de lógica matemática, de exclusión del universo vacío. Reuniendo ahora nuevos datos, podemos decir que las «posibilidades» abstractas de universo o dominio de referencia de las fórmulas serían éstas:

universo { vacío
　　　　　{ no vacío { finito
　　　　　　　　　　　{ infinito { enumerable
　　　　　　　　　　　　　　　　　{ no enumerable

a) Decidibilidad de las fórmulas cuantificacionales en un universo finito.

b) L-validez, *n*-validez y satisfacibilidad.

c) Forma normal prenexa.

d) Decidibilidad de la lógica cuantificacional monádica.

e) Clases de fórmulas decidibles en lógica cuantificacional poliádica. Reducciones del problema de la decisión.

En la sección 6 seguirá, finalmente, una breve discusión de la cuestión de la indecidibilidad general de la lógica cuantificacional de primer orden (teorema de CHURCH).

a) *Decidibilidad de las fórmulas cuantificacionales en un universo finito.* De una fórmula cualquiera de lógica de juntores decimos que es verdadera o falsa según los valores de verdad que se atribuya a sus componentes atómicos. P. ej., la fórmula: p → q será verdadera si se atribuye a p el valor F o a q el valor V, y falsa si se atribuye a p el valor V y a q el valor F.

Por lo que se refiere a las fórmulas cuantificacionales, podemos decir, en cierto modo, lo mismo, pero con la diferencia de que en ellas los componentes atómicos no están manifiestos, ni podrán estarlo hasta tanto no se especifique además *la cardinalidad del dominio o universo de discurso* elegido.

Ello se apreciará mejor examinando unos cuantos casos de fórmulas cuantificacionales muy sencillas. Sean las fórmulas:

$$\bigvee xPx,\ \bigwedge xPx,\ \bigvee xPx \rightarrow \bigwedge xPx.$$

Obsérvese, por de pronto, que la fórmula ⋁xPx no es atómica, sino molecular (puesto que no es una predicación pura y simple, sino una cuantificación); y su matriz, Px, no es una fórmula, sino una función enunciativa (seudofórmula), y no puede ser, propiamente hablando, un componente atómico de ⋁xPx. Los componentes atómicos de la fórmula ⋁xPx son predicaciones del tipo de Pa, y serán tantos en número cuantos individuos contenga el universo de discurso que sirva de rango a la variable x en la función enunciativa Px. Si el universo elegido constase de dos individuos: a, b, los componentes atómicos serían también dos: Pa, Pb, y si constase de *n* individuos, los componentes atómicos, correlativamente, *n*: $Pa_1, Pa_2, ..., Pa_n$.

Lo mismo cabe decir, sin duda, de la fórmula ⋀xPx, pero añadiendo que mientras los componentes atómicos se conectan entre sí en ⋁xPx por vía de disyunción, en ⋀xPx lo hacen por vía de conjunción. El lector deberá recordar en este momento lo indicado en el Capítulo VIII, § 2, sobre reducibilidad de cuantificadores a conectores: el particularizador es un disyuntor reiterado (macrodisyuntor) y el generalizador un conjuntor reiterado (macroconjuntor). De acuerdo con ello, y para el supuesto de un universo de discurso de dos individuos, las tres fórmulas citadas pueden ser entendidas como abreviaturas, respectivamente, de una disyunción y una conjunción de dos componentes atómicos y la ulterior implicación de ambas [16]:

---

[16] Es claro que para ese universo las tres fórmulas consideradas son satisfacibles (pues cobran valor de verdad positivo para al menos una interpretación, o línea de la

$\bigvee xPx \rightleftharpoons Pa \vee Pb$
$\bigwedge xPx \rightleftharpoons Pa \wedge Pb$
$\bigvee xpx \rightarrow \bigwedge xPx \rightleftharpoons Pa \vee Pb \rightarrow Pa \wedge Pb$

Construir una tabla de verdad para esas tres fórmulas y para el referido supuesto resulta ser un mero problema de lógica de conectores.

Pa	Pb	⋁xPx	⋀xpx	⋁xPx → ⋀xPx
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

Es fácil percatarse de que mientras el número de individuos del universo elegido sea finito, será posible en principio confeccionar una tabla de verdad para cualquier fórmula cuantificacional, aunque de hecho, cuando ese número sea crecido, no podamos materialmente llevarla a cabo. En todo caso deberá tenerse presente que para la confección de la tabla no basta indicar que el dominio de referencia es finito, sino que será preciso además especificar el número exacto de individuos que lo integran. Dicho número sirve para computar el número de atribuciones veritativas que constituyen la base de la tabla, el cual es, como en el caso de la lógica de juntores, 2^n, siendo n el número en cuestión.

Así pues, *las fórmulas cuantificacionales son decidibles por el método de las tablas de verdad cuando el universo al que se refieren es finito*, ya que en tal caso la lógica cuantificacional representa trivialmente una extensión de la lógica de enunciados.

Pero naturalmente, cuando el dominio de referencia sea infinito, los componentes atómicos de las cuantificaciones serán asimismo en número no finito, lo cual hace en principio improcedente el método de las tablas de verdad, ya que no es efectivamente posible construir una tabla de dimensiones infinitas.

b) *L-validez, n-validez y satisfacibilidad.* Queda, pues, establecido que el problema de la validez de una fórmula cuantificacional depende del universo, o más exactamente, de la cardinalidad del universo elegido para interpretarlas.

Esto hace aconsejable precisar nuestra terminología del siguiente modo. Siendo U un universo y n el número de individuos que lo integran, diremos que la cardinalidad de U, a la que simbolizaremos $\overline{\overline{U}}$, es n:

$$\overline{\overline{U}} = n.$$

---

tabla), pero ninguna de ellas es válida (pues ninguna cobra valor de verdad positivo en *toda* interpretación, o línea de la tabla).

Para un dominio que constase de un solo individuo, las dos primeras seguirían siendo satisfacibles sin más, pero la tercera sería no sólo satisfacible, sino también válida, como se advierte en esta otra tabla:

Pa	⋁xPx	⋀xPx	⋁xPx → ⋀xPx
V	V	V	V
F	F	F	F

Cuando una fórmula es válida o verdadera para (todas las interpretaciones de) un universo de cardinalidad n, diremos que es *n-válida* (*n-verdadera*). Y cuando sea válida (verdadera) para (todas las interpretaciones de) todo universo, cualquiera que sea su cardinalidad, diremos que es *L-válida* o *L-verdadera* (esto es, válida o verdadera por razones lógicas).

Si la validez lógica de una fórmula A se puede representar escribiendo: $\models$ A, la n-validez de una fórmula A, relativa a un universo determinado U, de cardinalidad n, se representará escribiendo:

$$\models_{U_n} A$$

Por otra parte, existen *conexiones entre los conceptos semánticos de satisfacibilidad y de validez* que tienen especial relevancia para el problema de la decisión.

Consignamos aquí algunas de ellas comenzando por dos aserciones cuya significación es obvia:

I. Una fórmula de lógica cuantificacional, A, es válida en un universo no vacío si y sólo si su negación, $\neg$ A, no es satisfacible en ese dominio.

II. Una fórmula de lógica cuantificacional, A, es válida si y sólo si su negación, $\neg$ A, no es satisfacible.

Continuamos con otras dos aserciones, que requieren justificación:

III. Si una fórmula de lógica cuantificacional, A, es satisfacible en un universo dado, U, no vacío, entonces es satisfacible en cualquier universo de igual o mayor cardinalidad, U′.

Demostración. Si U′ tiene o bien igual o bien mayor número de individuos que U, siempre será posible, desde el punto de vista de la semántica extensional, establecer una correlación biunívoca entre los individuos de U y los de U′, o entre los individuos de U y los individuos de un subconjunto de U′ de la misma cardinalidad que U, y definir en cualquier caso sobre tal base un sistema de predicados en U′ que sean equivalentes a los de U y satisfagan a A.

IV. Si A es una fórmula cuantificacional válida en un Universo U no vacío, entonces A es válida en cualquier universo no vacío U′ de igual o menor cardinalidad.

Demostración. Si A es válida en U (hipótesis de la aserción), $\neg$ A no es satisfacible en U (aserción I), de donde se sigue que tampoco será satisfacible en U′ (por contraposición de la aserción III) y, por tanto, que A es válida en U′ (aserción I).

c) *Forma normal prenexa.* Cuando todos los cuantificadores presentes en una fórmula se encuentran situados al principio de la misma, se dice que esa fórmula está en *forma normal prenexa*, que abreviamos FNP. Una fórmula está, pues, en FNP cuando su matriz se encuentra exenta de cuantificadores.

Para toda fórmula cuantificacional hay, como se verá en esta sección, una equivalente en FNP. El hecho de que todos los cuantificadores se encuentren agrupados formando un bloque inicial facilita extraordinariamente las operaciones de cálculo y permite tomar decisiones de interés en el análisis de las fórmulas. Para reducir una fórmula cuantificacional cualquiera a su equivalente en FNP existe un procedimiento que se ajusta a los siguientes pasos:

1) En primer lugar se eliminan en ella todos los implicadores y coimplicadores, de acuerdo con las leyes de definición de implicador y eliminación de coimplicador ya estudiadas en lógica de conectores.

2) En segundo lugar se interiorizan los negadores que se encuentren inmediatamente adosados a un cuantificador, de acuerdo con las leyes de negación de cuantificadores estudiadas en el Capítulo IX.

$$\text{R1. } \neg \bigwedge x Px \leftrightarrow \bigvee x \neg Px$$
$$\text{R2. } \neg \bigvee x Px \leftrightarrow \bigwedge x \neg Px$$

3) En tercer lugar se exteriorizan los cuantificadores existentes respecto de toda conjunción o disyunción, de acuerdo con las cuatro reglas de distribución condicionada de cuantificador en conjunción y disyunción asimismo consideradas en el Capítulo IX, C:

$$\text{R3. } A \wedge \bigwedge x Px \leftrightarrow \bigwedge x(A \wedge Px)$$
$$\text{R4. } A \wedge \bigvee x Px \leftrightarrow \bigvee x(A \wedge Px)$$
$$\text{R5. } A \vee \bigwedge x Px \leftrightarrow \bigwedge x(A \vee Px)$$
$$\text{R6. } A \vee \bigvee x Px \leftrightarrow \bigvee x(A \vee Px)$$

Recuérdese que la condición crítica de estas cuatro leyes exige que x no esté libre en A, al objeto de que una tal ocurrencia de x no sea capturada por el cuantificador exteriorizado. Pero cuando esto último sucediere, es decir, cuando la variable ligada por el cuantificador a exteriorizar también presente ocurrencias libres en el seno de la fórmula cuya normalización se está tramitando, pero fuera del alcance que primitivamente tuviera el referido cuantificador, se la mantendrá fuera del nuevo alcance de éste, efectuando previamente el oportuno cambio de símbolo individual, según las dos reglas de mutación alfabética de variable ligada expuestas en el Capítulo IX, C:

$$\text{R7. } \bigwedge x Px \leftrightarrow \bigwedge y Py$$
$$\text{R8. } \bigvee x Px \leftrightarrow \bigvee y Py$$

(Se procurará, por tanto, que la variable a introducir sea la primera disponible, en ese contexto, de la lista de variables individuales.)

Auxiliarmente se utilizarán en el curso de la reducción, cuando proceda, las reglas de doble negación y de conmutación de conjunción y de disyunción, pertenecientes a la lógica de conectores.

Ejemplo 1. Sea la fórmula: $\bigvee x Qxa \to \bigvee x Px$. Su reducción a FNP se obtiene eliminando en ella el implicador:

$$\neg \bigvee x Qxa \vee \bigvee x Px,$$

interiorizando después el negador:

$$\bigwedge x \neg Qxa \vee \bigvee x Px,$$

y exteriorizando finalmente los cuantificadores, teniendo buen cuidado, una vez salga fuera cualquiera de ellos

$$\bigvee x(\bigwedge x \neg Qxa \vee Px),$$

de efectuar previamente en el otro la oportuna mutación crítica de variable:

$$\vee x(\wedge y \neg Qya \vee Px),$$

con lo que resulta la FNP

$$\vee x \wedge y(\neg Qya \vee Px).$$

También cabe omitir el paso primero del anterior proceso, por el que se simplifica previamente el lenguaje de la fórmula a normalizar. En tal caso habría que ampliar el repertorio de reglas de transformación, añadiendo las cuatro leyes condicionadas de distribución de cuantificadores en implicación, que permiten exteriorizar un cuantificador respecto de un consiguiente o de un antecedente de una implicación:

R 9. $(A \rightarrow \wedge xPx) \leftrightarrow \wedge x(A \rightarrow Px)$
R10. $(A \rightarrow \vee xPx) \leftrightarrow \vee x(A \rightarrow Px)$
R11. $(\wedge xPx \rightarrow A) \leftrightarrow \vee x(Px \rightarrow A)$
R12. $(\vee xPx \rightarrow A) \leftrightarrow \wedge x(Px \rightarrow A)$

Asimismo puede utilizarse, complementariamente, cualquiera de las tres reglas de distribución de cuantificador en conjunción, disyunción e implicación, que están exentas de condiciones críticas y fueron consideradas, al igual que las anteriores, en el Capítulo IX:

R13. $\wedge x(Px \wedge Qx) \leftrightarrow \wedge xPx \wedge \wedge xQx$
R14. $\vee x(Px \vee Qx) \leftrightarrow \vee xPx \vee \vee xQx$
R15. $\vee x(Px \rightarrow Qx) \leftrightarrow (\wedge xPx \rightarrow \vee xQx)$

Ejemplo 2. Sea la fórmula del ejemplo anterior: $\vee xQxa \rightarrow \vee xPx$. Su reducción a FNP, sin recurrir a la eliminación de implicador, discurriría así:

$\vee xQxa \rightarrow \vee xPx$
$\vee x(\vee xQxa \rightarrow Px)$ (R10)
$\vee x(\vee yQya \rightarrow Px)$ (R8)
$\vee x\wedge y(Qya \rightarrow Px)$ (R12).

El procedimiento de obtención de la FNP de una fórmula alcanza su resultado en un número finito de pasos, puesto que la fórmula inicial es, por definición, finita, y el número de reglas del procedimiento es también finito.

Por otra parte es claro que la fórmula resultante es equivalente a la inicial, puesto que las reglas aplicadas tienen todas el carácter de equivalencia y la equivalencia es transitiva. Con ello puede darse por probado el metateorema de que a toda fórmula cuantificacional le corresponde una FNP que es equivalente a ella [17].

Ejemplo 3. Sea la fórmula: $\wedge xPx \wedge \wedge y(Qy \rightarrow \neg Ray) \rightarrow \wedge yPy \vee \vee xPx$. Obténgase su FNP.

---

[17] El estudio de la FNP tiene su origen en PEIRCE. El primer tratamiento sistemático de la cuestión se encuentra en el primer volumen de los *Principia mathematica*.

1	$\wedge xPx \wedge \wedge y(Qy \rightarrow \neg Ray) \rightarrow \wedge yPy \vee \vee xPx$	
2	$\wedge y(\wedge xPx \wedge (Qy \rightarrow \neg Ray)) \rightarrow \vee x(\wedge yPy \vee Px)$	(R3) (R6)
3.	$\wedge y\wedge x(Px \wedge (Qy \rightarrow \neg Ray)) \rightarrow \vee x\wedge y(Py \vee Px)$	(R3) (R5)
4	$\vee x(\wedge y\wedge x(Px \wedge (Qy \rightarrow \neg Ray)) \rightarrow \wedge y(Py \vee Px))$	(R10)
5	$\vee x\wedge y(\wedge y\wedge x(Px \wedge (Qy \rightarrow \neg Ray)) \rightarrow Py \vee Px)$	(R9)
6	$\vee x\wedge y(\wedge y_1\wedge x_1(Px_1 \wedge (Qy_1 \rightarrow \neg Ray_1)) \rightarrow Py \wedge Px)$	(R7) (R7)
7	$\vee x\wedge y\vee y_1(\wedge y_1(Px_1 \wedge (Qy_1 \rightarrow \neg Ray_1)) \rightarrow Py \vee Px)$	(R11)
8	$\vee x\wedge y\vee y_1\vee x_1(Px_1 \wedge (Qy_1 \rightarrow \neg Ray_1) \rightarrow Py \vee Px)$	(R11)

Ejemplo 4. Sea la fórmula: $\wedge xPx \rightarrow \vee zQz \wedge \wedge x\vee yQxy$. Obténgase su FNP.

1	$\wedge xPx \rightarrow \vee zQz \wedge \wedge x\vee yQxy$	
2	$\neg \wedge xPx \vee (\vee zQz \wedge \wedge x\vee yQxy)$	(eliminación de implicador)
3	$\vee x \neg Px \vee \wedge x(\vee zQz \wedge \vee yqxy)$	(R1, R3)
4	$\vee x \neg Px \vee \wedge x\vee y(\vee zQz \wedge Qxy)$	(R4)
5.	$\vee x \neg Px \vee \wedge x\vee y\vee z(Qz \wedge Qxy)$	(R4)
6	$\wedge x(\vee x \neg Px \vee \vee y\vee z(Qz \wedge Qxy))$	(R5)
7	$\wedge x\vee y(\vee x \neg Px \vee \vee z(Qz \wedge Qxy))$	(R6)
8	$\wedge x\vee y\vee z(\vee x \neg Px \vee (Qz \wedge Qxy))$	(R6)
9	$\wedge x\vee y\vee z(\vee w \neg Pw \vee (Qz \wedge Qxy))$	(R8)
10	$\wedge x\vee y\vee z\vee w(\neg Pw \vee (Qz \wedge Qxy))$	(R6)

d) *Decidibilidad de la lógica cuantificacional monádica.* En orden a la decidibilidad de la lógica cuantificacional monádica disponemos de un resultado de gran importancia cuyo descubrimiento se debe a LÖWENHEIM (1915) que permite reducir el problema al contexto de universos finitos:

Si una fórmula de lógica cuantificacional monádica A, que conste de n letras predicativas distintas, es válida en un universo de al menos 2^n *individuos, entonces es válida en todo universo no vacío, cualquiera que sea su cardinalidad. Brevemente dicho: si A consta de n-predicados y es n-válida, entonces es L-válida.*

Demostración. Sean $P_1, ..., P_n$ las letras predicativas que intervienen en A y sean $p_1, ..., p_m$ las letras enunciativas que eventualmente aparezcan también en ella.

Considérese *un universo cualquiera*, U, y una interpretación I en ese universo que asigne a las letras enunciativas los valores de verdad (positivos o negativos) $v_1, ..., v_m$, y a las letras predicativas las propiedades $P^*_1, ..., P^*_n$.

Clasifiquemos ahora los individuos de U del siguiente modo: todos aquellos individuos a los que convengan y disconvengan exactamente las mismas propiedades pertenecerán a una misma clave α.

Es decir: a_1 y a_2 pertenecerán a la misma clase si las predicaciones $P_1a_1, ..., P_na_1$ tienen por este orden el mismo valor de verdad que las predicaciones $P_1a_2, ..., P_na_2$. Es claro que a lo sumo el número de clases de individuos así formadas será 2^n: $\alpha_1, ..., \alpha_k$ $(1 \leq k \leq 2^n)$.

Definamos ahora predicados correspondientes a dichas clases: $Q_1, ..., Q_n$, estipulando que la atribución de cualquiera de estos predicados Q_i a una cualquiera de las citadas clases α_j:

$$Q_1\alpha_j$$

tendrá el mismo valor de verdad que la atribución del predicado correlativo, P_1, al individuo a:

$$P_1a$$

siempre que este individuo pertenezca a la clase α_j.

Tómese ahora el universo finito U′ cuyos elementos (individuos) sean las clases citadas: $\alpha_1, ..., \alpha_k$, y constrúyase la interpretación I′ consistente en asignar los valores $v_1, ..., v_m$ a las letras enunciativas de A y las propiedades $Q_1, ..., Q_n$ a las letras predicativas de A.

Es evidente que A es verdadera para la interpretación I′ en el universo U′, ya que la hipótesis del teorema a demostrar indica que A es *n*-válida, y sabemos ya (véase anterior apartado, aserción IV) que toda fórmula que sea válida en un universo no vacío lo es también en todo universo de igual o menor cardinalidad. Ahora bien, por el modo de definir los predicados Q_1 es asimismo manifiesto que A tiene el mismo valor de verdad para el universo finito U′ y la interpretación I′ que para el universo U y la interpretación I. Ese valor es concretamente V (valor de verdad positivo). Pero recuérdese que U es cualquier universo, y su cardinalidad puede ser, por tanto, cualquiera. Queda, pues, demostrado que si A es *n*-válida, entonces es L-válida.

Del resultado de LÖWENHEIM se sigue que la validez de una fórmula de lógica elemental puede ser decidida con sólo asegurarse de que es válida en un dominio que tenga un número finito de individuos: concretamente 2^n, si *n* es el número de predicados que intervienen en la fórmula. Ello permite, en principio, reducir el problema a la confección de una tabla de verdad (véase el apartado *a*) de esta sección), aunque, de hecho, proceder sin más con estos datos a la confección de la correspondiente tabla sería tarea impracticable, dado el número de líneas requerido para ello.

En la práctica se utilizan métodos más ágiles, directos e indirectos, para comprobar la validez de una fórmula cuantificacional monádica. Entre los indirectos se cuenta el método de las tablas semánticas (búsqueda sistemática de contraejemplos con vistas a decidir la eventual satisfacibilidad o insatisfacibilidad de la negación de la fórmula problema). Otros métodos, cuyo uso se remonta a BEHMANN (1922), se apoyan en técnicas de normalización. Mencionaremos aquí dos algoritmos de parecida factura debidos a QUINE [18] y a VON WRIGHT [19]

El algoritmo de satisfacibilidad de QUINE consiste en someter la fórmula problema a las siguientes transformaciones:

1) Reemplazar todos los cuantificadores universales por existenciales, de acuerdo con las leyes de interdefinición de cuantores, y situar todo cuantor, por leyes de obtención de forma normal prenexa, fuera del alcance de cualquier otro cuantor.
2) Reducir a forma normal disyuntiva todas las matrices de la fórmula resultante.
3) Distribuir, siempre que sea posible, los cuantores existenciales en el interior de las matrices a las que sirvan de prefijo.
4) Reducir el resultado, si no lo está ya, a forma normal disyuntiva.

La fórmula obtenida por estas transformaciones es una FND equivalente a la original. Si dicha FND es (1) la cuantificación existencial de una conjunción, o (2) la negación de una fórmula de ese tipo, o (3) una conjunción de fórmulas del tipo (1), se tratará siempre de una fórmula satisfacible. Si, en cambio, esa FND es (4) una conjunción de fórmulas del tipo (2) será satisfacible si y sólo si el resultado de suprimir los cuantores que en ella figuran es satisfacible. Si (5) es una conjunción de fórmulas de los tipos (1) y (2) será satisfacible si y sólo si ninguna de las cuantificaciones positivas que contenga implica la disyunción de las cuantificaciones negativas. Y finalmente, si la FND resultante es la disyunción de fórmulas de los tipos anteriores, será satisfacible si y sólo si al menos uno de sus componentes lo es.

Este algoritmo puede utilizarse para comprobar la validez de una fórmula aplicándolo a la negación de ella.

El algoritmo de VON WRIGHT es un test de validez. Consiste en: 1) reemplazar los generalizadores por particularizadores, de acuerdo con las leyes de interdefinición de cuantores; 2) obtener la FND *perfecta* * de las matrices de cada cuantificación; 3) construir una «tabla de existencia» * de las cuantificaciones componentes, y 4) finalmente, obtener mediante una sencilla tabla de verdad información directa acerca de la validez de la fórmula problema.

---

[18] QUINE, *Métodos de la lógica*, pp. 154 ss.

[19] G. H. VON WRIGHT, «On the idea of logical truth», I, 1948 (reimpreso en el libro del mismo autor *Logical studies*, Routledge, Londres, 1957, pp. 22-43).

* Sobre el sentido de este término deberá consultarse el referido artículo de VON WRIGHT.

e) *Clases de fórmulas decidibles en lógica cuantificacional poliádica. Reducciones del problema de la decisión.* Aunque la lógica cuantificacional (considerada como un todo, tanto monádica como poliádica) sea indecidible (véase teorema de CHURCH, § 6), existen, sin embargo, procedimientos que permiten decidir algunas clases de fórmulas (sean monádicas o poliádicas), generalmente utilizando la forma normal prenexa.

Los principales grupos de fórmulas decidibles fueron ya descubiertos por BERNAYS y SCHONFINKEL en 1928. Una clase está integrada por fórmulas en las cuales una vez reducidas a FNP, los generalizadores preceden a los particularizadores, de forma que ninguno de estos figure antes de alguno de aquéllos:

$$\wedge x_1 \wedge x_2 ... \wedge x_n \vee y_1 \vee y_2 ... \vee y_m P x_1 ... x_n y_1 ... y_m$$

Otra clase de fórmulas decidibles son aquéllas cuyo prefijo cuantificacional se compone de cuantores de un solo tipo. Es decir, o bien el prefijo consta exclusivamente de generalizadores:

$$\wedge x_1 ... \wedge x_n P x_1 ... x_n$$

o bien consta sólo de particularizadores:

$$\vee x_1 ... \vee x_n P x_1 ... P x_n.$$

Por otra parte, existen también soluciones parciales en el sentido de reducir el problema de la decidibilidad de unas fórmulas al de la decidibilidad de otras de estructura más simple, lo cual, si bien no es, propiamente hablando, una solución definitiva, es al menos un paso hacia ella.

Una relación más detallada de clases de fórmulas cuantificacionales decidibles y de casos de reducción, con las pruebas correspondientes, la encontrará el lector en el tratado de CHURCH o en las monografías sobre el problema de la decisión de ACKERMANN, 1954, o SURANYI, 1959, que se citan en la bibliografía.

§ 6. *Indecidibilidad general de la lógica cuantificacional poliádica (teorema de Church)*

Alonzo CHURCH [20] demostró en 1936 la imposibilidad de hallar un procedimiento decisorio adecuado para la lógica elemental (incluyendo, por supuesto, la lógica cuantificacional poliádica).

---

[20] Alonzo CHURCH, «An unsolvable problem of elementary number theory», *American Journal of Mathematics*, vol. 58 (1936), pp. 345-363. Esta contribución fue presentada a la American Mathematical Society en 1935. Una reimpresión de ella figura en DAVIS, *The undecidable*, Nueva York, 1965, pp. 110-115.

El resultado obtenido por CHURCH es, como el famoso resultado de GÖDEL [21] de 1931, uno de los «teoremas de limitación», que pusieron en crisis en los años treinta la ilimitada fe que hasta entonces se había venido depositando en los métodos axiomáticos y dieron lugar, al mismo tiempo, a una de las corrientes más fecundas de la investigación lógico-matemática de los últimos cuarenta años: la teoría de la computabilidad.

Desde principios de siglo David HILBERT había defendido el punto de vista (históricamente sostenido por Ramón LLULL en la Edad Media y LEIBNIZ en la Edad Moderna) de que todo problema lógico y matemático podría ser resuelto por procedimientos mecánicos. De ahí la importancia que adquirió hacia los años veinte el llamado *Entscheidungsproblem* (problema de la decisión). De hecho, el problema de la decisión para el cálculo elemental de cuantores era, en el sentir de HILBERT, el problema fundamental de la lógica matemática.

Sorprendentemente, los hallazgos más interesantes en la investigación del problema de la decisión fueron hallazgos negativos que establecieron la existencia de problemas insolubles y las fatales limitaciones de sistemas axiomáticos de interés fundamental. En 1931 Kurt GÖDEL demostró que todo sistema axiomático que pretenda formalizar la aritmética elemental es incompleto. Y en 1936 CHURCH [22] probó primero la indecidibilidad de la aritmética, y luego, con ayuda de este resultado, la indecidibilidad de la lógica elemental (teorema de CHURCH).

El teorema de CHURCH supone conocimientos que exceden el ámbito de este libro y de los cuales daremos cuuenta sólo muy sumariamente. En su contribución *An unsolvable problem of number theory* (1936) CHURCH propuso definir el concepto intuitivo y más bien vago de «función efectivamente calculable» mediante el concepto matemáticamente preciso y riguroso de «recursividad». Tal es el fin que persigue la llamada.

TESIS DE CHURCH (1936): *Toda función efectivamente calculable es una función recursiva.*

---

[21] KURT GÖDEL, «Über formal unentscheidbare Satze der Principia mathematica und verwandter Systeme, I», *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38 (1931), pp. 173-198. Trad. cast. de M. Garrido, A. G. Suárez y L. M. Valdés en *Cuadernos Teorema*.

[22] Alonzo CHURCH, «A note on the Entscheidungsproblem», *Journal of Symbolic Logic*, vol. I (1936), pp. 40-41, más una corrección en las pp. 101-102. Esta contribución está reimpresa en DAVIS, *o.c.* en la anterior nota 20.

Esta tesis no es susceptible de demostración rigurosa, como puede serlo un teorema, sino que ha de tener más bien, forzosamente, el carácter de una conjetura. La razón de ello es que la cópula «es» tien aquí el sentido de una equivalencia por la que se equipara el concepto de «función calculable», que es vago e intuitivo, con el concepto de «función recursiva», que es preciso y riguroso. Pero nunca será posible demostrar satisfactoriamente una equivalencia entre dos conceptos cuando uno de ellos es intrínsecamente vago e intuitivo.

Con ayuda de su tesis probó CHURCH que *no es posible hallar una solución general para el problema de la decisión en teoría elemental de números*, es decir, que *el sistema formal de la aritmética es indecidible*.

En su contribución «A note on the Entscheidungsproblem» (1936) CHURCH mostró que el sistema formal de teoría elemental de números podía ser reducido al sistema formal de lógica elemental mediante una serie de transformaciones tendentes a eliminar los símbolos aritméticos; y a continuación hizo ver, como consecuencia de tal reducción, que si hubiera un procedimiento decisorio para *toda* la lógica elemental, lo habría para la teoría elemental de números. Pero teniendo en cuenta el anterior resultado de CHURCH acerca de la indecidibilidad de la teoría elemental de números, queda establecida la indecidibilidad de la lógica elemental.

El curso de la argumentación puede detallarse mejor con ayuda de letras metalingüísticas. Convengamos en designar por:

- L El sistema formal de la lógica elemental.
- N El sistema formal de la teoría elemental de números.
- L′ La reducción del sistema N al sistema L por virtud de las transformaciones eliminatorias de símbolos aritméticos.
- T La conjunción de los axiomas de N, pero después de haber eliminado en ellos, por virtud de tales transformaciones, los símbolos aritméticos.
- A Una fórmula cualquiera de N.
- A′ El resultado de eliminar, por esas transformaciones, los símbolos aritméticos en A.

Obviamente, puede afirmarse que A es deducible de N si y sólo si la implicación T → A′ es deducible en L:

$$\vdash_N A \text{ sii } \vdash_L T \rightarrow A'.$$

Pero esto es tanto como decir que N es decidible si y sólo si L es decidible. De este modo, la decidibilidad en aritmética y la decidibilidad en lógica resultan ser equivalentes. Una solución del caso general del problema de la decisión para N equivale a una solución del caso general del problema de la decisión para L. Ahora bien, el caso general del problema de la decisión para N es insoluble (primer resultado de CHURCH, con base en la tesis de recursividad). Por tanto [23]:

TEOREMA DE CHURCH [24]: *El caso general del problema de la decisión para L es insoluble*. Esto es: *la lógica elemental de la cuantificación es indecidible.*

El teorema de CHURCH posee relevancia filosófica. Desde el punto de vista de la filosofía, el interés principal de este aserto está en que por él se establece, o se pretende establecer, la *no mecanicidad* de la lógica formal. Pues si bien es cierto que existen algoritmos que permiten resolver de modo mecánico grandes grupos de problemas de la lógica elemental, según el teorema de CHURCH no existe ni puede existir un algoritmo que los resuelva mecánicamente todos. *La operación deductiva de la razón no es totalmente mecanizable.*

---

[23] El argumento podría esquematizarse así:

(1) N es decidible sii L es decidible.
(2) N no es decidible.
∴ (3) L no es decidible.

(1) se establece como resultado de las transformaciones que permiten la reducción de N a L; (2) es el primer resultado de CHURCH, y (3) es el teorema. La solución es un caso muy sencillo de lógica de conectores:

$$A \leftrightarrow B$$
$$\neg A$$
$$\therefore \neg B$$

[24] El enunciado del teorema de CHURCH en «A note on Entscheidungsproblem» es, literalmente, éste:

«The general case of the *Entscheidungsproblem* of the *engere Funktionenkalkül* is unsolvable» [«El caso general del *Entscheidungsproblem* (problema de la decisión) para el *engere Funktionenkakül* (cálculo funcional restringido) es insoluble»].

(Los términos alemanes son los acuñados por la escuela de HILBERT. CHURCH partió en su trabajo del sistema de lógica cuantificacional elemental de HILBERT-ACKERMANN. La expresión «cálculo funcional» es sinónima de «cálculo cuantificacional» y el término «restringido» (*engere*) es, en la terminología de estos autores, sinónimo de «elemental».)

Un fenómeno en cierto modo coincidente con el teorema de CHURCH es la existencia de tablas semánticas infinitas (véase final del Capítulo XI, § 5). En su contribución de 1956, BETH consideró la idea de construir una máquina lógica que tramitase la confección de tablas semánticas. Dado que el proceso de confección de una tabla semántica desemboca fatalmente en uno de estos tres resultados: 1) clausura total de la tabla; 2) hallazgo de contraejemplos en un número finito de pasos, o 3) derivación al infinito; una máquina que pudiera realizar ese proceso debería estar capacitada para afrontar con éxito las tres posibilidades, lo cual podría materializarse, por ejemplo, en el sistema de comunicación de la máquina con el mundo exterior mediante una luz roja que avisase del primer caso, una luz amarilla que avisase del segundo y una verde del tercero. A juicio de BETH [25], es factible una máquina que cumpla las dos primeras funciones, pero no la tercera, porque nunca es posible decidir mecánicamente si una búsqueda de contraejemplo que se abre al infinito alcanzará o no alcanzará éxito, aunque, de hecho, la mente humana puede muchas veces resolver por modo no mecánico esa cuestión. En palabras de BETH: «La máquina lógica provista de una luz roja y una luz amarilla realiza una función muy análoga a la facultad de razonar de la mente humana, y, de hecho, es capaz de realizar un gran número de sus operaciones con un grado superior de eficiencia y precisión. Sin embargo, la mente humana está equipada con operaciones adicionales que van más allá del poder de una tal máquina...; podemos, pues, suponer que nuestra mente está equipada con una especie de luz verde. Pero no podemos suponer que opere con una luz verde de una manera sistemática y perfectamente controlable; porque ello implicaría que la mente humana incorporase, por así decirlo, una máquina lógica con una luz roja, una amarilla y una verde, y sabemos que una máquina semejante no puede existir.»

[25] En torno a esta cuestión, con diferente perspectiva, el lector debe consultar el artículo de TURING, «¿Puede pensar una máquina?», cuya referencia completa figura en bibliografía.

AUTOMATIZACIÓN DE LA LÓGICA (LAS BASES LÓGICAS DE LA INFORMÁTICA)

CAPÍTULO XVII

MÁQUINAS DE TURING

§ 1. *¿Qué es calcular?*

Más de una vez se han preguntado los filósofos si el conocimiento, o al menos su parte lógica, se reduce a cálculo. Y más de una vez, a lo largo de la historia, se ha respondido afirmativamente a esta pregunta. Thomas HOBBES, figura clásica del pensamiento político moderno, le dio el título de *Computatio sive Logica* (=«Cálculo, es decir, lógica») a la sección en que se ocupa de ésta en su obra *De Corpore* (1655). Mucho antes de él, ya en la Edad Media, Raimundo LULIO ideó en su *Ars magna* (1273) un método de cálculo general de verdades sobre Dios y el universo. Y once años después de Hobbes el joven LEIBNIZ desarrolló en su *Dissertatio de arte combinatoria* (1666) la idea de un cálculo universal del pensamiento.

Esos tres proyectos partían del supuesto de que el conocimiento matemático y lógico es puro cálculo. Una versión de este enfoque en nuestro siglo la representa la tarea que el matemático y lógico contemporáneo David HILBERT denominó *Entscheidungsproblem* (problema de la decisión), entendiendo por tal el problema de hallar un método de cálculo que permita decidir mecánicamente para toda fórmula lógica si es o no válida. Eso podría implicar que todo problema matemático fuese mecánicamente resoluble.

El planteamiento de esta tarea aconseja, por de pronto, precisar el uso de la palabra «*cálculo*» y su sinónimo «*computación*». Solemos llamar así las operaciones que efectuamos de acuerdo con reglas matemáticas, como las de sumar, multiplicar o elevar a potencias. Los límites de nuestra memoria y de nuestra imaginación nos impiden realizar esas operaciones, si revisten algún grado de complejidad, sin una ayuda especial de objetos del mundo exterior. Necesitamos hacer marcas en alguna zona del espacio (papel, pizarras, etc.) y utilizar en nuestras cuentas elementos materiales de cálculo, preferiblemente símbolos numéricos o alfabéticos, pero también ob-

jetos de mayor densidad física, como los dedos de la mano o un puñado de piedras [1].

Parte esencial del cálculo es, evidentemente, el uso de reglas. En un sentido más preciso, sin embargo, convenimos en decir que algo es *efectivamente calculable o computable* si existe un *algoritmo* [2] o *procedimiento de decisión* o *procedimiento efectivo* que lo resuelva, entendiendo por tal un método o procedimiento que se efectúa conforme a reglas y que permite resolver un conjunto de problemas de una manera mecánica y en un número finito de pasos. El llamado «algoritmo de Euclides» para hallar el máximo común divisor de dos números es un ejemplo de este tipo de procedimiento, como también el método de tablas de verdad, que permite decidir efectivamente si una fórmula del cálculo proposicional es tautológica [3].

Pero estas precisiones son sólo verbales e intuitivas. Los lógicos que investigaban hacia los años treinta en el marco del problema hilbertiano de la decisión abordaron la tarea más ambiciosa de caracterizar o codificar exactamente, en los términos de una teoría matemática precisa, el concepto de lo *efectivamente computable* o *calculable*. El resultado ha sido una de las principales aportaciones de la lógica matemática de nuestro siglo, la creación de un área de conocimiento enteramente nueva, la *teoría general de la computabilidad*, a la que corresponde en la actual investigación de fundamentos de la matemática un papel comparable por su importancia al de la teoría axiomática de conjuntos.

§ 2. *Las máquinas de Turing*

La caracterización matemática del concepto de lo computable tuvo lugar en esos años a lo largo de líneas independientes de inves-

---

[1] «Cálculo» es, etimológicamente, diminutivo de «piedra»; los antiguos romanos llamaban *calculi* a las piedrecillas de que se ayudaban para contar. Los hombres modernos hace tiempo que hemos olvidado esa costumbre, aunque seguimos llamando «cálculos» a las piedrecitas que se forman en la vesícula y los riñones de muchas personas.

[2] En la Europa Occidental del siglo XVI se llamaba *algoritmo* o *algorismo*, en recuerdo del famoso matemático árabe AL-KHWARIZMI (siglo IX), al sistema árabe de numeración.

[3] Extrapolando la idea al campo del conocimiento empírico podríamos decir también, por ejemplo, que el método de averiguar si un conductor tiene o no alcohol en sangre y cuánto tiene, es un algoritmo.

tigación que han conducido, sin embargo, a resultados convergentes. En una de ellas se sitúa la teoría elaborada por el lógico y matemático inglés Alan M. TURING (1912-1954).

El núcleo de la teoría de Turing es la descripción de un tipo de máquinas abstractas de estructura conceptualmente muy simple, pero capaces de realizar complicadas funciones de computación. Como apoyo al entendimiento de esa descripción es útil analizar el proceso de cálculo realizado por una persona.

Turing publicó su teoría en el artículo «Sobre números computables, con una aplicación al problema de la decisión» (1936-1937) [4], que es ya un texto clásico en la historia de la lógica contemporánea. En él puede leerse:

> El cálculo se efectúa normalmente escribiendo símbolos en un papel. Podemos suponer que este papel se divide en cuadrados, como el cuaderno de aritmética de un párvulo. En aritmética elemental se aprovecha a veces el carácter bidimensional del papel. Pero se puede prescindir [...] de ese uso, [...] que no es esencial para la computación. Doy así por supuesto que el cálculo se lleva a cabo en papel unidimensional, o sea, en una cinta dividida en cuadrados. Supondré también que el número de símbolos a imprimir es finito [...]. El efecto de esta restricción no es muy serio, pues siempre será posible usar en lugar de símbolos aislados secuencias de ellos [...].
>
> El comportamiento de la persona que calcula está en todo momento determinado por los símbolos que está observando y por su «estado mental» en ese momento. Podemos suponer que el número de símbolos o cuadrados que puede observar en un momento tiene un límite. Si desea observar más, habrá de hacerlo en observaciones sucesivas. Supondremos también que el número de estados mentales a tener en cuenta es finito [...]. Tampoco esta restricción afecta seriamente a la computación, porque el uso de estados mentales más complicados se puede suplir escribiendo más símbolos en la cinta [5].

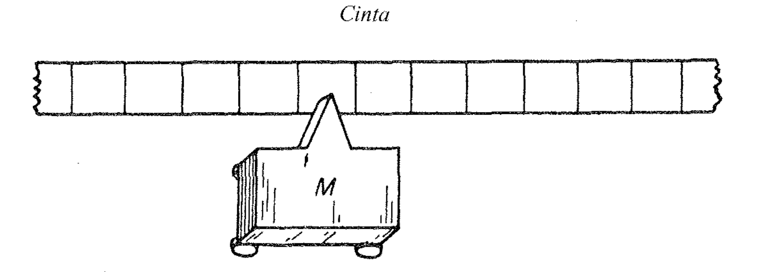
Estilizando y atomizando al máximo estos aspectos del comportamiento del calculador humano puede vislumbrarse el diseño abstracto que traza Turing de una máquina que calcula. Convengamos en que

---

[4] Alan M. TURING, «On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem», publicado en *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, vol. 42 (1936-1937), pp. 230-265, con correcciones bajo el mismo título en vol. 43, pp. 544-546. Este artículo está incluido en el repertorio compilado por Martin DAVIS, *The Undecidable*, Raven Press, Nueva York, 1965, pp 115-153. Cito por la paginación de este repertorio.

[5] *O.c.*, pp. 135-136.

1. el espacio de cálculo de la máquina es una cinta dividida en cuadrados y ninguno de ellos puede alojar más de un símbolo;
2. la máquina dispone de un alfabeto de símbolos (basta, por ejemplo, el binario, integrado por los dígitos 0 y 1);
3. la capacidad perceptora y motriz de la máquina se materializa en



una cabeza móvil de lectura y escritura situada sobre la cinta;
4. la máquina admite un número finito de disposiciones o «estados» que son la contrapartida mecánica de los estados mentales (p.ej., imaginación o memoria) del calculador humano;

y convengamos además en que en cada momento de la computación:

5. la capacidad de observación de la máquina se reduce a un solo cuadrado de la cinta, al que se llamará el «cuadrado escrutado»;
6. la capacidad de escritura de la máquina se reduce a imprimir o borrar un símbolo en el cuadrado escrutado;
7. la capacidad de movimiento de la máquina se reduce a desplazarse un cuadrado a la derecha o a la izquierda del escrutado;
8. el dinamismo de la máquina es concebido como una serie discreta de *movimientos* o pasos que eventualmente termina en una parada o detención.

Añadamos, finalmente, un par de consideraciones. Una es la analogía que guarda la conducta de la máquina con el comportamiento del calculador humano, que, en el proceso de cálculo, depende en cada momento de los símbolos que observa y de su estado mental (su conocimiento y memoria de las reglas de cálculo y de la marcha anterior del proceso) en ese preciso momento. Y eso es, advierte Turing, lo que sucede con la máquina:

> el posible comportamiento de la máquina en cualquier momento está determinado por su estado y el símbolo escrutado [6].

---

[6] *O.c.*, p. 117.

Turing llama *configuración* al conjunto de estos dos factores.

La segunda consideración es que el calculador humano hace sus operaciones de aritmética elemental teniendo sólo oblicuamente en cuenta que la serie de los números naturales no termina nunca y jamás podría ser enteramente recorrida ni por el más rápido y potente de los ordenadores. Es fácil, por ejemplo, aducir un número que sea finito y sin embargo lo suficientemente grande como para que toda la materia del universo y todo el tiempo de la historia no basten para escribirlo. Los puntos suspensivos con que interrumpimos la enumeración de la serie: 0, 1, 2, 3 ... de los números naturales aluden a una prolongación ideal e indefinida de nuestro recuento. En el caso de la máquina de Turing nos consta que su alfabeto es finito, como también el número de sus estados, pero añadimos la *idealización* de que la cinta es indefinidamente ampliable por sus extremos.

Pero lo esencial de una máquina de Turing son las reglas que gobiernan su comportamiento, por virtud de las cuales puede pasar de una configuración a otra, cambiando el símbolo o el lugar del cuadrado escrutado y eventualmente también el estado actual de la máquina. Estas reglas se pueden representar en una *tabla*, y cada una de ellas tiene el carácter de una *instrucción*, que establece la relación de dependencia entre dos configuraciones.

Veamos un ejemplo. Supóngase que se nos encarga la tarea de diseñar una máquina cuya función consista en imprimir sobre una cinta en blanco la serie numérica:

0101010101...

Esta tarea exige redactar el cuadro de instrucciones que compongan la tabla de la máquina. Habrá que ordenarle a ésta que imprima un 0 tan pronto como se deposite su cabeza sobre un cuadrado en blanco y luego escriba, desplazándose a la derecha, un 1, un 0, un 1, etc. Para este fin es suficiente asignarle dos estados; en uno de ellos, y según que esté o no en blanco el cuadrado escrutado, la máquina imprimirá un 0 y no cambiará su estado, o lo cambiará dando además un paso a la derecha; y en el otro hará lo mismo con respecto al símbolo 1. Conviniendo en numerar también con 0 y 1 los respectivos estados, y representando por un asterisco el blanco o ausencia de símbolo en un cuadrado, la tabla podría quedar así:

Estado actual	*Símbolo escrutado*	*Operación*	*Nuevo estado*
0	*	imprimir 0	el mismo
0	0	a la derecha	1
1	*	imprimir 1	el mismo
1	1	a la derecha	0

Antes de que la máquina empezara a funcionar la cinta estaría completamente en blanco:

...******...

Podemos representar la cabeza poniendo bajo el cuadrado actualmente escrutado el número indicativo del estado actual de la máquina:

...******...
0

En un primer movimiento (exigido por esta configuración inicial: estado actual 0, ausencia de símbolo en el cuadrado escrutado) la máquina imprime un cero sin cambiar de estado:

...0*****...
0

En un segundo movimiento (exigido por la configuración actual: estado 0, símbolo escrutado 0) la máquina se desplaza un cuadrado a la derecha y cambia de estado:

...0*****...
1

En el tercero (configuración actual: estado 1, cuadrado escrutado en blanco, *) la máquina imprime un 1 y no cambia de estado:

...01****...
1

Los cuatro movimientos siguientes serían, de acuerdo con la tabla:

...01****...	...010***...	...010***...	...0101**...
0	0	1	1

y así sucesiva e interminablemente.

Imaginemos ahora una máquina de revisar los paréntesis de las fórmulas. Imaginemos que el mensaje inscrito en la cinta fuese una

ristra de paréntesis (y que éstos, además de 0, 1, +, siendo * el blanco, formaran parte del alfabeto de la máquina):

...*(( )( ))*...

Tres estados le bastarían a la máquina para revisar la serie y decidir si es correcta. Uno inicial la induciría a desplazarse a la derecha hasta encontrar un paréntesis derecho, cambiarlo por el signo + y pasar a otro estado que, inversamente, la induciría a desplazarse a la izquierda hasta encontrar un paréntesis izquierdo, cambiarlo por + y retornar al estado anterior. Tras una sucesiva eliminación de parejas complementarias, la máquina se detiene imprimiendo 1 si el juego de paréntesis es correcto y 0 en caso contrario. Esto último se descubre cuando queda algún paréntesis residual que no cuadra. He aquí la tabla de la máquina y su funcionamiento ante la cinta:

Estado	*Símbolo*	*Comportamiento*	*Estado siguiente*
0	(	paso a la derecha	0
0	)	imprimir +	1
0	+	paso a la derecha	0
0	*	paso a la izquierda	2
1	(	imprimir +	0
1	)	paso a la izquierda	1
1	+	paso a la izquierda	1
1	*	imprimir 0	2
2	0	parar	2
2	1	parar	2
2	(	imprimir 0	2
2	+	paso a la izquierda	2
2	*	imprimir 1	2

(( )( ))	*(( )...	*(( )...	*((+...	*((+...
0	0	0	1	1
(++()))	*(++...	*(++())*	*(++())*	*(++(+)*
0	0	0	0	1
(++(+)	*(++++)*	*(++++)*	...+)*	...++*
1	0	0	0	1

...++*	...+++*	*(+++++*	*(+...	*(+...	*++...
1	1	1	1	1	0

++++++	......	...+++*	...++*	*++...	1++++++*.
0		0	2	2	2

En esencia, una máquina de Turing *es* su tabla. A este respecto conviene reparar en que cada una de las instrucciones que integran la tabla puede ser interpretada como una orden condicional, un imperativo hipotético:

Si la máquina se encuentra en el estado e y el símbolo del cuadrado escrutado es s, entonces despliéguese la conducta c y cámbiese a e' el estado anterior.

Abreviando simbólicamente:

$$e \quad s \quad c \quad e'.$$

El antecedente de la instrucción está representado por los dos primeros de esos cuatro símbolos (es decir, por la configuración actual de la máquina: estado actual y símbolo del cuadrado escrutado) y el consiguiente por los dos últimos (operación a realizar y eventual cambio de estado). El conjunto de instrucciones que integran la tabla de una máquina de Turing se parece como una gota de agua a otra a lo que más tarde iba a recibir el nombre de *programa* de un ordenador.

Desde el punto de vista de la realización física podríamos visualizar una máquina de Turing [7] como algo semejante al cabezal de algunas máquinas de escribir, que se desliza a derecha o a izquierda sobre la cinta, en la que puede escribir y borrar caracteres, uno por uno (un equivalente de los estados de la máquina de Turing podrían serlo en este caso los dispositivos por virtud de los cuales la máquina de escribir usa mayúsculas o minúsculas, según la tecla que se apriete).

Pero desde el punto de vista conceptual es más interesante ver en cada máquina de Turing la materialización de una función matemática. Una función es una operación consistente en aplicar un con-

---

[7] Andrew HODGES, autor de una reciente biografía de TURING, ha sugerido esta comparación.

junto de reglas a un número (o a una serie de dos o más números) que llamamos el *argumento* (o los argumentos) de la función; el resultado de aplicar esas reglas al argumento es otro número al que llamamos el *valor* de la función [8]. La tabla de la máquina se identifica con el conjunto de reglas de la función; al argumento o argumentos de ésta corresponden los datos inicialmente escritos en la cinta (la entrada o *input* de la máquina, diríamos hoy en términos informáticos); y el número que resulta escrito en la cinta cuando la máquina se detiene (la salida o *output* que ésta arroja) sería el valor de la función. La función misma queda personificada por la máquina de Turing.

A continuación pasaré a describir una forma más usual de representar las máquinas de Turing y a mostrar su computación de algunas funciones matemáticas [9]. Adoptemos en adelante el sistema de notación más usual de máquinas de Turing, que les adjudica el alfabeto unario. Con este alfabeto, que consta de un solo símbolo: |, es posible representar la serie de los números naturales:

0	|
1	||
2	|||
3	||||

y así sucesivamente. Simbolicemos por

d, i, p

los desplazamientos de la máquina a derecha o izquierda, incluyendo la parada. Un cuadrado en blanco lo representaremos por un asterisco, que es también el resultado de la acción de borrar el único símbolo que puede leer o escribir la máquina: el trazo vertical.

Con este criterio representativo, las cuatro máquinas máximamente elementales cuyas tablas reproduzco

[8] Sobre el concepto de función véase Capítulo XII, § 1.

[9] El lector puede encontrar una excelente exposición de la teoría de las máquinas de Turing en el libro de Hans HERMES, *Introducción a la teoría de la computabilidad*, Tecnos, Madrid, 1984, cuyas líneas generales sigo aquí.

```
   d          i          |          *

0 * d 1    0 * i 1    0 * | 0    0 * p 0
0 | d 1    0 | i 1    0 | p 0    0 | * 0
1 * p 1    1 * p 1
1 I p 1    1 I p 1
```

cumplen, respectivamente, las funciones, indispensables en todo cálculo, de moverse a la derecha, a la izquierda, escribir un símbolo y borrarlo. Tareas algo más complejas, pero también indispensables al cálculo para una máquina constreñida al espacio de la cinta, son la de buscar un blanco a la derecha o a la izquierda, pasando por encima de cualquier serie de trazos, o de recorrer la cinta buscando un trazo o de copiar o desplazar un trazo o serie de ellos. Por ejemplo, la máquina de buscar un blanco a la izquierda, que podemos denominar **·b**, se diferenciaría de la máquina **i** en que no se limita a dar un solo paso. Una de las instrucciones de su programa podría ser ésta:

0 | i 0

que es un caso del ardid denominado «bucle» en la programación de ordenadores: reiterar indefinidamente, mientras no cambien las circunstancias, una sencilla operación.

Las funciones elementales de la aritmética, como son las de sucesión suma y producto son computadas por respectivas máquinas de Turing, no muy complejas, pero compuestas, sin embargo, de otras más elementales.

La *función sucesor* es generadora de la serie de los números naturales; consiste en agregarle una unidad a un número natural, cualquiera que éste sea, y se la simboliza usualmente así: $f(x) = x + 1$ (o también, en aritmética formalizada, como: $f(x) = x'$). Una máquina de Turing que cumpla esta función deberá imprimir un trazo en el cuadrado escrutado y dar luego un paso a la derecha. Si se coloca su cabeza al extremo de cualquier número escrito en la cinta lo incrementará con el nuevo trazo. Simbolizándola por **x'**, se la puede construir combinando dos de las máquinas elementales ya conocidas:

x' = |**d**.

Una máquina de Turing, **S**, que pueda *sumar* dos números escritos en una cinta, por ejemplo

...**|||*||||*...,
S

deberá ser capaz, si se la sitúa inmediatamente a la derecha de los sumandos, de buscar a la izquierda (**·b**) el cuadro en blanco que los separa, cubrirlo con un trazo, buscar luego (**b·**) el primer blanco a la derecha y menguar en dos trazos (ahora superfluos) el resultado. Sus ingredientes son, por tanto:

S = ·b|b·i*i*

Una máquina capaz de *multiplicar* tendría una estructura algo más compleja. El lector puede encontrar su descripción precisa en el citado libro de Hermes. Baste indicar aquí que deberá: 1) copiar uno de los dos factores tantas veces como unidades tenga el otro; 2) sustraer a este otro un trazo por cada copia efectuada; y finalmente 3) reunir en una sola, borrando trazos superfluos, todas las series copiadas.

§ 3. *La máquina universal de Turing*

Dado el modesto repertorio básico de actividades de las máquinas de Turing, sorprende la diversidad y complejidad de las funciones que pueden computar. Pero Turing concibió la idea, aún más sorprendente, de una *máquina universal*, capaz de realizar todo cálculo realizable por cualquier máquina. En su artículo «Sobre números computables» escribe:

> es posible construir una máquina que permita computar toda función computable. Si a esta máquina **U** se le suministra una cinta en la que se haya escrito la descripción normal de alguna máquina de computación **M**, entonces **U** computará la misma función que **M** [10].

La clave del funcionamiento de la máquina universal **U** está en asumir el papel de *intérprete* o *simuladora* de cualquier otra máquina, **M**. Para que **U** se ponga en marcha es preciso hacer que conste en su cinta la tabla de la máquina a simular **M**. Ello se logra escribiendo las instrucciones de la tabla de ésta no una bajo otra, sino una tras otra, es decir, en fila, separadas entre sí por alguna marca y convenientemente traducidas a un código numérico.

---

[10] *O.c.*, pp. 127-128.

Juntamente con la tabla así codificada de la máquina a simular, la cinta de **U** deberá contener especificaciones relativas al dato o los datos sobre los que **M** ha de operar y a la configuración actual de **M** (es decir, su estado actual y el símbolo actualmente escrutado por ella). Esto último es interesante porque, dada una configuración de una máquina, es posible calcular de un modo efectivo la subsiguiente, que está totalmente determinada por la anterior. La tabla de **U** incluye entre sus funciones componentes, con otras auxiliares (copiar, buscar, desplazar, etc.), la que realiza este cálculo.

Imaginemos que la máquina universal tiene ya escrita en su cinta la descripción de la máquina a simular. La tarea de interpretar o simular a **M** la lleva a cabo **U** desencadenando, de acuerdo con las instrucciones de su tabla, un ciclo reiterativo consistente en: 1) localizar en la cinta la descripción de la configuración actual de **M**; 2) buscar en la descripción de la tabla de **M**, asimismo contenida en la cinta, la instrucción que corresponde a dicha configuración, lo cual se efectúa cotejando a ésta con la primera mitad de aquélla; 3) tras identificarla, **U** ejecuta esa instrucción, 4) imprimiendo en la cinta, y en el lugar ocupado por la precedente, la nueva configuración actual. Y así sucesivamente hasta llegar al momento de detenerse, si **M** se detiene, dejando escrito en la cinta el mismo resultado que **M** hubiera dejado en la suya.

Un análisis detallado de la estructura y función de la máquina universal puede encontrarse en el artículo original de Turing [11] o en cualquiera de los libros clásicos sobre el tema, como los de KLEENE, MINSKY o HERMES citados en la bibliografía.

Pero si es indudable que el *hardware* de un ordenador puede ser equiparado, salvo la limitación fáctica de su memoria, a una máquina universal de Turing, también lo es que ésta, con la misma restricción, puede ser programada en un ordenador, viniendo a representar así parte de su *software*. Hacia los años sesenta compitieron algunos autores en la confección de un programa de máquina universal de tamaño mínimo. Siguiendo una idea del ingeniero Claude SHANNON se tomó como medida del tamaño de una determinada realización de la máquina universal de Turing, el producto del número de sus símbolos por el de sus estados. Un resultado obtenido entonces por Minsky fue de 6-6.

---

[11] *O.c.*, pp. 127-132.

Nada nos prohíbe, por otra parte, contemplar el supuesto de que la máquina a simular por **U** sea ella misma: bastará con introducir en la cinta, convenientemente codificada, su propia tabla, acompañada de los argumentos que procedan. En ese supuesto la máquina universal desempeñaría a su manera, careciendo de consciencia, la función que consideramos privilegio de ésta: la introspección. Al autointerpretarse, haciendo hermenéutica de sí misma, **U** sería, por así decirlo, una máquina «introspectiva».

§ 4. *La tesis de Church-Turing*

En términos informales decimos que una función es efectivamente calculable cuando hay un método que permite resolverla en un número finito y ordenado de pasos. Con su teoría de máquinas abstractas de computación Turing propone caracterizar más precisamente esa idea, sosteniendo que *una función es efectivamente calculable si hay una máquina que la computa en un número finito de pasos*, o sea, como hoy decimos en memoria del autor de esta propuesta, si hay una máquina de Turing que la computa en un número finito de pasos, o más abreviadamente, *si es Turing-computable.*

El artículo de Turing sobre números computables fue publicado en 1936-37. Pero los intentos de formular una caracterización matemática formalmente precisa del concepto informal e intuitivo de «efectivamente calculable» datan de años atrás. Durante los años 1932-1935 los lógicos norteamericanos CHURCH y KLEENE habían elaborado con este propósito el concepto de «funciones lambda-definibles». Y en un artículo publicado el mismo año 1936 [12], adelantándose en poco tiempo a Turing, CHURCH propuso la tesis de que la noción de *función recursiva general* [13] es la definición matemática del concepto más o menos vago e intuitivo de función efectivamente calculable. Este aserto, que identifica definicionalmente los conceptos de calculabilidad efectiva y recursividad general, es conocido en la comunidad lógica y matemática como *tesis de Church.* Se lo llama «tesis» y no «teorema», porque los conceptos que vincula no

---

[12] Alonzo CHURCH, «An unsolvable problem of elementary number theory», *The American Journal of Mathematics*, vol. 58 (1936), pp. 345-363. También en DAVIS, *The Undecidable*, pp. 89-107.

[13] A. CHURCH, «A note to the *Entscheidungsproblem*», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (1936), núms. 1 y 3. También en DAVIS, *o.c.*, pp. 110-115.

son de la misma condición. Uno es intuitivo y precientífico y otro formal y científico. Establecer definitivamente la equivalencia entre ambos exigiría probar primero que toda función efectivamente calculable es recursiva general y después que toda función recursiva general es efectivamente calculable. Pero el predicado, en el sentido tradicional de la palabra, de esta última proposición no es un concepto científico, sino precientífico, y una proposición de esa índole no puede ser, por defecto intrínseco, conclusión de una prueba científica.

Con independencia de CHURCH, aunque algo más tarde, TURING haría una propuesta semejante al sostener que toda función efectivamente calculable es una función computable, o, como hoy decimos, Turing-computable. Ésta es la *tesis de Turing*.

CHURCH demostró en su artículo de 1936 que los conceptos matemáticamente precisos de «función lambda-definible» y «función recursiva general» son equivalentes. Y Turing demostró en el suyo que los conceptos matemáticamente precisos de «función Turing-computable» y «función recursiva general» son asimismo equivalentes. La prueba de que estas diversas caracterizaciones matemáticas del concepto intuitivo de función calculable son equivalentes refuerza, aunque sin poder demostrarlas, ambas conjeturas, la de CHURCH y la de TURING, a las que es usual reunir, por su semejanza, en una sola denominación como la *tesis de Church-Turing*.

§ 5. *Lo incalculable*

Pero, si parece asombroso lo que la máquina universal de Turing puede hacer, parece quizá más asombroso lo que no puede hacer.

El principal resultado de la teoría de la computabilidad tiene carácter negativo y consiste en que no hay procedimiento de decisión para determinar, dado cualquier algoritmo, si éste llega o no a su fin, o dicho en términos de la teoría de Turing, que no hay procedimiento de decisión para determinar, dada cualquier máquina de este nombre, si se para o no se para.

Este teorema se puede demostrar por reducción al absurdo. Supongamos que la cuestión de saber, para toda máquina de Turing, si su operación llega a término, es una cuestión decidible. Si ello es así hay un procedimiento efectivamente calculable para saberlo, en cuyo caso, por la tesis de Church-Turing, debe haber una máquina de Turing que realiza esa función.

Llamemos **D** a esa máquina decisoria, cuya función consiste en averiguar para cualquier máquina de Turing, **M**, simulando su comportamiento, si llegan a término las operaciones que ésta realiza ante cualquier argumento, *x*, escrito en la cinta.

En la cinta de **D** habrá que escribir por tanto la descripción de la máquina a simular y la de su argumento. Convengamos en representar este hecho así:

D (d(**M**), *x*),

siendo correlativamente **M**(*x*) la representación del hecho de que la máquina a simular tiene escrito en su cinta el argumento indicado. Especifiquemos la función de la máquina decisoria disponiendo que se detenga o no según lo haga la máquina que simula, de modo que

D (d(**M**), *x*) se para si **M**(*x*) se para, y no en caso contrario.

Si introdujéramos **M** como argumento a sí misma, obligándola, por así decirlo, a un cálculo introspectivo, la máquina decisoria recogería este hecho:

D(d(**M**),d(**M**)) se para *si* **M**(d(**M**)) *se para, y no en caso contrario.*

Pero este mismo hecho se puede representar también imaginando una nueva máquina **D'** que se diferencie de **D** por admitir inicialmente un solo argumento que ella se encarga de duplicar con una máquina copiadora auxiliar **C**; en todo lo demás opera igual que **D**. Siendo **D'** = **D** + **C**, **D'**(d(**M**) hace a todos los efectos lo mismo que **D**(d(**M**), d(**M**)).

Imaginemos ahora una tercera máquina decisoria **D"** invirtiendo en ella las funciones de **D'**, de manera que no se pare cuando ésta se pare y al revés. Así **D"**(d(**M**) se para si **M**(d(**M**)) no se para, y no en caso contrario.

¿Qué sucedería si introdujéramos en la cinta de **D"** la descripción de sí misma? Pues sucedería que, sustituyendo en la anterior declaración **M** por **D"**,

D"(d(**D"**) se para si **D"**(d(**D"**)) no se para, y no se para en caso contrario.

El desconcertante y contradictorio resultado, que recuerda a la paradoja de la clase russelliana, es que esta máquina decisoria concluye

deteniéndose si no se detiene y no deteniéndose si se detiene. De aquí se deduce que no puede haber tal máquina **D''**, y de esto a su vez que tampoco puede darse la máquina **D'**, ni, por tanto, tampoco **D**. La cuestión de saber por un procedimiento algorítmico si una máquina de Turing cualquiera se detiene es incalculable [14].

§ 6. *Máquinas de registro*

La principal diferencia entre una máquina de Turing y un ordenador digital es, como ya queda dicho, que la memoria de la primera es virtual o idealmente infinita, mientras que la del segundo tiene, por razones empíricas, un límite físico.

Pero hay, además, una importante diferencia de funcionamiento en la cual el ordenador lleva ventaja. El hecho de que la cabeza de la máquina de Turing tenga que desplazarse a lo largo de una cinta unidimensional, complica extraordinariamente sus cálculos, porque la obliga a un sinnúmero de idas y venidas. Debemos a Hao Wang la idea de permitir que una máquina de Turing pueda disponer de dos o más cintas o *registros* con la libertad de saltar arbitrariamente de un registro a otro (cada uno de los cuales sería también virtualmente ampliable al infinito). Esto le ahorra a la cabeza de la máquina muchas de sus idas y venidas.

Minsky desarrolló esta idea de Wang con su noción de *máquinas de registro* [15], cuyo funcionamiento se puede describir con las mismas rutinas o estereotipos con que se describen los programas de un ordenador, que consta básicamente de un cen-

---

[14] Entre los problemas insolubles recientemente descritos, tiene interés el llamado *problema del castor industrioso*, descubierto en 1962 por Tibor RADO. Si convenimos en agrupar tipológicamente las máquinas de Turing tomando como criterio el número de sus estados, podremos formar un grupo con las que tienen dos estados, otro con las que tienen tres, cuatro, etc. El número de máquinas estructuralmente distintas que es posible diseñar, quedando fijo el de sus estados, es necesariamente finito. Elijamos por ejemplo el grupo de máquinas de 5 estados y separemos, dentro de ese grupo, todas aquellas que se caracterizan por no terminar sus cálculos, perdiéndose en un número infinito de operaciones. Y seleccionemos de las que quedan la que arroja como *output* una serie mayor de palotes. Llamemos a esa serie el *castor industrioso* del grupo de máquinas de 5 estados. RADO ha demostrado que el problema de determinar algorítmicamente para todo n, siendo n el número de estados de un grupo de máquinas, cuál es el castor industrioso de ese grupo, es un problema insoluble, porque la máquina universal que pretendiera simular a las componentes del grupo se perdería en la simulación de aquellas que continúan calculando hasta el infinito.

Otro resultado de este problema es que con la escala de ordenación de las máquinas de Turing según el número n de sus estados crece exponencialmente el grado de «inteligencia» que éstas necesitan para resolver los problemas que se les puedan plantear. La ristra de palotes característica del castor industrioso del grupo de máquinas de 8 estados es de 10 elevado a 43.

[15] A. M. TURING, «¿Puede pensar una máquina?», en A. M. TURING, H. PUTNAM y D. DAVIDSON, *Mentes y máquinas*, Tecnos, Madrid, 1995.

tro o unidad de cálculo (el equivalente real de la cabeza de una máquina de Turing) y una memoria compuesta de un elevadísimo número de registros (cada uno de ellos equivalente a una cinta de máquina de Turing, pero con la salvedad de que su longitud es finita).

Un repertorio de instrucciones tan reducido como éste (denominando con símbolos en negrita a un registro y en cursiva a su contenido, y dando al símbolo «=» el sentido matemáticamente no ortodoxo de «cambiar»):

$a = 0$	(cambia reduciéndolo a 0 el contenido del registro **a** y pasa a la siguiente instrucción);
$b = b'$	(cambia incrementándolo en 1 el contenido del registro **b** y pasa a la siguiente instrucción);
$\rightarrow n$	(salta a la instrucción *n*);
$a\,(-)\,(n)$	(si el contenido del registro **a** no es 0, disminúyelo en 1 y pasa a la siguiente instrucción; si es 0, salta a la *n*-ésima instrucción).
p	(instrucción de parada),

permite efectuar las operaciones de una máquina de Turing. La instrucción del primer tipo realiza la operación de borrar; la del segundo aplica la función sucesor; la del tercero realiza la operación de «saltar» por encima del orden de secuencia normal de instrucciones; y la del cuarto «decide» ante una bifurcación o encrucijada, saltando o no, según el caso, por encima del referido orden normal de secuencia. Por ejemplo, este sencillo programa

1. $a\,(-)\quad(4)$
2. $b = b'$
3. $\rightarrow 1$
4. p

suma el contenido del registro **a** al contenido del registro **b**, decrementando e incrementando respectiva y reiteradamente en 1 al primero y al segundo, hasta el momento en que *a* quede reducido a 0, que marca el fin del cálculo.

§ 7. *¿Puede pensar una máquina?*

En 1950 la revista inglesa de filosofía *Mind* publicó el texto de una conferencia radiada de Turing en la que éste sostuvo la tesis de que un computador digital puede hacer todo lo que hace el hombre.

Esta tesis, que escandalizó a la audiencia, se apoyaba en la extrapolación de su idea matemática de «máquina universal». Dejando de lado las inevitables restricciones relativas a limitación de memoria, un computador digital es absolutamente equiparable a una máquina universal de Turing, y esto está fuera de discusión. Pero TURING añadía que si una máquina de esta índole está capacitada en principio para realizar, si se la instruye debidamente mediante una programación adecuada, toda tarea susceptible de ser resuelta por

cálculo, sea con números o con palabras, entonces es que puede hacer todo lo que haga la mente. Nos encontramos, pues, frente a una nueva versión de la teoría que identifica al conocimiento con el cálculo. En la necesidad que tiene la máquina de ser programada veía TURING otra analogía con la inteligencia humana, que viene al mundo como pura capacidad de conocer y necesita el complemento de la educación y el adiestramiento adecuados para poder ejercer con plena eficacia la multiplicidad de funciones de que es capaz.

La conferencia ilustraba pintorescamente la tesis propuesta apelando al «juego de imitación», un juego de equívocos entre una persona que hace preguntas y otras dos, un hombre y una mujer, a las que no conoce ni ve y cuyo sexo debe averiguar mediante el intercambio de mensajes mecanografiados que no excluyen la mentira. Si se pusiese un computador debidamente programado en lugar de una de esas personas desconocidas y en un juego así el interrogador no advirtiese la condición no humana de su contrincante, la máquina habría demostrado, según TURING, su capacidad de simular perfectamente nuestra inteligencia.

Así fue como surgió la «metáfora del computador», que implica la idea de que una máquina puede ser un modelo explicativo de la mente. Filósofos actuales como Hilary PUTNAM [16], han prolongado la tesis de Turing con la llamada teoría *funcionalista* de la mente, proponiendo adicionalmente esta nueva analogía: así como el comportamiento de una máquina de cálculo no podría explicarse jamás por el análisis de sus *inputs* o estímulos, sino que hace falta tener también conocimiento de sus estados internos, así debe suceder con el organismo humano, cuyo comportamiento no podría explicarse tan sólo, como pretendían los conductistas, por los estímulos procedentes del exterior: haría falta también tener conocimiento de sus estados anímicos interiores. El artículo de TURING sobre la comparación del ordenador digital con la mente humana ha sido también fuente de inspiración en el área de investigación informática que hoy llamamos *inteligencia artificial* y en *psicología cognitiva*. Entre los recientes críticos de esta tesis de TURING merecen ser citados el filósofo del lenguaje SEARLE y el físico PENROSE [17].

[16] H. PUTNAM, «Mentes y máquinas», en la obra citada en nota anterior.

[17] J. SEARLE, *Mentes, cerebros y ciencia*, Cátedra, Madrid, 1985; R. PENROSE, *El nuevo traje del emperador*, Crítica, Barcelona, 1991.

CAPÍTULO XVIII

MÉTODOS BOOLEANOS

§ 1. *El lenguaje de Boole y el lenguaje de Frege*

El lenguaje formal de primer orden fue diseñado por Frege con fines ante todo teóricos. Desde el punto de vista de la computación, resulta quizá demasiado flexible por un lado y demasiado sutil por otro para dejarse manejar por una máquina. En este sentido un modelo booleano del lenguaje puede ser, por razones tecnológicas, más práctico que el fregeano. En un lenguaje de lógica de enunciados donde no se utilice el implicador podemos leer nuestras fórmulas de izquierda a derecha y de derecha a izquierda como hace el matemático con las ecuaciones algebraicas. A diferencia del conjuntor y del disyuntor, el implicador, símbolo protagonista en los cálculos de Frege, carece de la propiedad conmutativa de sus términos y su lectura no admite retroceso. Y con toda la magnitud de su importancia teórica, un obstáculo aún mayor a la lectura y a la interpretación automática lo ofrecen los cuantificadores. En el capítulo siguiente, sección 3, se considerará un subconjunto del lenguaje formal de primer orden, el llamado lenguaje en *forma clausal* que es más apto para el tratamiento mecánico. Las ideas y técnicas que se describen en este capítulo son fundamentales para entender el cambio de las fórmulas hasta ahora utilizadas por nosotros a las fórmulas del lenguaje de cláusulas.

§ 2. *Formas normales conjuntiva y disyuntiva*

Dada una fórmula cualquiera A del cálculo de enunciados, es posible obtener a partir de ella, mediante una serie finita de transformaciones puramente simbólicas, una fórmula equivalente en *forma normal*, FN(A), que permite decidir si la fórmula original A es o no tautología o contradicción.

El método de reducción de una fórmula enunciativa a forma

normal proporciona prácticamente los mismos resultados que el método de las tablas de verdad, pero sin necesidad de recurrir a gráficos de ningún género y sin que importe demasiado el grado de complejidad de la fórmula problema.

Las fórmulas de lógica de enunciados pueden ser reducidas a dos tipos de formas normales: *conjuntiva* y *disyuntiva*. Ambos tipos se caracterizan por no utilizar más que tres conectores: conjuntor, disyuntor y negador, y por la exigencia de que el negador, si aparece, ha de estar inmediatamente adosado a fórmulas atómicas, nunca a fórmulas moleculares. Y ambos tipos de forma normal difieren entre sí por la siguiente circunstancia: en la forma normal conjuntiva todo conjuntor ha de estar fuera de paréntesis y todo disyuntor dentro de paréntesis, mientras que en la forma normal disyuntiva sucede a la inversa.

Definiremos primero con más cuidado cada uno de estos dos conceptos.

Definición de formal normal conjuntiva. Una fórmula de lógica de enunciados está en forma normal conjuntiva, FNC, si y sólo si esa fórmula no contiene coimplicadores ni implicadores, y consiste en una conjunción de disyunciones en las cuales el disyuntor vincula solamente fórmulas atómicas o negaciones de fórmulas atómicas. Su estructura será, por consiguiente, ésta:

$$\text{FNC} \rightleftharpoons \text{D}_1 \wedge \text{D}_2 \wedge \ldots \wedge \text{D}_\text{N} \; (n \geq 1),$$

siendo cada $\text{D}_i(1 \leq i \leq n)$ una *disyunción elemental*, por la que entenderemos una disyunción de fórmulas atómicas afirmadas o negadas:

$$\text{D}_i \rightleftharpoons p_1' \vee p_2' \vee \ldots \vee p_m'$$

siendo a su vez $p_j'(1 \leq j \leq m)$ una fórmula atómica afirmada o negada. *Una* FNC es, sencillamente, *una conjunción de disyunciones elementales* [1]. P. ej., las fórmulas: $p \to q$, $\neg (p \wedge q) \vee (q \wedge \neg p)$ no

[1] Conviene, sin embargo, añadir una precisión. Para que esta definición no excluya los casos límites, entenderemos que una sola disyunción elemental es una FNC de un solo miembro (conjunción degenerada); y que una fórmula atómica afirmada o negada, sin más compañía, es un caso degenerado de disyunción elemental. Así, $p \vee q$ (conjunción degenerada) y $p \wedge q$ (conjunción de disyunciones elementales degeneradas) son casos (límites) de FNC.

están en FNC, mientras que las fórmulas: $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (r \vee s)$ y $(p \vee q) \wedge \neg s$ sí lo están.

Definición de forma normal disyuntiva. Una fórmula de lógica de enunciados está en forma normal disyuntiva (FND) si y sólo si esa fórmula no contiene coimplicadores ni implicadores y consiste en una disyunción de conjunciones en las cuales el conjuntor vincula solamente fórmulas atómicas o negaciones de fórmulas atómicas. Su estructura será, por consiguiente, ésta:

$$\text{FND} \rightleftharpoons C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_N \quad (n \geq 1)$$

siendo cada $C_i (1 \leq i \leq n)$ una *conjunción elemental*, por la que entenderemos una conjunción de fórmulas atómicas afirmadas o negadas:

$$C_i \rightleftharpoons p_1' \wedge p_2' \wedge \ldots \wedge p_m'$$

siendo a su vez cada p_j' $(1 \leq j \leq m)$ una fórmula atómica afirmada o negada. *Una* FND *es,* sencillamente, *una disyunción de conjunciones elementales* [2]. P. ej.: $(p \wedge \neg q) \vee r$ es una FND.

El método de reducción de una fórmula de lógica de enunciados a forma normal es tan mecánico y rutinario como el método de las tablas de verdad. Consta de cuatro pasos principales, de los cuales los dos primeros son idénticos para ambos tipos de forma normal. Estos cuatro pasos son: 1.º) reducción de constantes lógicas, 2.º) normalización del negador, 3.º) exteriorización del conjuntor (o del disyuntor), y 4.º) simplificación y ordenación del resultado de los pasos anteriores.

La realización de estos pasos se efectúa recurriendo al uso de leyes tautológicas de equivalencia y el principio de intercambio. El detalle de cada uno de ellos es como sigue:

1.º) *Reducción de constantes lógicas.* Este paso consiste en la eliminación de los coimplicadores y los implicadores que eventualmente ocurran en la fórmula cuya forma normal se pretende obtener. Para la eliminación de coimplicadores se utilizará la ley que define al coimplicador en términos de implicación y conjunción:

---

[2] Como casos límites de FND admitiremos, análogamente a lo establecido respecto de la FNC, disyunciones degeneradas (de un solo miembro) y conjunciones elementales degeneradas (de un solo miembro).

$$(A \leftrightarrow A) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Y para la eliminación de implicadores se recurrirá, correlativamente, a la definición de la implicación en términos de negador y disyuntor o en términos de negador y conjuntor.

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$$
$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B).$$

2.º) *Normalización del negador.* Una vez eliminados los conectores $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, procederá interiorizar los negadores que eventualmente ocurran en el resultado de las anteriores transformaciones, de manera que cada negador quede directamente adosado a una fórmula atómica. Para introducir negadores dentro de paréntesis se recurrirá, obviamente, a las leyes de DE MORGAN:

$$\neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$\neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

Pero antes, y también después, de ello convendrá, si es posible, reducirlos en número. Para esta reducción servirán las dos leyes, condensadas en una equivalencia, de doble negación:

$$\neg \neg A \leftrightarrow A.$$

Con base en este principio de doble negación podemos agregar la siguiente regla práctica: cuando dos o más negadores seguidos se acumulen inmediatamente delante de una fórmula o de una subfórmula, es legítimo suprimirlos a todos ellos si el número es par, o reducirlos a uno solo si el número es impar.

3.º) *Exteriorización de conjuntores o de disyuntores.* El tercer paso, que es el más importante y específico de este procedimiento, consistirá en sacar fuera de paréntesis en cada ocurrencia al conector binario adecuado, según que se trate de obtener una FNC o una FND. Las leyes interesantes al efecto son las leyes de distribución entre estos dos conectores.

(A) *Para obtener la forma normal conjuntiva* será preciso sacar al conjuntor, en todas sus ocurrencias, fuera de paréntesis, y a

este fin se hará uso de la ley de distribución del disyuntor en conjunción en cualquiera de estas dos formas:

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
$$(A \wedge B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

porque es evidente que ambas equivalencias, leídas de izquierda a derecha, significan la normalización del conjuntor.

(B) *Para obtener la forma normal disyuntiva* será preciso sacar el disyuntor, en todas sus ocurrencias, fuera de paréntesis, y a este fin se hará uso de la ley de distribución del conjuntor en disyunción en cualquiera de estas dos formas:

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$(A \vee B) \wedge C \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (B \wedge C)$$

porque también aquí es evidente que ambas equivalencias, leídas de izquierda a derecha, significan una normalización del disyuntor.

4.º) *Simplificación y ordenación del resultado de las anteriores transformaciones*. Este último paso, que no es realmente obligado, consistirá en ordenar alfabéticamente las disyunciones elementales o las conjunciones elementales de que conste la forma normal obtenida, de acuerdo, según el caso, con la ley conmutativa de la disyunción o de la conjunción:

$$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$$
$$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$$

y en suprimir eventualmente redundancias entre los miembros de esas disyunciones o conjunciones elementales, o entre esas disyunciones o conjunciones elementales cuando se repiten en una fórmula. A este efecto se aplicarán las leyes de idempotencia:

$$A \vee A \leftrightarrow A$$
$$A \wedge A \leftrightarrow A$$

Ejemplo: Obténgase la forma normal conjuntiva de la fórmula

$$A \rightleftharpoons (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$$

1.º) Reducción de conectores (eliminación de implicador):

$\neg (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \vee (\neg (p \wedge q) \vee r)$ (Por definición de implicador)

2.º) Normalización de negador:

$(\neg \neg p \wedge \neg (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r)$ (Por leyes de DE MORGAN)
$(\neg \neg p \wedge \neg \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r)$ (Por leyes de DE MORGAN)
$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r)$ (Por ley de doble negación)

3.º) Exteriorización de conjuntor:

$(p \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee \neg q \vee r)$
(Por ley distributiva)

$(p \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee r)$
(Por ley distributiva)

4.º) Simplificación y ordenación del resultado:

$(p \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg r)$
(Por ley conmutativa)

Como toda fórmula de la lógica de enunciados es, por definición, finita, y como las leyes utilizadas en el proceso de reducción a FNC y FND son asimismo en número finito, *puede darse por establecida, para cualquier fórmula A de la lógica de enunciados, la existencia de una forma normal conjuntiva, FNC (A), y una forma normal disyuntiva, FND (A), equivalentes a A.*

Ahora bien, del hecho de que, para cualquier fórmula A de la lógica de enunciados, existan formas normales conjuntiva y disyuntiva equivalentes, *se sigue que disponemos de un procedimiento mecánico para decidir si esa fórmula A es o no tautología y si es o no contradicción.*

Basta hacer las siguientes consideraciones. Una FNC es una conjunción de disyunciones elementales. Es obvio que una disyunción elemental será una tautología si se da en ella al menos una vez la afirmación y la negación de una misma fórmula atómica, porque en tal caso será una instancia de la ley tautológica $A \vee \neg A$, cualesquiera que sean, si los hay, los demás elementos de la disyunción. Y es asimismo evidente que, si todas las disyunciones elementales de una

FNC son tautologías, ella misma será también una tautología. Podemos, pues, establecer que *una FNC es tautológica si en cada una de las disyunciones elementales que la integran se da la circunstancia de que aparezca una misma fórmula atómica afirmada y negada.*

Análogamente, una FND es, por su parte, una disyunción de conjunciones elementales. Una conjunción elemental será contradictoria si contiene al menos una vez la posición y la negación de una misma fórmula atómica. *Si todas las conjunciones elementales de una FND se caracterizan por la circunstancia de que aparezca en cada una la afirmación y la negación de una misma fórmula atómica, es que son contradictorias y, por consiguiente, que la FND en cuestión es contradictoria,* puesto que se tratará de una disyunción de contradicciones (todos los miembros falsos).

Y dada finalmente la equivalencia, anteriormente establecida, entre una fórmula cualquiera de la lógica de enunciados y sus FN correspondientes, queda probado también que la obtención de éstas permite decidir si la fórmula en cuestión es o no tautología o contradicción.

Ejercicio 1.º Decidir por el método de reducción a FNC si la fórmula

$$A \rightleftharpoons \neg (p \leftrightarrow q)$$

es o no tautología.

Solución

1.	$\neg ((p \to q) \wedge (q \to p))$	(Eliminación de $\leftrightarrow$ en A)
2.	$\neg ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$	(Eliminación de $\to$ en 1)
3.	$\neg (\neg p \vee q) \vee \neg (\neg q \vee p)$	(Distribución de $\neg$ en 2)
4.	$(\neg \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg \neg q \wedge \neg p)$	(Distribución de $\neg$ en 3)
5.	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$	(Eliminación de $\neg$ en 4)
6.	$(p \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p)$	(Exterioriz. de $\wedge$ en 5)
7.	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$	(Exterioriz. de $\wedge$ en 6)
8.	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	(Ordenación de 7)

La FNC de A revela que A no es tautología (puesto que no se da el fenómeno de posición y negación de una misma variable ni en la primera ni en la cuarta disyunción elemental de 8).

Ejercicio 2.º Decidir por el método de reducción a FND si la fórmula

$$A \rightleftharpoons \neg (p \to (q \to p))$$

es contradictoria.

Solución

1.	$\neg (\neg p \vee (\neg q \vee p))$	Eliminación de $\to$ en A)
2.	$\neg \neg p \wedge \neg (\neg q \vee p)$	(Distribución de $\neg$ en 1)
3.	$p \wedge \neg \neg q \wedge \neg p$	(Distribución de $\neg$ en 2)
4.	$p \wedge q \wedge \neg p$	(Eliminación de $\neg$ en 3)
5.	$p \wedge \neg p \wedge q$	(Ordenación de 4)

La FND de A revela que A es una contradicción. (Obsérvese que en este caso particular la FND es una disyunción de un solo elemento, pues sólo consta de una conjunción elemental, la cual puede ser, en este caso concreto, asimismo considerada como la FNC de A.)

§ 3. *Dualidad*

Sea una fórmula de lógica de enunciados que o bien está construida exclusivamente a base de los tres conectores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, o bien ha sido reducida a esa base. (El proceso de reducción a tal base consiste, sencillamente, en la eliminación de implicadores y coimplicadores de acuerdo con la ley de intercambio y con las equivalencias indicadas en la sección anterior, *la reducción de constantes lógicas*.)

Denominamos fórmula *dual* de A, a la fórmula A resultante de cambiar en A todas las ocurrencias de $\wedge$ por $\vee$ y de $\vee$ por $\wedge$, pero respetando siempre las ocurrencias y posiciones de $\neg$. Llamaremos *dualización* al proceso de obtención de la dual de una fórmula dada y diremos que $\vee$ es el *conjuntor dual* de $\wedge$ y viceversa.

He aquí algunos ejemplos de dualización:

Si A es $p \wedge q$	su dual A′ es $p \vee q$
Si A es $\neg p \vee q$	su dual A′ es $\neg p \wedge q$
Si A es $\neg (p \wedge q) \vee \neg p$	su dual A′ es $\neg (p \vee \neg q) \wedge \neg p$

pero si A es $\neg \neg p \to p$, será preciso primero eliminar el implicador en A:

$$\neg \neg \neg p \vee p$$

para obtener después la correspondiente dual A′:

$$\neg \neg \neg p \wedge p$$

que puede ser simplificada, si se desea, reduciendo en ella el número de negadores (véase sección anterior, *normalización de negador*) a $\neg p \wedge q$.

La dualización no preserva el valor de verdad de una fórmula. En el último ejemplo, el lector habrá observado que la fórmula A era precisamente una tautología y, sin embargo, su dual A es una contradicción. Esta circunstancia no es anecdóctica, sino que responde a una ley general que puede enunciarse así:

Principio general de dualidad. Si una fórmula A es tautológica, entonces la negación de su dual, ¬ A′, es también tautológica.

Además del principio general de dualidad, mencionaremos estos otros dos principios especiales:

1.º *Principio especial de dualidad para equivalencia. Si dos fórmulas son tautológicamente equivalentes, entonces sus duales son también tautológicamente equivalentes.* Es decir, si A ↔ B es una tautología, entonces A′ ↔ B′ es también una tautología.

2.º *Principio especial de dualidad para implicación. Si dos fórmulas se implican tautológicamente, entonces sus respectivas duales se implican también tautológicamente, pero en sentido inverso a los originales.* Es decir: Si A → B es una tautología, entonces B′ → A′ es también una tautología.

Las tres leyes de dualidad son metateoremas mutuamente conectados. He aquí una demostración del último de ellos.

$$A \rightarrow B$$

siendo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ las letras enunciativas que intervienen en la constitución de los componentes principales A, B.

Efectúense las tres transformaciones siguientes:

1.º Sustitúyase en la tautología original cada letra enunciativa, en todas sus ocurrencias, por su negación: p_1 por $\neg p_1$, p_2 por $\neg p_2$, ..., p_n por $\neg p_n$. El resultado será una nueva implicación

$$A^o \rightarrow B^o$$

que debe ser también tautológica puesto que la transformación efectuada sobre ella se funda en la propiedad de sustitución que preserva la tautologicidad (véase sección tercera del Capítulo IV, § 3).

2.º Aplíquese ahora, cuantas veces sea preciso, a cada uno de los componentes principales de la nueva implicación A^o, B^o, las leyes de DE MORGAN en el sentido de la exteriorización del negador, es decir, de derecha a izquierda, de modo que cada fórmula o subfórmula del tipo $\neg A \wedge \neg B$ o $\neg A \vee \neg B$ sea cambiada respectivamente por $\neg (A \vee B)$ o $\neg (A \wedge B)$.

El resultado es una tercera implicación que sigue siendo tautológica porque los intercambios basados en DE MORGAN preservan la tautologicidad. Pero observe el lector que los componentes implicados son ahora las negaciones de las respectivas duales de cada fórmula original:

$$\neg A' \rightarrow \neg B'.$$

Ello se patentiza considerando que con esta nueva transformación quedan desplazadas al exterior de la fórmula las negaciones introducidas por la anterior transformación y se han cambiado al mismo tiempo los conjuntores por disyuntores y viceversa.

3.º Contraponiendo ahora (véase ley de contraposición, Cap. VII § 4) la anterior implicación obtendremos el nuevo resultado

$$B' \rightarrow A'.$$

He aquí un sencillo ejemplo que servirá de ilustración para una mejor comprensión intuitiva del sentido de estas transformaciones. $A \rightleftharpoons p$ y $B \rightleftharpoons q \rightarrow p$. $A \rightarrow B$, esto es, $p \rightarrow (q \rightarrow p)$, es una implicación tautológica. Eliminando implicador en el consecuente, tendremos $p \rightarrow \neg q \vee p$. Efectuando ahora la sustitución de las letras enunciativas de esa fórmula por sus negaciones, resultará: $\neg p \rightarrow \neg \neg q \vee \neg p$ que continúa siendo también una implicación tautológica. Si se aplica al consecuente la primera ley de DE MORGAN, tendremos: $\neg p \rightarrow \neg (\neg q \wedge p)$, cuya contraposición dará $\neg q \vee p \rightarrow p$ que es una implicación tautológica, en sentido inverso, de las respectivas duales del antecedente y el consecuente de la implicación original.

De la utilidad que reporta la obtención de los metateoremas de dualidad puede hacerse idea el lector considerando que las leyes

conmutativa,
asociativa,
distributiva,
de idempotencia,
de absorción,

de la conjunción son, respectivamente, duales de las leyes de disyunción de igual denominación. (Véase Cap. VII, § 3.) Dado que todas estas leyes poseen la estructura de una equivalencia, el principio de dualidad para equivalencias autoriza a admitir sin más cualquiera de ellas una vez se haya demostrado su dual. Como es considerablemente más fácil probar las propiedades de la conjunción que las propiedades de la disyunción, bastaría hacerlo con aquéllas y eludir la demostración de éstas remitiéndose al referido principio.

También son equivalencias duales entre sí las definiciones del conjuntor y del disyuntor en términos de negador y el respectivo conector dual y las leyes de DE MORGAN.

*§ 4. *Lógica de circuitos*

El científico americano Claude E. SHANNON [3] estableció en 1938 [4] la aplicación del cálculo lógico de enunciados a problemas de construcción y análisis de redes eléctricas. Esta aplicación se basa en el descubrimiento de que existen importantes analogías entre las fórmulas del cálculo lógico y las redes eléctricas. Las fórmulas de la lógica se caracterizan por poseer uno de dos valores, verdad o false-

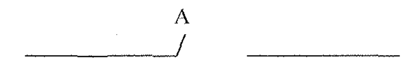
---

[3] Claude E. SHANNON, «A symbolic analysis of relay and switching circuits», *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 57 (1938). Este trabajo es un resumen de la tesis presentada por su autor para obtener el grado «master of science» en el Instituto de Tecnología de Massachusetts.

[4] Simultáneamente a SHANNON realizó investigaciones parecida el ruso V. I. SHESTAKOV. La idea de esta aplicación se remonta al físico P. EHRENFEST (1910).

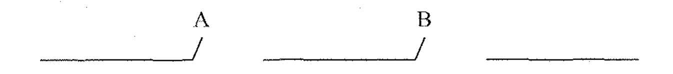
dad; y las redes eléctricas, por el hecho de que pase o no pase corriente a través de ellas. Las fórmulas lógicas son conexiones de elementos atómicos (letras enunciativas) cuya verdad o falsedad decide la verdad o falsedad de la conexión; las redes eléctricas son conexiones de contactos (conmutadores) cuyo estado de «encendido» o «apagado» decide el paso de la corriente por la red. Los modos de interconexión de dos o más fórmulas lógicas pueden reducirse a conjunción y disyunción; los modos de interconexión de contactos en las redes lógicas se reducen a la disposición en serie y la disposición en paralelo.

Este último punto se entenderá mejor con las siguientes aclaraciones. Un contacto (un conmutador) se caracteriza, cualquiera que sea la materia de que esté construido y la modalidad tecnológica de su construcción, por poseer dos estados: encendido (permite el paso de corriente) y apagado (no permite el paso de corriente). Del mismo modo, un enunciado se caracteriza, cualquiera que sea su contenido concreto, por ser verdadero o falso. En este sentido convendremos en que un contacto pueda representar, y ser representado por, un enunciado. La siguiente figura:



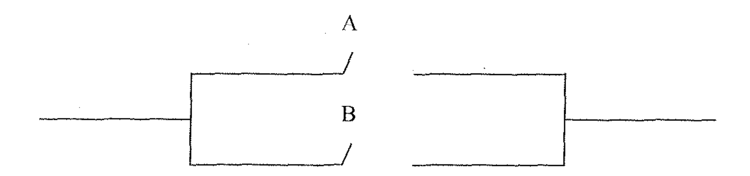
describe un circuito eléctrico compuesto de un solo contacto, al que ponemos en correspondencia con una fórmula, A. (Podemos suponer, p. ej., que la corriente entra por la izquierda de la línea, procediendo de una batería, y se dirige hacia la derecha a una lámpara, que se enciende o apaga según la situación del contacto.)

Una correspondencia similar puede establecerse entre la *conjunción de dos fórmulas*, A ∧ B, y *una red o circuito* que conste de dos contactos dispuestos *en serie*. Un circuito en serie estará en situación de «encendido» (es decir, por él pasará corriente) si y sólo si todos sus contactos están en esa situación. La imagen gráfica de este circuito aparece en la siguiente figura:



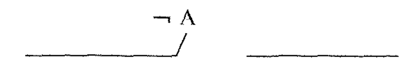
A la *disyunción de dos fórmulas*, A ∨ B, *corresponde una red*

que consta también de dos contactos, pero conectados *en paralelo*. Un circuito dispuesto en paralelo estará en situación de «encendido» (es decir, por él pasará corriente) si y sólo si uno al menos de los contactos que lo integren está en esa situación. La imagen gráfica de un circuito en paralelo se recoge en la siguiente figura:



Es evidente que en este circuito el paso de corriente se define del mismo modo que definimos las condiciones de verdad de una disyunción.

El análogo de la *negación*, $\neg$ A, en términos de redes será *un contacto que realice una función inversa* a la de otro, que correspondería a A, de modo que cuando éste se encuentre en situación de apagado, aquél se encienda y a la inversa. Su representación puede ser, sencillamente, esta:



entendiendo que su función es la inversa del circuito A.

Estos hechos sirvieron de base a SHANNON para confeccionar, en el citado artículo de 1938, la siguiente tabla de analogías:

TABLA DE ANALOGÍAS ENTRE EL CÁLCULO DE ENUNCIADOS Y EL ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Símbolos [5]	*Interpretación Lógica*	*Interpretación en t.ª circuitos*
A	el enunciado A	el circuito A
1	enunciado verdadero	circuito en situación de encendido (por él pasa corriente)

[5] El aparato formal que sirvió de base a SHANNON fue, de hecho, el álgebra de BOOLE (que puede ser interpretada no sólo en el sentido de un cálculo de clases, sino también en el sentido de un cálculo de enunciados).

0	enunciado falso	circuito en situación de apagado (por él no pasa corriente)
A · B	conjunción de A y B (enunciado que es verdadero si A y B lo son)	conexión en serie de los circuitos A y B
A + B	disyunción de A y B (enunciado que es verdadero si A o B lo son)	conexión en paralelo de los circuitos A y B
A = B	coimplicación de A y B (enunciados que se implican recíprocamente)	dos circuitos que se encienden y apagan simultáneamente

«Cualquier expresión formada con las operaciones de adición, multiplicación y negación representa explícitamente un circuito que contiene únicamente conexiones en serie y en paralelo... Cada letra en una expresión de esta suerte representa un contacto de abrir o cerrar, es decir, un conmutador.» Pero como todas las fórmulas de la lógica de enunciados pueden ser expresadas en términos de conjunción, disyunción y negación, el paralelismo existente entre fórmulas lógicas y redes eléctricas resulta ser absoluto. Toda fórmula tiene su representación en una red y viceversa. El mayor o menor grado de complejidad de la una tiene su exacta contrapartida en el mayor o menor grado de complejidad de la otra. Y es justamente este fenómeno de la identidad estructural lo que permite sujetarlas a un mismo cálculo.

«Debido a esta analogía, cualquier teorema del cálculo de enunciados es también un teorema verdadero si se lo interpreta en términos de contactos.»

He aquí las palabras del propio SHANNON: «El álgebra de la lógica originada por George BOOLE es un método simbólico para investigar relaciones lógicas. Los símbolos del álgebra de BOOLE admiten dos interpretaciones lógicas. Si se los interpreta en términos de clases las variables no se limitan a los dos valores posibles 0 y 1. Esta interpretación es conocida como el álgebra de clases. Pero si se conviene en que los términos representen proposiciones, tenemos el cálculo de proposiciones en las que las variables se limitan a los valores 0 y 1.»

En la tabla de arriba figura solamente, como es obvio, la interpretación de los símbolos booleanos en el sentido del cálculo de enunciados. Interpretados en el sentido de un cálculo de clases, 1 y 0 serían las clases universal y vacía; y «·», «+» y «—» las operaciones de intersección, unión y complemento de clases.

Las consecuencias que se siguen de este paralelismo encuentran un interesante campo de aplicación en los problemas de análisis y síntesis de redes eléctricas. La manipulación de una fórmula, obviamente, es más cómoda y menos costosa que la manipulación de redes. La simplificación, con arreglo a leyes de álgebra lógica, de una fórmula representante de una red dada, permite obtener una fórmula más simple; esta fórmula es, a su vez, representante de una red más sencilla que cumple las condiciones de la primera con un costo sensiblemente inferior. También los problemas de síntesis y diseño de redes se resuelven más fácilmente planeando y explorando primero, con ayuda de la lógica, la configuración y condiciones de la red a construir.

A continuación sigue una relación de las principales leyes del álgebra de BOOLE (que no son sino equivalencias tautológicas del cálculo de enunciados) y, a título de ilustración, la resolución de un problema de análisis y síntesis de circuitos eléctricos con ayuda de estas leyes.

PRINCIPALES LEYES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

Elementos universal y vacío

1a. $A \cdot 1 = 1$ 1b. $A + 1 = 1$

2a. $A \cdot 0 = 0$ 2b. $A + 0 = A$

Negación

3a. $A\bar{A} = 0$ 3b. $A + \bar{A} = 1$

4. $\bar{\bar{A}} = A$

Producto y suma lógicos

Conmutatividad

5a. $AB = BA$ 5b. $A + B = B + A$

Asociatividad

6a. $A(BC) = (AB)C$ 6b. $A + (B + C) = (A + B) + C$

Distributividad

7a. $A(B + C) = AB + AC$ 7b. $A + BC = (A + B)(A + C)$

Idempotencia

8a. $AA = A$ 8b. $A + A = A$

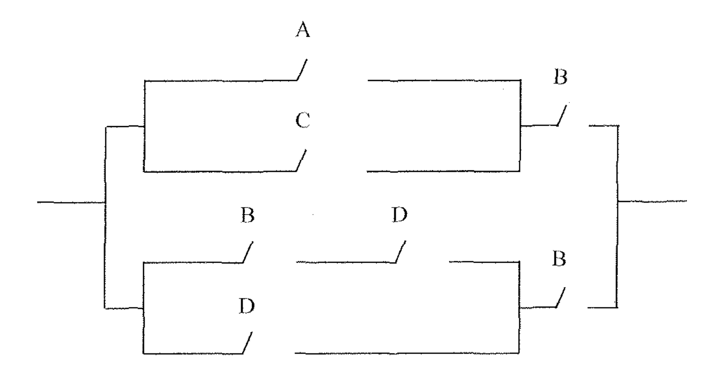
Absorción

9a. $A(A + B) = A$ 9b. $A + AB = A$

Leyes de De Morgan

10a. $\overline{A}\overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$ 10b. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$

Ejemplo (ARNOLD, *Logic and Boolean Algebra*, pp. 124-125):
Dada la siguiente red:



hallar una equivalente que sea más simple.

Solución:

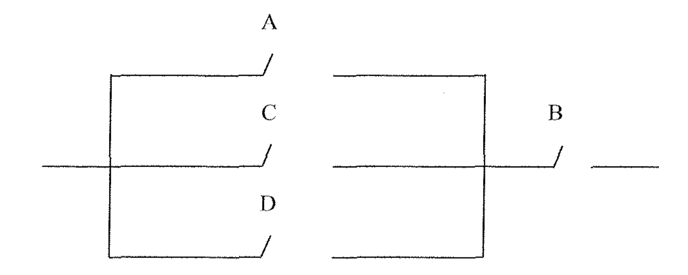
La estructura de la red dada puede formularse así:

$$(A + C)B + (BD + D)B$$

Y la simplificación de esa fórmula puede obtenerse a través de las transformaciones siguientes:

(1) (A + C)B + DB	por aplicación de la ley de absorción al segundo componente de la fórmula original
(2) ((A + C) + DB)(B + DB)	distribución de + en (1)
(3) (A+ C + D) (A + C + B)B	distribución de + en el primer componente y aplicación de absorción al segundo componente de (2)
(4) (A + C + D)B	aplicación de la ley de absorción al segundo y tercer componente de (3) (asociando previamente las dos primeras letras (A + C) del segundo componente, para que la ley de absorción pueda ser aplicada)

La red buscada es, por tanto:



La lógica de circuitos juega un papel básico en el diseño de la parte física de los computadores digitales. A este respecto, vale la pena mencionar aquí que, a veces, las condiciones tecnológicas del material utilizado en tales diseños aconsejan elegir como elementos primitivos de las conexiones lógicas operadores menos sencillos, al menos desde el punto de vista intuitivo de nuestra mente, que la suma y el producto lógicos. Por ejemplo, cuando el material utilizado son transistores, interesa particularmente el empleo de circuitos tipo «*nand*» (literalmente: «ni», esto es, la composición de «no» y de «y»), que en términos de negación y producto se puede definir: $\overline{AB}$. Pero esta operación es, justamente, la que compete al *funtor de* SHEFFER (véase la sección 5 del Capítulo IV): A | B. Algo análogo sucede con el circuito «*nor*» (literalmente: composición de «no» y «o»), definible como: $\overline{A + B}$, el cual corresponde, justamente, al funtor de PEIRCE:: A ↓ B (véase el mismo lugar).

CAPÍTULO XIX

DEDUCCIÓN AUTOMÁTICA

A. LOS PRIMEROS INTENTOS DE PRUEBA AUTOMÁTICA DE TEOREMAS

Dos trabajos pioneros en el campo de la deducción automática son los ensayos de NEWELL-SHAW-SIMON (1957) [1] y de HAO WANG (1960) [2], que llevaron a cabo la computación de los teoremas y de la lógica de enunciados de los *Principia Mathematica*.

Por regla general, los métodos a seguir en la búsqueda de la solución de un problema son de dos tipos: 1) heurístico o tentativo, y 2) algorítmico o mecánico. El primero implica mayor economía de tiempo, si bien a costa de un mayor grado de inseguridad; el segundo implica en principio una seguridad absoluta, pero puede resultar de hecho impracticable por la inmensa duración de los procedimientos requeridos.

§ 1. *El método heurístico de Newell-Shaw-Simon*

Estos tres autores crearon un programa que trataba de construir mediante computador el sistema axiomático de la lógica de enunciados de los *Principia Mathematica* empleando un criterio heurístico.

El programa viene a ser una simulación de los procesos reales que lleva a cabo una persona en la tarea de deducir axiomáticamente un teorema [3]. Supuesta una lista de axiomas de lógica de enunciados (los axiomas de los *Principia*) [4] y una serie de reglas de inferencia (las reglas de los *Principia*) [5], y dada una fórmula a reducir, los in-

---

[1] «The Logical Theory Machine» y «Empirical explorations with the Logic Theory Machine», *Proceedings of the Western Joint Computer Conference*, 1957.

[2] «Towards a mechanical mathematics», *IBM Journal of Research and Development*, vol. 4, núm. 1, enero de 1960.

[3] Sobre deducción axiomática, véase Capítulo XIV.

[4] Sobre el sistema axiomático de los *Principia*, véase Capítulo XIV, § 5.

[5] En el sistema de los *Principia* la definición de implicador funciona como regla de inferencia.

tentos de solución del problema se ajustan normalmente al siguiente plan:

1. Tratar de obtener esa fórmula por inferencia inmediata, lo cual se efectúa averiguando por simple inspección si la fórmula problema es idéntica a cualquiera de las fórmulas ya admitidas o si puede resultar idéntica a alguna de ellas mediante el recurso a la sustitución o al intercambio. Sea, por ejemplo, $p \rightarrow p$ una fórmula ya admitida y $\neg q \rightarrow \neg q$ la fórmula problema; es claro que sustituyendo p por $\neg q$ en la primera se obtiene la segunda. Si este intento fracasa, entonces procede:

2. Tratar de obtener la fórmula problema por inferencia inmediata, lo cual puede tener lugar principalmente, a su vez, de dos maneras:

2.1. O bien por *modus ponens*: sea B la fórmula problema; si se logra obtener más fácilmente, o se tiene ya, una fórmula más compleja $A \rightarrow B$, que incluya al final como consecuente la fórmula deseada, la cuestión se reduce ahora a probar la fórmula A, que permita, por *modus ponens*, liberar a B.

2.2. O bien por principio de silogismo: si la fórmula problema es $A \rightarrow C$ y se cuenta entre las fórmulas ya admitidas o bien $A \rightarrow B$ o bien $B \rightarrow C$, la cuestión se reduce a intentar la prueba de aquella de estas dos que aún no haya sido deducida, para formar el principio de silogismo: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

Sea, por ejemplo, la fórmula problema $\neg (p \vee q) \rightarrow \neg p$. Y supóngase que tras haber fracasado el ensayo de inferencia inmediata, se procede a ensayar el *modus ponens*. Supóngase asimismo que entre las fórmulas ya citadas figura el principio de contraposición $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$, cuyo consecuente guarda cierto parecido con la fórmula problema: $(p \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (\neg (p \vee q) \rightarrow \neg p)$. El axioma de adición: $p \rightarrow p \vee q$, permite ahora descargar por *modus ponens* la fórmula deseada.

El programa procede a aplicar una y otra vez, en sus distintos trámites, este proceso: primero a la fórmula problema inicial a deducir, y subsiguientemente a toda otra fórmula subproblema a cuya deducción sea preciso remontarse para obtener de ella la deducción de la fórmula inicial (que será así el término del proceso). De un conjunto de 52 teoremas de la lógica de enunciados de los *Principia*, el programa *Logic Theory Machine* logró probar 38, fallando de hecho en el resto; dos de esos 52 teoremas quedaban en principio totalmente fuera de su alcance.

§ 2. *El método de Wang*

En su contribución de 1960 Wang se propuso realizar una computación de la lógica de enunciados de los *Principia* con criterio algorítmico. Para ello recurrió a las técnicas de deducción de Gentzen, que tienen, desde el punto de vista de la computación, la doble ventaja sobre el método axiomático de no necesitar que se retengan los axiomas ni los teoremas ya probados para la prueba de otros nuevos —lo cual significa, obviamente, un gran ahorro para la memoria del computador—, y han de ser más fácilmente susceptibles de aplicación mecánica, sobre todo en la descomposición de fórmulas, en donde la regla a aplicar depende exclusivamente del signo lógico principal de la fórmula a descomponer.

a. *El cálculo secuencial de Gentzen*. El cálculo de Gentzen que utiliza Hao Wang es el llamado *cálculo secuencial*, que no opera, como el cálculo ordinario, sólo con fórmulas, sino también con cadenas o secuencias de fórmulas.

Como constantes lógicas se utilizan los cinco usuales: $\sim$ (negador), & (conjuntor), $\vee$ (disyuntor), $\supset$ (implicador), $\equiv$ (coimplicador o bicondicional), con sus interpretaciones usuales. $\Rightarrow$ denota deducción secuencial.

«Una letra proposicional P, Q, R, M o N, etc., es una fórmula (y una "fórmula atómica"). Si φ, ψ son fórmulas, entonces $\sim\varphi$, φ & ψ, $\varphi \vee \psi$; $\varphi \supset \psi$; $\varphi \equiv \psi$ son fórmulas. Si π, ρ son cadenas de fórmulas (pudiendo cada una, en particular, ser una cadena vacía o una fórmula simple), entonces π, φ, ρ es una cadena y $\pi \Rightarrow \rho$ es un secuente que, hablando intuitivamente, es verdadero si y sólo si o bien alguna fórmula de la cadena π (el "antecedente") es falsa, o alguna fórmula de la cadena ρ (el "consecuente") es verdadera, esto es, la conjunción de todas las fórmulas del antecedente implica la disyunción de todas las fórmulas del consecuente» (Wang).

«Hay once reglas de derivación. Una regla inicial establece que un secuente que sólo tenga fórmulas atómicas (letras proposicionales) es un teorema si y sólo si una misma fórmula ocurre a ambos lados de la flecha. Hay dos reglas para cada una de las cinco funciones de verdad, una que la introduce en el antecedente y otra que la introduce en el consecuente.» Basta reflexionar tan sólo en el significado intuitivo de las funciones de verdad y el signo flecha para convencerse de que estas reglas son correctas.

Reglas de derivación:

P1. Regla inicial: si λ, ζ son cadenas de fórmulas atómicas, entonces $\lambda \Rightarrow \zeta$ es un teorema si alguna fórmula atómica ocurre a ambos lados de la flecha. En las diez reglas siguientes, λ y ζ son siempre cadenas (posiblemente vacías) de fórmulas atómicas.

P2a. Regla $\Rightarrow \sim$: $$\frac{\varphi, \zeta \Rightarrow \lambda, \rho}{\zeta \Rightarrow \lambda, \sim \varphi, \rho}$$

P2b. Regla $\sim \Rightarrow$: $$\frac{\lambda, \rho \Rightarrow \pi, \varphi}{\lambda, \sim \varphi, \rho \Rightarrow \pi}$$

P3a. Regla $\Rightarrow \&$: $$\frac{\zeta \Rightarrow \lambda, \varphi, \rho \quad \text{y} \quad \zeta \Rightarrow \lambda, \psi, \rho}{\zeta \Rightarrow \lambda, \varphi \,\&\, \psi, \rho}$$

P3b. Regla $\& \Rightarrow$: $$\frac{\lambda, \varphi, \psi, \rho \Rightarrow \pi}{\lambda, \varphi \,\&\, \psi, \rho \Rightarrow \pi}$$

P4a. Regla $\Rightarrow \vee$ $$\frac{\zeta \Rightarrow \lambda, \varphi, \psi, \rho}{\zeta \Rightarrow \lambda, \varphi \vee \psi, \rho}$$

P4b. Regla $\vee \Rightarrow$: $$\frac{\lambda, \varphi, \rho \Rightarrow \pi \quad \text{y} \quad \lambda, \psi, \rho \Rightarrow \pi}{\lambda, \varphi \vee \psi, \rho \Rightarrow \pi}$$

P5a. Regla $\Rightarrow \supset$: $$\frac{\zeta, \varphi \Rightarrow \lambda, \psi, \rho}{\zeta \Rightarrow \lambda, \varphi \supset \psi, \rho}$$

P5b. Regla $\supset \Rightarrow$: $$\frac{\lambda, \psi, \rho \Rightarrow \pi \quad \text{y} \quad \lambda, \rho \Rightarrow \pi, \varphi}{\lambda, \varphi \supset \psi, \rho \Rightarrow \pi}$$

P6a. Regla $\Rightarrow \equiv$: $$\frac{\varphi, \zeta \Rightarrow \lambda, \psi, \rho \quad \text{y} \quad \psi, \zeta \Rightarrow \lambda, \varphi, \rho}{\zeta \Rightarrow \lambda, \varphi \equiv \psi, \rho}$$

P6b. Regla $\equiv \Rightarrow$: $$\frac{\varphi, \psi, \lambda, \rho \Rightarrow \pi \quad \text{y} \quad \lambda, \rho \Rightarrow \pi, \varphi, \psi}{\lambda, \varphi \equiv \psi, \rho \Rightarrow \pi}$$

b. *El algoritmo de Wang.* La estrategia del programa de Wang se inspira en una idea básica de Gentzen, que considera todo teorema lógico como una complicación del principio de autoimplicación

$$P \supset P$$

por aplicación de las diferentes reglas de introducción de los distintos operadores lógicos. Recíprocamente: la eliminación de dichos símbolos en cualquier fórmula, si esa fórmula es teorema, nos permite recuperar el esquema de autoimplicación. Basta con utilizar las reglas de introducción de símbolos anteriormente expuestas invirtiendo su sentido, es decir, leyéndolas de abajo a arriba, para que podamos contar con las diez reglas correlativas de eliminación de símbolos lógicos necesarias para la recuperación de dicho esquema.

Una vez diseñadas tales reglas, «dado un secuente cualquiera, podemos hallar en él la primera conectiva lógica y aplicar la regla apropiada para eliminarla, resultando de ello una o dos premisas que, tomadas conjuntamente, equivalen a la conclusión. Este proceso puede repetirse hasta que alcancemos un conjunto finito de secuentes que tengan sólo fórmulas atómicas». Cada secuente libre-de-conectivas puede ser sometido, por la regla inicial, al test de si es o no teorema. Si todos los secuentes así obtenidos son teoremas, entonces el secuente original también lo es y hemos logrado una prueba; en caso contrario obtendremos un contraejemplo y una contraprueba. Unos cuantos casos sencillos lo aclararán.

«Por ejemplo, dado cualquier teorema de los *Principia*, podemos prefijarle automáticamente una flecha y aplicarle las reglas para buscar una prueba. Cuando la conectiva principal es $\supset$, es más simple, aunque no necesario, reemplazar esa conectiva por una flecha y proceder. Por ejemplo, los teoremas

$$*2{,}45 \cdot \vdash :\sim (P \vee Q) \cdot \supset \cdot \sim P$$
$$*5{,}21 \cdot \vdash : \sim P \,\&\, \sim Q \cdot \supset \cdot P \equiv Q$$

pueden ser reescritos y probados como sigue:

T.2.45		$\sim (P \vee Q) \Rightarrow \sim P$	(1)
	(1)	$\Rightarrow \sim P, P \vee Q$	(2)
	(2)	$P \Rightarrow P \vee Q$	(3)
	(3)	$P \Rightarrow P, Q$	

VÁLIDO

T.5.21		$\Rightarrow \sim P \,\&\, \sim Q \cdot \Rightarrow \cdot P \equiv Q$	(1)
	(1)	$\sim P \,\&\, \sim Q \Rightarrow P \equiv Q$	(2)
	(2)	$\sim P, \sim Q \Rightarrow P \equiv Q$	(3)
	(3)	$\sim Q \Rightarrow P \equiv Q, P$	(4)
	(4)	$\Rightarrow P \equiv Q, P, Q$	(5)
	(5)	$P \Rightarrow Q, P, Q$	

VÁLIDO

(5)	$Q \Rightarrow P, Q, P$

VÁLIDO [6]

En todo caso, la aparición de los modernos lenguajes de manipulación simbólica, como LISP o PROLOG, facilitan la programación del algoritmo de Wang. En los párrafos que siguen se suministra un breve esquema de las principales operaciones y funciones del lenguaje LISP y el programa de dicho algoritmo elaborado por McCarthy.

Lenguaje de manipulación simbólica: el lenguaje LISP. Los lenguajes de programación más extendidos, como FORTRAN o ALGOL, fueron originalmente creados para la solución de problemas de cálculo numérico. Pero hay también lenguajes específicamente diseñados para la solución de problemas de cálculo simbólico, como el despejamiento de una incógnita en una ecuación algebraica, el análisis sintáctico de una oración o la deducción de un teorema. Son los llamados lenguajes de manipulación simbólica o de procesamiento de listas. Entre estos lenguajes merece ser destacado, el LISP, creado por McCarthy en 1960.

En los lenguajes de manipulación simbólica tipo LISP los datos a tratar tienen normalmente la estructura de *listas* o *cadenas* de caracteres, en las que, a efectos de análisis, suele distinguirse entre la parte inicial o *cabeza* de la cadena y el *resto* de esa cadena o cola de ella. Una expresión simbólica puede ser simple (*atómica*) o compleja.

Entre las principales operaciones y funciones del lenguaje LISP (especialmente adecuado para la programación de procesos recursivos) conviene distinguir las siguientes:

---

[6] Para facilitar la lectura de los signos lógicos al computador, Hao Wang utilizó en su programa un criterio de notación polaca: F para el negador, C para el conjuntor, D para el disyuntor, I para el implicador y B para el bicondicional. El signo de deducción secuencial se representó en el programa por un guión.

De acuerdo con esta notación, las pruebas de los dos teoremas anteriores serían:

T.2.45.		FDPQ – FP	(1)
	(1)	– FP, DPQ	(2)
	(2)	P – DPQ	(3)
	(3)	P – P, Q	(4)

VÁLIDO

T.5.21.		– ICFP · FQ · · BPQ	(1)
	(1)	CFP · FQ – BPQ	(2)
	(2)	FP, FQ – BPQ	(3)
	(3)	FQ – BPQ, P	(4)
	(4)	– BPQ, P, Q	(5)
	(5)	P – Q, P, Q	(6)

VÁLIDO

(5)	Q – P, P, Q	(7)

VÁLIDO

OPERACIONES DE ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE CADENAS

		Ejemplo	
Operación	*Significado*	*Instrucción*	*Resultado*
CAR x	Seleccionar la parte inicial o cabeza de la cadena x	(CAR A B C)	A
CDR x	seleccionar el resto de la cadena x	(CDR A B C)	(B C)
CADR x	seleccionar la parte inicial del resto de la cadena x	(CADR A B C)	B
CADDR x	seleccionar la parte inicial del resto del resto	(CADDR A B C)	C
CONS x, y	componer o concatenar las cadenas x, y	(CONS A B)	(A B)
QUOTE x	tomar a x no como nombre de otro símbolo, sino como cosa u objeto de mención, es decir, citarlo	(QUOTE A)	(A)

SÍMBOLOS ATÓMICOS DE ESPECIAL SIGNIFICACIÓN

T	denota	Verdadero
F	denota	Falso
NIL	denota	Cadena vacía

FUNCIONES BOOLEANAS [7] PARA LA MANIPULACIÓN DE SÍMBOLOS

		Ejemplo	
Función	*Significado*	*Instrucción*	*Resultado*
ATOM x	decidir si x es un átomo	(ATOM A)	T
NULL x	decidir si x es clase vacía	(NULL A)	F

---

[7] Estas funciones no son aritméticas, sino lógicas, y el valor que determinan no es, por tanto, numérico, sino lógico, es decir, veritativo: T (verdad) o F (falsedad).

EQ x, y	decidir si dos expresiones son idénticas	(EQ A B)	F
MEMBER x, y	decidir si x es un miembro o elemento de y	(MEMBER A (A B))	T

Expresiones condicionales en LISP. Las expresiones condicionales en LISP van precedidas por el operador de condición COND, seguido de una o más cadenas simbólicas cada una de las cuales contiene dos expresiones de grado arbitrario de complejidad: la primera de ellas denota una condición y la segunda el valor que hay que tener en cuenta en el caso de que dicha condición se cumpla. He aquí dos ejemplos de expresiones condicionales:

(COND (P E))
(COND (P E) (Q G) (R H))

La primera se interpreta así: «si la condición P es verdadera, tómese el valor de la expresión E». La segunda se interpreta de este modo: «si la condición P es verdadera, tómese el valor de la expresión E; en caso contrario, si la condición Q es verdadera, tómese el valor de la expresión G; y en caso contrario, si la condición R es verdadera, tómese el valor de la expresión H».

La ocurrencia del símbolo atómico T en el lugar de una condición dentro de una expresión condicional significa que la «condición» en cuestión es absoluta. Por ejemplo, la expresión condicional:

(COND (P Q) (T R))

se interpreta: «si la condición P es verdadera tómese el valor de la expresión Q; pero si P no es verdadera, entonces *en todo caso* (puesto que T no puede ofrecer duda alguna) tómese el valor de la expresión R».

La expresión condicional en LISP se acomoda, por tanto, al siguiente esquema formal:

$$[p_1 \rightarrow e_1; p_2 \rightarrow e_2; ...; p_n \rightarrow e_n]$$

Operador lambda. El símbolo atómico (lambda) en LISP procede del conocido cálculo lambda para definición de funciones ideado por CHURCH en 1941 y su sentido es el de un operador que liga las variables que han de servir de argumentos en una función. Por ejemplo, si se hace preceder la expresión funcional $y^2 + x$ del operador lambda ligando sus respectivos argumentos: $(x, y)\ y^2 + x$ queda precisado sin la menor ambigüedad el orden en el que deberán introducirse cualesquiera dos valores argumentales que se aduzcan.

La función DEFINE. La expresión DEFINE es un prefijo que antecede en LISP a una serie de funciones definidas en un programa.

Notación de las conectivas lógicas en LISP. Para denotar las conectivas lógicas se emplean las palabras inglesas NOT (negador), AND (conjuntor), OR (disyuntor),

IMPLIES (implicador), EQUIV (equivaledor), a manera de prefijo funcional, antecedentemente a los respectivos operandos.

Así

(NOT A)	representa	~ A
(AND A B)	representa	A & B
(OR A B)	representa	A ∨ B
(IMPLIES A B)	representa	A ⊃ B
(EQUIV A B)	representa	A ≡ B

Programa en lenguaje LISP *del algoritmo de Wang*

```
DEFINE((
(THEOREM (LAMBDA (S) (TH1 NIL NIL (CADR S) (CADDR S))))

(TH1     (LAMBDA (A1 A2 A C) (COND ((NULL A)
         (TH2 A1 A2 NIL NIL C)) (T
         (OR (MEMBER (CAR A) C) (COND ((ATOM (CAR A))
         (TH1) (COND ((MEMBER (CAR A) A1) A1)
         (T (CONS (CAR A) A1))) A2 (CDR A) C))
         (T (TH1 A1 (COND ((MEMBER (CAR A) A2) A2)
         (T (CONS (CAR A) A2))) (CDR A) C)))))))

(TH2     (LAMBDA (A1 A2 C1 C2 C) (COND
         ((NULL C) (TH A1 A2 C1 C2))
         ((ATOM (CAR C)) (TH2 A1 A2 (COND
         ((MEMBER (CAR C) C1) C1) (T
         (CONS (CAR C) C1))) C2 (CDR C)))
         (T (TH2 A1 A2 C1 (COND ((MEMBER
         (CAR C) C2) C2) (T (CONS (CAR C) C2)))
         (CDR C))))))

(TH      (LAMBDA (A1 A2 C1 C2) (COND ((NULL A2) (AND (NOT (NULL
         C2))
         (THR (CAR C2) A1 A2 C1 (CDR C2)))) (T (THL (CAR A2) A1 (CDR
         A2) C1 C2)))))

(THL     (LAMBDA (U A1 A2 C1 C2) (COND
         ((EQ (CAR U) (QUOTE NOT)) (TH1R (CADR U) A1 A2 C1 C2))
         ((EQ (CAR U) (QUOTE AND)) (TH2L (CDR U) A1 A2 C1 C2))
         ((EQ (CAR U) (QUOTE OR)) (AND (TH1L (CADR U) A1 A2 C1 C2)
         (TH1L (CADDR U) A1 A2 C1 C2) ))
         ((EQ (CAR U) (QUOTE IMPLIES)) (AND (TH1L (CADDR U) A1 A2
         C1 C2) (TH1R (CADR U) A1 A2 C1 C2) ))
         ((EQ (CAR U) (QUOTE EQUIV)) (AND (TH2L (CDR U) A1 A2 C1 C2)
         (TH2R (CDR U) A1 A2 C1 C2) ))
         (T (ERROR (LIST (QUOTE THL) U A1 A2 C1 C2)))
         )))
```

```
(THR     (LAMBDA (U A1 A2 C1 C2) (COND
         ((EQ (CAR U) (QUOTE NOT)) (TH1L (CADR U) A1 A2 C1 C2))
         ((EQ (CAR U) (QUOTE AND)) (AND (TH1R (CADR U) A1 A2 C1 C2)
         (TH1R (CADDR U) A1 A2 C1 C2) ))
         ((EQ (CAR U) (QUOTE OR)) (TH2R (CDR U) A1 A2 C1 C2))
         ((EQ (CAR U) (QUOTE IMPLIES)) (TH11 (CADR U) (CADDR U)

         A1 A2 C1 C2))
         ((EQ (CAR U) (QUOTE EQUIV)) (AND (TH11 (CADR U) (CADDR U)
         A1 A2 C1 C2) (TH11 (CADDR U) (CADR U) A1 A2 C1 C2) ))
         (T (ERROR (LIST (QUOTE THR) U A1 A2 C1 C2)))
         )))

(TH1L    (LAMBDA (V A1 A2 C1 C2) (COND
         ((ATOM V) (OR (MEMBER V C1)
         (TH (CONS V A1) A2 C1 C2) ))
         (T (OR (MEMBER V C2) (TH A1 (CONS V A2) C1 C2) ))
         )))

(TH1R    (LAMBDA (V A1 A2 C1 C2) (COND
         ((ATOM V) (OR (MEMBER V A1)
         (TH A1 A2 (CONS V C1) C2) ))
         (T (OR (MEMBER V A2) (TH A1 A2 C1 (CONS V C2))))
         )))

(TH2L    (LAMBDA (V A1 A2 C1 C2) (COND
         ((ATOM (CAR V)) (OR (MEMBER (CAR V) C1)
         (TH1L (CADR V) (CONS (CAR V) A1) A2 C1 C2)))
         (T (OR (MEMBER (CAR V) C2) (TH1L (CADR V) A1 (CONS (CAR
         V)
         A2) C1 C2)))
         )))

(TH2R    (LAMBDA (V A1 A2 C1 C2) (COND
         ((ATOM (CAR V) (OR (MEMBER (CAR V) A1)
         (TH1R (CADR V) A1 A2 (CONS (CAR V) C1) C2)))
         (T (OR (MEMBER (CAR V) A2) (TH1R (CADR V) A1 A2 C1
         (CONS (CAR V) C2))))
         )))

(TH11    (LAMBDA (V1 V2 A1 A2 C1 C2) (COND
         ((ATOM VI) (OR (MEMBER V1 C1) (TH1R V2 (CONS V1 A1) A2 C1
         C2)))
         (T (OR (MEMBER V1 C2) (TH1R V2 A1 (CONS V1 A2) C1 C2)))
         )))

TRACE ((THEOREM TH1 TH2 TH THL THR TH1L TH1R TH2L TH2R TH11))

THEOREM
   ((ARROW (P) ((OR P Q))))
```

UNTRACE ((THEOREM TH1 TH2 THR THL THIL THIR TH2L TH2R TH11))

THEOREM
((ARROW ((OR A (NOT B))) ((IMPLIES (AND P Q) (EQUIV P Q)))))

Comentario al programa en LISP del algoritmo de Wang

El programa consta de once subrutinas:

1. *theorem* (s)
2. *th*1 (*a*1; *a*2; *a*; *c*)
3. *th*2 (*a*1; *a*2; *c*1; *c*2; *c*)
4. *th* (*a*1; *a*2; *c*1; *e*2)
5. *thl* (*u*; *a*1; *a*2; *c*1; *c*2)
6. *thr* (*u*; *a*1; *a*2; *c*1; *c*2)
7. *th*1*l* (*v*; *a*1; *a*2; *c*1; *c*2)
8. *th*1*r* (*v*; *a*1; *a*2; *c*1; *c*2)
9. *th*2 (*v*; *a*1; *a*2; *c*1; *c*2)
10. *th*2*r* (v: *a*1; *a*2; *c*1; c2)
11. *th*11 (*v*1; *v*2; *a*1; *a*2; *c*1; *c*2)

La primera parte: *theorem(s)* es una función que decide el carácter teorema de la fórmula a deducir contestando al computador con una T (verdad) en caso positivo y con una F (falsedad) en caso negativo. En realidad, el momento en que esta función se resuelve definitivamente es al término de la ejecución del programa, después de que las otras diez subrutinas hayan funcionado cuantas veces fuera preciso en el análisis y reducción de la fórmula problema.

Las partes segunda y tercera: *th1* y *th2* analizan, respectivamente, cada uno de los dos campos del teorema, el antecedente (*a*) y el consecuente (*c*). En ambas tiene lugar la fijación de cuatro zonas de reserva en la memoria del computador en donde se registra, respectivamente, la lista de fórmulas atómicas (*a1*) *y* moleculares (*a2*) que vayan apareciendo en el antecedente y de fórmulas atómicas (*c1*) y moleculares (*c2*) que vayan apareciendo en el consecuente.

La parte *th1*, que analiza el campo del antecedente, hace lo siguiente: tras asegurarse de que el antecedente existe (en caso contrario, procede remitir a la rutina *th2*), selecciona la cabeza del mismo, comprueba inmediatamente si esa cabeza es ya un miembro del consecuente (en cuyo caso se tiene ya garantizado que la fórmula en cuestión es teorema), o no lo es, y en este último caso agrega dicha cabeza, si es una fórmula molecular, a la lista de fórmulas moleculares *a2* del antecedente (a no ser que ya estuviera en dicha lista). En cualquiera de ambos casos se vuelve a efectuar este mismo análisis sobre el resto del antecedente, y así sucesivamente hasta agotarlo.

La parte *th2* que analiza el campo del consecuente, tiene una estructura similar a la anterior *th1*, pero con la diferencia de que ahora se supone agotado el análisis del antecedente y de que, una vez queden completas las listas de fórmulas atómicas (*c1*) y moleculares (*c2*) del consecuente (es decir, cuando el análisis de éste haya llegado también a su fin) procede remitir a la parte cuarta, *th*.

La parte cuarta, *th*, ocupa un lugar central en el programa. Presupone el análisis realizado en ambos campos del teorema por las dos subrutinas precedentes, y, por tanto, la apertura de las cuatro listas de fórmulas atómicas y moleculares de antece-

dente y consiguiente. El papel de *th* consiste en seleccionar la primera fórmula molecular a descomponer. Si la lista de fórmulas moleculares (*a2*) del antecedente estuviese vacía, se selecciona la primera fórmula molecular de la lista correspondiente (*c2*) del consecuente (la cual queda desde ese momento, por así decirlo, descabezada o reducida al resto), y se la somete a la subrutina número seis, *thr*, de identificación de operador lógico principal de una fórmula en el consecuente. En caso contrario, se selecciona la primera fórmula molecular de la lista de fórmulas moleculares (*a2*) del antecedente (que queda igualmente reducida a su resto) y se la somete a la subrutina número cinco *thl*, que opera similarmente a la seis, pero en el antecedente.

Las partes quinta y sexta: *thl* y *thr* son subrutinas destinadas a identificar el operador lógico principal de la fórmula molecular a descomponer según que ésta proceda, respectivamente, del antecedente o del consecuente. Ambas tienen una estructura muy parecida. Dada la fórmula molecular a descomponer, *u*, se selecciona la cabeza de la misma (que será su principal operador lógico según el criterio adoptado de notación polaca), se averigua qué tipo de operador es (es decir, si se trata del negador, del conjuntor, del disyuntor, del implicador o del equivaledor), y se remite, según el caso, el resto de la fórmula a la correspondiente subrutina complementaria de eliminación del operador lógico identificado (subrutinas siete a once), especificando además si la eliminación de ese operador implica la reconstrucción de una (eliminación de negador y conjuntor en *thl* y de negador, disyuntor e implicador en *thr*) o de dos fórmulas previas (eliminación del disyuntor, implicador y equivaledor en *thl* y eliminación de conjuntor y equivaledor en *thr*).

Las partes séptima a undécima, *th1l*, *th1r*, *th2l*, *th2r* y *th1l*, tienen por misión llevar a término la descomposición de las distintas fórmulas moleculares, eliminando en ellas el operador lógico principal de acuerdo con las reglas del cálculo secuencial de Gentzen. En realidad, parte del contenido de estas reglas se encuentra ya en las subrutinas quinta y sexta, *thl* y *thr*, que indican si la fórmula molecular a descomponer procede de una o de dos fórmulas previas. Las subrutinas séptima a undécima se limitan a especificar cómo deben ser distribuidas la subfórmula o subfórmulas inmediatamente afectadas por el operador lógico ya eliminado en la fórmula molecular a descomponer. Convengamos en dar a tales subfórmulas el nombre de «distribuendo», que será simple cuando se trate de una sola fórmula y complejo cuando conste de un par de ellas. El efecto mecánico, de fácil computación, de las reglas de Gentzen, consiste sencillamente en el desplazamiento o ubicación en uno u otro campo, antecedente o consecuente, de los distribuendos de que se trate.

Las partes séptima y octava: *th1l* y *th1r* efectúan, respectivamente, la ubicación de un distribuendo simple, *v*, en el antecedente o en el consecuente. Salvo esta diferencia de campo en que haya de tener lugar la ubicación, ambas consisten en asegurarse primero de que el distribuendo en cuestión *v* no exista ya en la lista correspondiente del campo opuesto (en cuyo caso quedaría ya resuelto el problema) y efectuar luego la inserción de dicho distribuendo en la lista de fórmulas atómicas (si es átomo) o moleculares (si es molécula) del antecedente (subrutina *th1l*) o del consecuente (subrutina *th1r*), remitiendo a la subrutina cuarta, *th*, para que se seleccione la nueva fórmula molecular a descomponer. El uso de estas dos subrutinas viene exigido por la eliminación del negador, del disyuntor y del implicador en antecedente y por la eliminación del negador y del conjuntor en el consecuente.

Las partes novena y décima: *th2l* y *th2r*, efectúan el desplazamiento o ubicación de distribuendo complejo *v* (pareja de fórmulas), respectivamente, en el antecedente o en el consecuente. Ambas guardan también un cierto paralelismo. Su función consiste en preguntar inicialmente si el primer elemento del distribuendo (car (v), es de-

cir, la primera de las dos subfórmulas ligadas por el operador eliminado) forma parte ya, tanto si es átomo como si es molécula, de la lista correspondiente del campo opuesto (en cuyo caso el problema quedaría ya satisfactoriamente resuelto); si la respuesta a esta pregunta es negativa, se aloja dicho primer elemento del distribuendo en la lista que proceda y se somete el segundo elemento del distribuendo (cadr (v), es decir, la segunda de las dos subfórmulas ligadas por el operador eliminado) a la subrutina homóloga de ubicación de distribuendo simple *th1l* o *th1r*. La subrutina novena *th2l* viene exigida por la eliminación del conjuntor y del equivaledor en el antecedente, y la subrutina décima *th2r* por la eliminación del disyuntor en consecuente.

La undécima subrutina *th11* viene exigida por la eliminación del equivaledor en consecuente. Su finalidad es ubicar un distribuendo complejo (v_1, v_2) en el antecedente. Tras preguntar si el primer elemento del distribuendo v_1, sea átomo o molécula, figura ya también en la lista correspondiente del consecuente (con lo cual el problema quedaría resuelto), y en caso de que ello no suceda, ordena que dicho primer elemento del distribuendo sea alojado en la lista de fórmulas atómicas (si es átomo) o moleculares (si es molécula) del antecedente, y que el segundo elemento del distribuendo v_2 sea sometido a la subrutina octava *th1r*.

Los teoremas se introducen en el programa escribiéndolos de modo que el secuente o flecha preceda a la pareja de expresiones antecedente-consecuente. Así, por ejemplo, el teorema

$$\vdash . p \supset p \vee q$$

se escribiría en forma secuencial y en lenguaje LISP

[ARROW (P) ((OR P Q))]

La respuesta del computador a la función decisoria final *theorem (s)* es: T (verdad) en caso positivo y F (falsedad) en caso negativo.

B. Mecánica de la refutación

§ 1. *Lenguaje en forma clausular*

Bastante empleado en la confección de pruebas automáticas es el llamado *lenguaje de clásulas*, o lenguaje *en forma clausular* o *clausal*, que es sencillamente un modo de normalizar las fórmulas del lenguaje de primer orden. En el lenguaje en forma clausal no hay implicadores ni coimplicadores ni figuran explícitamente los cuantificadores.

Los métodos booleanos considerados en el capítulo anterior permiten traducir las fórmulas del lenguaje formal de primer orden a su forma clausal. Si las fórmulas de las que partimos pertenecen a la *lógica de enunciados*, la traducción se efectúa en los siguientes pasos (véase capítulo anterior, sección 2):

1. Eliminar implicadores y coimplicadores.
2. Normalizar negadores.
3. Obtener la forma normal conjuntiva de la fórmula o fórmulas en cuestión.
4. Simplificar esa forma normal dando en ella por sobreentendidos los conjuntores, lo cual se indicará o bien poniendo comas en su lugar, si las fórmulas se escriben en fila, una tras otra, o bien escribiendo esas fórmulas en columna, una debajo de otra. (Por lo demás, esto último es lo que usualmente se da también por entendido en el desarrollo de las pruebas no automatizadas, pues en ellas solemos considerar las premisas tácitamente vinculadas por una conjunción.)

Si las fórmulas a traducir son de *lógica de predicados*, su conversión a forma clausal se efectúa mediante los siguientes pasos:
1. Normalizar cuantificadores, colocándolos en situación de prefijo inicial de cada fórmula (véase el método de obtención de la formal normal prenexa de una fórmula en Capítulo XVI, sección 5).
2. Eliminar los cuantificadores existenciales. Esta operación se efectúa de acuerdo con una técnica de normalización debida al lógico noruego Thoralf SKOLEM (1887-1963). Si el cuantificador existencial no va precedido de ningún cuantificador universal que lo incluya en su alcance, puede ser eliminado sustituyendo su variable ligada por un parámetro o nombre nuevo de individuo (*constante de Skolem*). Si va precedido por uno o más cuantificadores universales que lo incluyen en su alcance, puede ser eliminado sustituyendo su variable ligada por un nombre nuevo de función cuyos argumentos sean la o las variables a las que afecten los referidos cuantificadores universales (*función de Skolem*). Por ejemplo:

$\bigvee x \bigwedge y\ Pxy$ puede reescribirse como $\bigwedge y\ Pay$
$\bigwedge x \bigvee y\ Pxy$ puede reescribirse como $\bigwedge x\ Pxf(x)$
$\bigwedge x \bigwedge y \bigvee z Pxyz$ puede reeescribirse así $\bigwedge x \bigwedge y\ Pxyf(x,y)$.

A este proceso se lo denomina *eskolemización*. Conviene advertir que la fórmula resultante no es lógicamente equivalente a la original, pero le es equivalente al menos en lo que podríamos llamar su potencialidad deductiva, o mejor quizá refutativa: si la fórmula original es inconsistente, y por tanto insatisfacible, también lo es la resultante y recíprocamente. Y eso basta a los efectos de la prueba por refutación.

3. Eliminar generalizadores. Los cuantificadores de tipo universal pueden ser omitidos dando por implícita o supuesta su presencia. La condición de las variables en cada fórmula no quedará afectada por esta convención si se sobreentiende que continúan ligadas por los cuantificadores omitidos.

Llamamos *cláusula* a toda fórmula o proposición del lenguaje clausal, y *literal* a toda fórmula atómica, vaya o no precedida de negación. Un literal y su negación (es decir, dos fórmulas atómicas contradictorias) constituyen un *par complementario*. Llamamos *positivo* al literal que no lleva negación y *negativo* al que la lleva.

Ejemplo. Si deseamos pasar a forma clausal el esquema de fórmula

$$\bigwedge x\ Px \longrightarrow \bigvee x\ Px,$$

podemos hacerlo en los siguientes pasos:

1.	$\neg \bigwedge x\ Px \lor \bigvee x\ Px$	(eliminación de implicador)
2.	$\neg \bigvee x\ \neg Px \lor \bigvee x\ Px$	(interiorización del negador)
3.	$\bigvee x\ (\neg Px \lor Px)$	(normalización del cuantificador)
4.	$\neg Pa \lor Pa$	(eskolemización)

Observaciones sobre notación en forma clausular:

1.ª Notación de predicados y términos. Cuando partamos de un texto escrito en lenguaje natural, podemos conservar en nuestras fórmulas las palabras correspondientes a predicados y relaciones, escribiéndolas en mayúsculas; y las correspondientes a sujetos y funciones, escribiéndolas en minúsculas.

Por ejemplo, las frases

el padre de Juan, la hermana de Juan,

que son funciones, se pueden escribir así:

PADRE (Juan), HERMANA (Juan),

y las frases

El padre de Juan es médico
Juan quiere a María,

que no son funciones, sino oraciones o proposiciones, pueden escribirse así:

MÉDICO (PADRE (Juan))
QUIERE (Juan, María).

2.ª Continuaremos con la convención seguida en este libro de emplear cursivas para el lenguaje objeto y letras normales para el metalenguaje (con excepción de los ejemplos de lenguaje informal).

3.ª Por comodidad tipográfica usaremos eventualmente «&» en lugar de «∧».

4.ª Supresión del disyuntor en las cláusulas. En adelante podemos convenir en utilizar eventualmente una coma en lugar del disyuntor y definir los límites externos de la cláusula encerrando entre llaves sus disyuntos. Así, en lugar de

$$P \vee Q \vee R$$

podemos escribir

$$\{P, Q, R\}.$$

Consecuentemente, en lugar de

$$P$$

escribiremos

$$\{P\}.$$

Y denotaremos por el conjunto vacío de cláusulas

$$\{\ \}$$

el resultado final o absurdo de una prueba por refutación.

5.ª En el lenguaje en forma clausular no se admite la redundancia

$$A \vee A,$$

que debe ser automáticamente corregida como

A.

§ 2. *El principio de resolución*

El lenguaje clausal es el contexto en que se aplica el *principio de resolución*. Este principio, introducido por J. A. ROBINSON en 1965, es la más eficiente de las reglas de inferencia utilizadas en deducción automática. Su objetivo es eliminar los pares complementarios de literales (contradicciones de proposiciones atómicas) en cualquier conjunto de cláusulas, y se lo puede formular así:

> dadas dos cláusulas, A y B, en cada una de las cuales comparezca una misma cláusula literal, negada en una de ellas y no negada en la otra, se puede inferir una nueva cláusula, C, denominada *resolvente*, que es la disyunción de lo que queda de A y B, después de haber eliminado en ellas el referido par complementario de cláusulas literales.

Si tenemos, por ejemplo, el conjunto de cláusulas

R ∨ S
P ∨ Q ∨ ¬ R ∨ T
¬ Q,

el principio de resolución permite eliminar de las dos primeras, obteniendo de ellas la correspondiente resolvente, el par complementario de literales R, ¬R:

S ∨ P ∨ Q ∨ T

y conjugando ahora esa cláusula resolvente con la última del conjunto original, o sea, con

¬ Q

vuelve a ser posible eliminar por el mismo principio un par comple-

mentario de literales, esta vez Q, ¬ Q, dando lugar a una nueva resolvente:

$$S \vee P \vee T.$$

Quizá ayude a visualizar la importancia del principio de resolución si se repara en que la traducción del *modus ponens* a lenguaje clausal da por resultado el *silogismo disyuntivo*, cuya semejanza estructural con el principio de resolución es obvia:

MP	**SD**
$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
A	A
B	B

Ejercicio. Traducir a lenguaje clausal las premisas de la deducción siguiente y obtener la conclusión de ellas aplicando el principio de resolución, que representaremos ocasionalmente (pues mientras utilicemos sólo esta regla no habría que anotarla) por **R**.

–1	$\neg p \rightarrow q$		1	$p \vee q$	
–2	$q \rightarrow r$		2	$\neg q \vee r$	
3	$\neg p$		3	$\neg p$	
4	q	**MP** 1,3	4	$\neg r$	
5	r	**MP** 2.4	5	$p \vee r$	**R** 1,2
6	$\neg p \rightarrow r$	**TD** 3,5	6	p	**R** 4,5
			7	{ }	**R** 3,6

§ 3. *Resolución en lógica cuantificacional*

El problema principal que ofrecen las fórmulas del cálculo cuantificacional para ser tratadas automáticamente por resolución es la presencia de variables. Para que la resolución pueda aplicarse a dos literales es preciso que la única diferencia entre ambos sea el negador. Por ejemplo, las expresiones Px y $\neg Pa$ no son inmediatamente resolubles, porque no constituyen un par complementario. Pero sí lo constituyen si sustituimos en la primera la variable x por la constante a.

a. *Sustitución*. La *sustitución* es una operación consistente en cambiar símbolos variables de individuo por términos. (Recordemos que un término puede ser una constante individual, otra variable individual o una función, que se compone de una letra funtorial y uno o más terminos como argumentos.) El cambio sustitucional debe efectuarse uniformemente, es decir, por el mismo término, en todas las ocurrencias de la variable sustituida en la cláusula donde tiene lugar la operación. La sustitución puede ser esquematizada así

v/t,

siendo «v» una variable y «t» un término. Cuando se la aplica a varias variables en una misma cláusula, el esquema puede ser

v/t, v'/t', v''/t''...,

tomando en todo caso la precaución de que el término sustituyente no incluya variables ya presentes en la cláusula en la que va a entrar. Por ejemplo, la sustitución *x/fy* es en principio correcta, puesto que cambia una variable por un término, pero no lo sería en el contexto de una cláusula como *Pxy* por lo que se acaba de indicar. Para evitar conflictos de este tipo cabe reescribir antes las variables de la cláusula o cláusulas en cuestión mediante el procedimiento de *mutación de variable ligada* (véase Cap. IX, apartado C, § 13).

Ejemplos. 1.º En la cláusula

$$Px \vee Qy \vee Rz$$

son viables las siguientes sustituciones:

(1) *y/f(w), z/a*, dando lugar a $Px \vee Qf(w) \vee Ra$
(2) *x/a, y/b, z/c*, dando lugar a $Pa \vee Qb \vee Rc$,

mientras que no lo serían ni *y/z* (a no ser que antes cambiásemos la cláusula original mudando en ella *z* por *w*) ni *z/y* (a no ser que antes reescribiésemos la cláusula original mudando en ella *y* por *w*).

b. *Unificación*. Pero el asunto se complica cuando nos enfrentamos con un conjunto de cláusulas que hay que transformar mediante una serie de sustituciones para poder aplicarles la resolución. Y aquí entra en juego el método de *unificación*.

Decimos que dos expresiones son *unificables* si hay alguna sustitución que permite convertirlas en idénticas, y llamamos *unificador* a la sustitución que lo consigue. Por ejemplo, las expresiones

x derrotó a y
Wellington derrotó a Napoleón,

son unificables, porque si se aplica a la primera la sustitución x/Wellington, y/Napoleón, ambas se tornan idénticas. Y si dispongo de una afirmación general como ésta:

Si x fue maestro de y, entonces y fue discípulo de x y de este dato particular:

Sócrates fue maestro de Platón,

una sencilla maniobra sustitutiva me permite aplicar el principio de resolución. Pongamos ambos asertos en forma clausular:

¬ MAESTRO (x,y) ∨ DISCÍPULO (y, x)
MAESTRO (Sócrates, Platón).

Aplicando a la primera la sustitución

x/Sócrates, y/Platón,

se logra unificar el literal negado en la cláusula superior con el literal positivo que es la cláusula inferior, y entonces el principio de resolución permite eliminar ese par complementario de literales, quedando como conclusión el resolvente:

Platón fue discípulo de Sócrates.

La clave de la aplicación del principio de resolución en lógica de predicados es precisamente la mecanización del método de unificación, que supone a su vez el dominio del cálculo de sustitución. La confección del *algoritmo de unificación* fue precisamente lo que permitió a Robinson poner en práctica con éxito su principio de resolución.

Este algoritmo se propone como meta hallar el *unificador general máximo* de dos expresiones. Para entender esto último conviene advertir que unas veces puede suceder que dos expresiones no sean

unificables (por ejemplo, los términos *f(f(x))* y *f(g(z))* no lo son, porque no existe una sustitución que logre convertirlos en sintácticamente idénticos) y otras puede suceder que haya más de un unificador (por ejemplo, las cláusulas *Qwz* y *Qwb* son unificables mediante la sustitución *z/b* y también mediante la sustitución *w/b*, *z/b*, en cuyo caso decimos que el primer unificador, que da por resultado *Qwb*, es más general que el segundo, que da por resultado *Qbb*, porque este último es susceptible de ser considerado como instancia o ejemplificación del anterior, o dicho de otro modo, porque podríamos obtener por sustitución el segundo a partir del primero, pero no al revés). Del conjunto de unificadores que pueden convertir a dos expresiones en sintácticamente idénticas es máximamente general el que conduce a un resultado capaz de dar lugar por sustitución a cualquiera de los resultados generables por cualquiera de los restantes unificadores.

Para obtener el unificador general máximo de dos expresiones A y B, hay que definir primero el *conjunto diferencial* de elementos discrepantes en cada una. Por ejemplo el conjunto diferencial de las expresiones

x derrotó a *y*
Wellington derrotó a Napoleón

está integrado por la serie de parejas simbólicas

{(*x*, Wellington), (*y*, Napoleón)}.

Una vez definido este conjunto, se tratará de reducirlo progresivamente por ensayos de sustitución (si ésta es posible) procurando siempre que las variables de los términos sustituyentes no entren en colisión con las que ya existan en la expresión en que se introducen.

c. *Resolución.* Una vez resuelto el problema de la unificación, procede aplicar el principio de resolución eliminando pares complementarios de literales. Lo normal es que se introduzca la negación de la conclusión deseada como *soporte inferencial* con vistas a una prueba por absurdo. En este primer ejemplo, sin embargo, por razones de claridad la conclusión se obtiene ostensiva o directamente.

Ejemplo. Berlusconi no ama a nadie. Pero, si el pueblo italiano ama a alguien, entonces alguien ama a Italia. Por tanto, el pueblo italiano no ama a Berlusconi.

Formalización:

$\neg$ AMA (Berlusconi, x)
AMA (PUEBLO (Italia), y) $\rightarrow$ AMA (y, Italia)

Forma clausular:

$\neg$ AMA (Berlusconi, x)
$\neg$ AMA (PUEBLO (Italia), y) $\vee$ AMA (y, Italia)

Unificación:

x/Italia, y/Berlusconi

Resolución:

1 ($\neg$ AMA (Berlusconi, Italia))
2. ($\neg$ AMA (PUEBLO (Italia), Berlusconi), AMA (Berlusconi, Italia)
3. ($\neg$ AMA (PUEBLO (Italia), Berlusconi))

Ejercicio. Obtener por resolución la conclusión del siguiente argumento (Chang):

$\bigvee x\ (Px\ \&\ \bigwedge y\ (Dy \rightarrow Lxy)),\ \bigwedge x\ (Px \rightarrow \bigwedge y\ (Qy \rightarrow \neg Lxy)) \vdash \bigwedge x\ (Dx \rightarrow \neg Qx)$

Eliminación de cuantificadores:

$Pa\ \&\ (Dy \rightarrow Lxy),\ Px \rightarrow (Qy \rightarrow \neg Lxy) \vdash Dx \rightarrow \neg Qx$

Eliminación de implicadores:

$Pa\ \&\ (\neg Qy \vee Lxy),\ \neg Px \vee \neg Qy \vee \neg Lxy \vdash \neg Dx \vee \neg Qx$

Omisión de conjuntores y disyuntores en las premisas:

1. $\{Pa\}$
2. $\{\neg Dy, Lxy\}$

3. $\{\neg Px, \neg Qy, \neg Lxy\}$

Negación de la conclusión:

4. $\{Dx\}$
5. $\{Qx\}$

Unificación y resolución:

1.	$\{Pa\}$	
2.	$\{\neg Db, Lab\}$	
3.	$\{\neg Pa, \neg Qb, \neg Lab\}$	
4.	$\{Db\}$	
5.	$\{Qb\}$	
6.	$\{Lab\}$	de 2 y 4
7.	$\{\neg Qb, \neg Lab\}$	de 1 y 3
8.	$\{\neg Lab\}$	de 5 y 7
9.	$\{\ \}$	de 6 y 8

§ 4. *El teorema de Herbrand*

El sistema de inferencia mecánica basado en el principio de resolución opera, como el método de las tablas semánticas, por refutación; y se diferencia de él por exigir la forma clausular a premisas y conclusiones. La garantía de la inferencia por resolución está en que si se parte de un conjunto de cláusulas que sea satisfacible, las que se deriven correctamente de dicho conjunto de acuerdo con ese principio son también satisfacibles. Y recíprocamente, si de un conjunto de cláusulas se deriva por ese mismo principio una contradicción, es porque el conjunto en cuestión es insatisfacible.

Un importante teorema elaborado por el lógico francés HERBRAND hacia los años treinta sirvió de fundamento teórico a ROBINSON para establecer que, si una fórmula es satisfacible, es posible calcular para las cláusulas correspondientes un determinado modelo, llamado «modelo de Herbrand», que las satisface. Si se demuestra por resolución que ese conjunto de cláusulas no tiene modelo de Herbrand, entonces la fórmula original no es satisfacible. Como el método de las tablas semánticas, el de resolución puede servir, por tanto, para establecer por refutación la validez o invalidez de cualquier inferencia en lógica de predicados.

§ 5. *Otras reglas de inferencia mecánica*

a. *Subsunción*. Una cláusula A *subsume* a otra cláusula B cuando hay una sustitución que permite obtener a ésta a partir de la primera. En nuestro anterior ejemplo la cláusula

DERROTÓ (*x*, *y*)

subsume a la cláusula

DERROTÓ (Wellington, Napoleón),

puesto que la segunda resulta de la primera si se sustituyen en ésta sus variables por los nombres propios de aquélla.

Esta regla permite eliminar cláusulas particulares, que quedan así subsumidas en otras más generales de las que proceden.

b. *Hiperresolución*. Esta regla de inferencia permite extraer una cláusula C sin literales negativos de un conjunto de ellas, de las cuales una, A, posee al menos un literal negativo y las restantes B, B', B''... constan sólo de literales positivos.

Ejemplo. Tratando por hiperresolución la siguiente base de datos:

$$\{\neg Pa, Qf(b), \neg Rxyt\}, \{Rxct, Qz\}, \{Pa\}, \{Sb\}$$

resulta como conclusión la cláusula de literales positivos

$$\{Qf(b), Sb\}.$$

c. *Paramodulación*. Dado un literal que predique la igualdad de dos términos, t y t', cualquiera de ellos puede ser reemplazado por su igual en el interior de cualquier fórmula. La *paramodulación* es una regla de reemplazo de identidades y se la puede formular así

$$\frac{\begin{array}{l}\text{IGUAL (t, t')}\\ \text{A (t)}\end{array}}{\text{A (t')}}$$

Ejercicio. Imaginemos que dos personas, sin tener a mano ningún libro de consulta ni tampoco demasiada cultura, discuten sobre autores y fechas de literatura inglesa y una de ellas afirma que:

> Mary Shelley, autora de *Frankenstein*, es bastante anterior a Robert Louis Stevenson, autor de *El extraño caso del Dr. Jekyll y Mr. Hyde*,

y para convencer a su interlocutor añade:

> lo puedo asegurar porque recuerdo bien que la autora de *Frankenstein* fue esposa del poeta Percy Bysse Shelley, amigo de lord Byron, y éste es anterior en varias generaciones al autor de *El extraño caso del Dr. Jekyll y Mr. Hyde*.

De este argumento se puede extraer mecánicamente la conclusión

> Mary Shelley es históricamente anterior a R. L. Stevenson

después de configurar con el modesto repertorio cultural aducido la siguiente *base de datos* o conjunto de premisas:

HECHOS

> Mary Shelley es la autora de *Frankenstein*
> R. L. Stevenson es autor de *Jekyll y Hyde*
> La autora de *Frankenstein* fue esposa de P. B. Shelley
> P. B. Shelley fue amigo de lord Byron
> Lord Byron es anterior al autor de *Jekyll y Hyde*

ASERCIONES GENERALES

Si un hombre es históricamente anterior a otro, también lo será la mujer que estuviera casada con un amigo del primero. En lenguaje semiformal de primer orden esto se simbolizaría:

$\Lambda xyzv$ (ANTERIOR(x, y) & AMIGO(x) = z & ESPOSA(z)= v $\rightarrow$ ANTERIOR(v, y).

TRADUCCIÓN A LENGUAJE EN FORMA CLAUSAL

HECHOS

(1) {M-Shelley = AUTOR (Frankenstein)}
(2) {Stevenson = AUTOR (Jekyll & Hyde)}
(3) {ESPOSA (P-Shelley) = AUTOR (Frankenstein)}

(4) {AMIGO (Byron) = P-Shelley}
(5) {ANTERIOR (Byron, AUTOR (Jekyll & Hyde))}

ASERCIONES GENERALES

(6) {¬ANTERIOR(x,y),¬AMIGO(x) = z, ¬ESPOSA(x) = v, ANTERIOR (v,y)}

DEDUCCIÓN POR RESOLUCIÓN

(7) {¬ ANTERIOR (M-Shelley, Stevenson)}, **negac.conclusión**
(8) {¬ ANTERIOR(Byron, Stevenson), ¬ AMIGO(Byron) = P-Shelley, ¬ ESPOSA(P. Shelley) = M-Shelley, ANTERIOR (M-Shellev, Stevenson)} **Sust** 6 x/Byr, y/Stev, z/P-Shell, v/M-Shell
(9) {ANTERIOR (Byron, Stevenson)} **Par** 5,2
(10) {¬ AMIGO(Byron) = P-Shelley, ¬ ESPOSA(P-Shelley) = M-Shelley, ANTERIOR (M-Shelley, Stevenson)} **R** 8,5
(11) {¬ ESPOSA(P-Shelley) = M-Shelley, ANTERIOR (M-Shelley, Stevenson)} **R** 9, 3
(12) {ESPOSA (P-Shelley) = M-Shelley} **Par** 10, 1
(13) {ANTERIOR (M-Shelley, Stevenson)} **R** 11, 12
(14) { } **R** 13,7

La cláusula vacía, { }, indica que el proceso deductivo ha conducido finalmente a contradicción. La conclusión

ANTERIOR (M-Shelley, Stevenson)

queda establecida tras utilizar como soporte inferencial la hipótesis de su negación.

d. *Demodulación*. La riqueza de descripciones puede hacer conceptualmente más sutil o literariamente más elegante un lenguaje, pero puede también dificultar su tratamiento mecánico. La regla de *demodulación* depura a este fin un texto de su redundancia semántica.

Si en el ejemplo anterior se añade por demodulación a las premisas

3. {ESPOSA (P. Shelley) = AUTOR (Frankenstein)}

5. {ANTERIOR (Byron, AUTOR (Jekyll & Hyde))}

las correspondientes líneas derivadas

3' {ESPOSA (P-Shelley) = M-Shelley}
5' {ANTERIOR (Byron, Stevenson)},

no sólo sobran las líneas 9 y 12, introducidas por paramodulación, sino que se facilita el proceso deductivo.

(El lector puede advertir que la simbolización de la línea de generalidad 6 hubiera sido más compleja si se hubiera respetado en ella, en lugar de suprimirla, la redundancia semántica presente en la formulación del argumento en lenguaje ordinario.)

Ejercicio. El popular *puzzle de los misioneros y los caníbales* es un ejemplo clásico en los manuales de inteligencia artificial y de razonamiento automático. Un grupo de seis personas, tres misioneros y tres caníbales, han de atravesar un río en una barca donde sólo caben dos, con la dificultad añadida de que se teme que si en algún momento, en cualquiera de las dos orillas, hay menos misioneros que caníbales, el instinto atávico de éstos los invite a nutrirse de sus salvadores.

Imaginemos que el punto de partida es la orilla izquierda. La solución popularmente dada en el análisis intuitivo del problema se puede dividir en tres fases:

1) desplazar provisionalmente los tres caníbales a la derecha (lo cual se logra en tres viajes, haciendo que vayan primero dos a esa orilla y luego vuelva uno de ellos para recoger al tercero);

	Orilla izqda.	*Dirección del viaje*	*Orilla derecha*
Situación inicial:	**mmm ccc**		
Primer viaje:	**mmm c**	**cc >**	
Segundo viaje:	**mmm c**	**< c**	**c**
Tercer viaje:	**mmm**	**cc >**	**c**

2) desplazar ahora a la derecha a los tres misioneros, combinándolos eventualmente con caníbales en sus viajes para evitar situaciones de riesgo (lo cual se logra en cuatro viajes: uno de los caníbales vuelve con la barca a la izquierda, pasan dos misioneros a la

derecha, retorna la barca a la izquierda, esta vez con un misionero y un caníbal, y en el viaje final de esta fase se repite el desplazamiento de dos misioneros a la derecha):

Cuarto viaje:	**mmm**	**< c**	**cc**
Quinto viaje	**m c**	**mm >**	**cc**
Sexto viaje:	**m c**	**< mc**	**m c**
Séptimo viaje:	**cc**	**mm >**	**m c**

3) desplazar definitivamente a la derecha los dos caníbales restantes, volviendo primero a por ellos el que está en esa orilla:

Octavo viaje:	**cc**	**< c**	**mmm**
Noveno viaje:	**c**	**cc >**	**mmm**
Décimo viaje:	**c**	**< c**	**mmm c**
Undécimo viaje:		**cc >**	**mmm c**
Situación final:			**mmm ccc**

Para someter este razonamiento a un proceso resolutorio mecánico tramitable por ordenador hay que definir primero, como en el proceso intuitivo, la situación inicial y la final, que es la meta que se pretende alcanzar; pero inmediatamente después hay que olvidarse del procedimiento intuitivo y proceder a la enumeración de los distintos tipos posibles de situaciones y de tránsito entre ellas, especificando además las condiciones de riesgo que obligan a excluir determinadas situaciones para evitar el festín de los caníbales.

El formato adecuado de representación de las situaciones con vistas a su procesamiento mecánico es el lenguaje de cláusulas. El esquema general de una situación puede consistir en un predicado triádico, *S*, cuyos tres argumentos son: quién hay en la orilla izquierda, en qué lado está la barca, y quién hay en la orilla derecha.

Siendo *S*, situación; *I*, izquierda; *m*, misionero; *c*, caníbal; *B*, barca, cuya posición indica un asterisco; y *D*, derecha, la situación inicial quedaría simbolizada así (cfr. WOS, *Automated Reasoning*, Cap. 5).

$$S(I\,(m(3), c(3)), {*B}, D(m(0), c(0))).$$

Las funciones $m(3)$ y $c(0)$ deben leerse, respectivamente, como : «el número de misioneros es 3» y «el número de caníbales es 0». La re-

lación de tránsito inmediato posible de una situación a otra se representará como una implicación: $S \rightarrow S'$ escrita en forma clausal:

$$\neg S \vee S',$$

o economizando símbolos lógicos:

$$\{\neg S, S'\}.$$

Por ejemplo, el tránsito de la situación inicial (los seis individuos están en la orilla izquierda), a la situación que resulta de un primer viaje posible consistente en que dos caníbales crucen a la orilla derecha, puede escribirse:

$$\{\neg S(I(m(3),c(3)),{}^*B,D(m(0),c(0))),S(I(m(3),c(1),B^*,D(m(0),c(2)))\}$$

La cláusula primera, anterior a la coma principal, es la negación de la situación antecedente; la cláusula segunda, posterior a esa coma, es la situación subsiguiente al desplazamiento. Es obvio que en este caso la primera cláusula de la disyunción es idéntica, exceptuando el negador, a la cláusula enunciativa de la situación inicial del puzzle. Puede ser, por tanto, eliminada con ella por resolución, quedando como clásula resultante o resolvente el segundo extremo de la disyunción, por el que se declara que continúan en la orilla izquierda tres misioneros y un caníbal mientras a la derecha, donde ahora está la barca, han pasado dos caníbales:

$$\{S(I(m(3), c(1)), B^*, D(m(0), c(2)))\}.$$

Pero la resolución por ordenador es automática, no intuitiva, y se efectúa explorando sistemáticamente alternativas unificables. Esto plantea tres tareas: una es confeccionar la lista de alternativas; otra es representar dichas alternativas con ayuda de un juego adecuado de variables que permita a la máquina llevar a cabo con éxito los ensayos exploratorios de unificación; y la tercera es redactar un catálogo de situaciones prohibidas para evitar la superioridad numérica de caníbales en alguna orilla.

En lo que concierne a la primera tarea, son diez los tránsitos posibles para los seis individuos del puzzle según que la barca viaje a la derecha o a la izquierda y según que suban a ella dos misioneros,

dos caníbales, un misionero y un caníbal, un misionero solo o un caníbal solo.

En lo que respecta a la preparación del juego de variables conviene tener en cuenta que los cambios más relevantes afectan a las funciones $m(x)$ y $c(y)$, cuyo valor es, respectivamente, el número de misioneros y el número de caníbales, un valor que, a su vez, puede ser distinto en cada situación y también según que se trate de la orilla izquierda o la derecha. Hay que disponer, por tanto, de cuatro variables en cada situación: dos para las funciones m y c en la orilla izquierda y otras dos para la derecha. Por otra parte el conjunto de valores que pueden tomar cada una de estas variables se reduce a las constantes: 1, 2, 3. El aumento o disminución de valor que pueden experimentar las citadas funciones en el tránsito de una situación a otra es representable, como advierte WOS, por la función sucesor, siendo

1 el sucesor de 0, en símbolos formales: $0'$,
2 el sucesor de 1, en símbolos formales: $0''$,
y 3 el sucesor de 2, en símbolos formales: $0'''$.

De acuerdo con este criterio describirán los diez tipos de tránsito las cláusulas de transporte que siguen a continuación, precedidas de la situación original, reescrita ahora con las indicadas precisiones de notación. Para economizar espacio se suprimen los paréntesis correspondientes a los argumentos de las funciones m y v; y para facilitar la lectura se destacan con caracteres en negrita los aspectos relevantes de cada situación en cada tránsito.

Situación original:
(1) $\{S(I(\mathbf{m0'''}, \mathbf{c0'''}), {}^*B, D(m0, c0))\}$
Transporte de dos misioneros a la derecha:
(2) $\{\neg S(I(\mathbf{mx''},cy),{}^*B,D(mz,cw)), S(I(mx,cy),B^*,D(\mathbf{mz''},cw))\}$
Transporte de dos misioneros a la izquierda:
(3) $\{\neg S(I(mx,cy),B^*,D(\mathbf{mz''},cw)), S(I(\mathbf{mx''},cy),{}^*B,D(mz,cw))\}$
Transporte de un misionero a la derecha:
(4) $\{\neg S(I(\mathbf{mx'},cy),{}^*B,D(mz,cw)), S(I(mx,cy),B^*,D(\mathbf{mz'},cw))\}$
Transporte de un misionero a la izquierda:
(5) $\{\neg S(I(mx,cy),B^*,D(\mathbf{mz'},cw)), S(I(\mathbf{mx'},cy),{}^*B,D(mz,cw))\}$
Transporte de dos caníbales a la derecha:
(6) $\{\neg S(I(mx,\mathbf{cy''}),{}^*B,D(mz.cw)), S(I(mx,cy),B^*,D(mz,\mathbf{cw''}))\}$
Transporte de dos caníbales a la izquierda:

(7) {¬ *S*(*I*(*mx*,*cy*),*B**,*D*(*mz*,**cw''**)), *S*(*I*(*mx*,**cy''**),**B*,*D*(*mz*,*cw*))}
Transporte de un caníbal a la derecha:
(8) {¬ *S*(*I*(*mx*,**cy'**),**B*,*D*(*mz*,*cw*)), *S*(*I*(*mx*,*cy*),*B**,*D*(*mz*,**cw'**))}
Transporte de un caníbal a la izquierda:
(9) {¬ *S*(*I*(*mx*,*cy*),*B**,*D*(*mz*,**cw'**)), *S*(*I*(*mx*,**cy'**),**B*,*D*(*mz*,*cw*))}
Transporte de un misionero y un caníbal a la derecha:
(10) {¬ *S*(*I*(**mx'**,**cy'**),**B*,*D*(*mz*,*cw*)), *S*(*I*(*mx*,*cy*),*B**,*D*(**mz'**,**cw'**))}
Transporte de un misionero y un caníbal a la izquierda:
(11) {¬ *S*(*I*(*mx*,*cy*),*B**,*D*(**mz'**,**cw'**)), *S*(*I*(**mx'**,**y'**),**B*,*D*(*mz*,*cw*))}

De las anteriores cláusulas debe obtenerse por resolución la meta deseada (las seis personas reunidas en la orilla derecha). Y la negación de esa meta puede funcionar como conjunto de soporte en la prueba por refutación:

(12) **{¬ S(I(m0,c0),B*,D(m0''',c0'''))}**

La tercera de las tres tareas anteriormente mencionadas es la redacción de las cláusulas generales de restricción que proscriben las situaciones de riesgo, eliminándolas por subsunción:

R1 {*S* (*I*(**mx'**, **cx''**), *y*, *D*(*z*, *w*))}
R2 {*S* (*I*(**mx'**, **cx'''**), *y*, *D*(*z*, *w*))}
R3 {*S* (*I*(*x*, *y*), *z*, *D*(**mw'**,**cw''**))}
R4 {*S* (*I*(*x*, *y*), *z*, *D*(**mw'**, **cw'''**))}

* CAPÍTULO XX [1]

LÓGICA Y REPRESENTACIÓN DEL CONOCIMIENTO

§ 1. *Lógica, inteligencia artificial e ingeniería del conocimiento*

En el Capítulo XVIII de este libro se ha estudiado el análisis lógico que hizo Alan TURING en los años treinta del concepto de computabilidad antes de que hubieran venido al mundo los computadores. Su máquina universal se anticipó a ellos en algunos años, porque es ya, virtualmente, un computador.

En ese mismo capítulo se ha hecho también referencia a la hipótesis con que TURING escandalizó en 1950 a sus contemporáneos al sostener que un ordenador convenientemente programado puede resolver todos los problemas que pueda resolver la mente humana. Esa hipótesis ha inspirado el desarrollo del área de conocimiento denominada *inteligencia artificial*, que empezó a cultivarse en Norteamérica muy pocos años después y constituye uno de los más interesantes campos de aplicación de la lógica a la informática.

El objetivo principal de la inteligencia artificial es simular mediante programas de ordenador las tareas que realiza la mente humana. En el Capítulo XX se ha estudiado cómo puede ser simulada de ese modo la tarea del razonamiento. En este capítulo, que puede ser caracterizado con más propiedad que los anteriores de un ejercicio de lógica aplicada, estudiaremos, más concretamente, cómo se puede explotar en la práctica el hecho de que los ordenadores simulen nuestra capacidad de inferencia lógica.

En la década de los cincuenta las tareas inteligentes que logró simular el ordenador eran de carácter lógico-formal, como el juego de ajedrez o la prueba automática de teoremas. Fue un avance de los años sesenta la comprobación de que enriqueciendo la memoria del computador con información semántica los resultados obtenidos eran más espectaculares. Por ejemplo, un programa famoso de aquellos años, el programa STUDENT, alimentado con un diccionario de

---

[1] Este capítulo ha sido escrito por Carmen GARCÍA TREVIJANO.

palabras y reglas gramaticales además de las aritméticas, logró resolver los problemas que un niño resuelve en su escuela, partiendo como él de planteamientos expresados en lenguaje natural. También tuvieron éxito por entonces los primeros intentos de almacenar en la memoria del ordenador grandes cantidades de información organizada lógicamente mediante «redes semánticas», que facilitaban su recorrido.

Un paso más ambicioso fueron los intentos de simular, no sólo la capacidad abstracta de deducir de cualquier individuo humano, sino el saber real y concreto de una persona socialmente considerada como experto o especialista, como es el caso, por ejemplo, del ingeniero o el médico. Este saber se compone de varios ingredientes. Uno es la lógica. Otro es la información concreta sobre un dominio de la realidad, que el experto humano almacena en parte en su memoria y en parte en su biblioteca o en su laboratorio. Y otro sería un conjunto de reglas prácticas que uno aprende por experiencia y que, sobreañadidas a su capacidad lógica, le permiten dar, cuando se le plantean preguntas de su especialidad y siempre dentro de un contexto de probabilidad o de incertidumbre, respuestas interesantes que la gente aprecia pagándole por ellas.

Los intentos de simular en ordenador esa síntesis de lógica, experiencia e inventiva que es el caudal activo del conocimiento de un profesional han tenido por resultado la creación de los *sistemas expertos*, programas de computador extraordinariamente complejos que pretenden suplir o eventualmente complementar el diagnóstico de un ingeniero que investiga pozos de petróleos o el de un médico que investiga a un paciente.

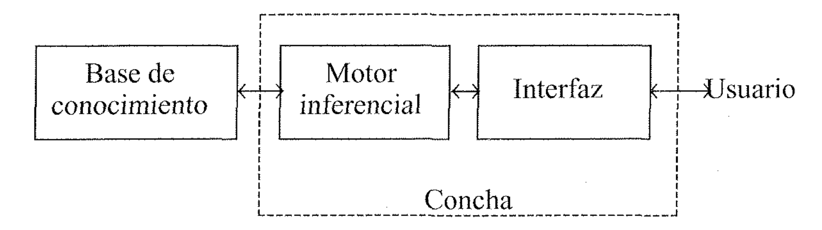
Si las ciencias se dividen en puras y aplicadas, la lógica pertenece a las primeras y la inteligencia artificial a las segundas. Pero a su vez la inteligencia artificial puede ser considerada como una ciencia pura si se la compara con la *ingeniería del conocimiento*, que es el nombre que recibe el área de trabajo de la informática que tiene por objetivo la construcción de sistemas expertos.

§ 2. *Estructura y función de un sistema experto*

FEIGENBAUM define un sistema experto como un programa «inteligente» que utiliza conocimiento especializado y procedimientos de inferencia para resolver problemas de un área determinada al modo como lo hace un especialista humano.

La complejidad de tareas de un sistema experto es fruto de la cooperación de las tres unidades o módulos que lo componen, formando una estructura reflejada en este esquema:

FIGURA 1. Estructura de un sistema experto.
[Tomada de I. BRATKO, *PROLOG Programming for Artificial Intelligence*, Addison-Wesley, Wokingham (Inglaterra), 1986.]



La *base de conocimiento* almacena información específica de un determinado dominio o campo de aplicación. Esta información incluye: 1) simples hechos del dominio, 2) reglas que describen relaciones y fenómenos propios de dicho dominio, y 3) también métodos, heurísticas e ideas que faciliten la búsqueda de soluciones.

El *motor inferencial* es la pieza de programa encargada de organizar y controlar la marcha del razonamiento y de tomar las decisiones oportunas. Su contenido es un conjunto de reglas o, por mejor decir, metarreglas vacías de información específica, puesto que la información real que necesite la extraerá de su base de conocimiento o directamente del usuario.

La *unidad de comunicación* o *interfaz* es la porción de programa que establece el contacto entre el sistema experto y la persona que acude a él para utilizarlo. También pone en mutuo contacto los diversos componentes del sistema.

Los tres módulos forman una sola unidad funcional, pero son claramente separables. Como el contenido material del conocimiento está sólo en el primer modulo y los otros dos, el motor inferencial y la unidad de comunicación, son independientes de dicho contenido, se los puede considerar como acoplados en un único módulo «formal» al que se denomina *concha*, enmarcada en el gráfico por la línea discontinua. La concha es netamente separable de la base de conocimiento y susceptible, en principio, de ser aplicada a otras bases con otro contenido.

En lo que queda de este capítulo consideraré: 1) qué función

puede cumplir la lógica en la confección de bases de conocimiento; 2) qué es y cómo funciona un motor inferencial; y 3) analizaré el diseño de un popular juego de adivinanzas, fácil de adquirir en el mercado de programas de ordenador, que es una especie de «embrión» de sistema experto.

§ 3. *Métodos de representación del conocimiento*

La lógica no se reduce a la teoría de la inferencia, aunque esa sea su parte principal. La ordenación racional de nuestro conocimiento del mundo es también competencia de la lógica. La doctrina de las categorías, que forma parte del *Organon* de Aristóteles y de la lógica trascendental de KANT, son presupuesto y complemento de la lógica formal como teoría de la inferencia.

Un ejemplo práctico muy actual de la relación de complementaridad entre la ordenación racional del conocimiento y la teoría de la inferencia la ofrece la relación entre las dos partes fundamentales de los sistemas expertos, que son también las más interesantes desde un punto de vista lógico.

De un lado está la llamada *base de conocimiento* que si se diferencia de las bases de datos convencionales, ya clásicas en informática, es porque en ella el conocimiento almacenado está organizado con un criterio de racionalidad máximo, con el objetivo de que refleje la realidad de la manera más fiel posible pero poniendo al mismo tiempo de relieve las estructuras categoriales y las diferencias entre lo general y lo particular de manera que facilite su inspección lógica.

De otro lado está el *motor inferencial*, un programa de obtención mecánica de consecuencias que, conectado con la base de conocimiento, permite que el sistema experto conteste con respuestas interesantes a las preguntas que formule el usuario.

La confección de bases de conocimiento, esto es, del almacenamiento de grandes cantidades de información organizadas de forma que sea lógicamente fácil acceder a ellas, plantea el problema previo de confeccionar metódicamente el plan de esa organización. Así es como ha surgido recientemente un área nueva de investigación denominada *representación del conocimiento.*

Los principales métodos de que se vale la investigación en representación del conocimiento son la lógica de predicados, los árboles jerárquicos, las redes semánticas, los marcos, y las reglas de producción.

En la medida en que constituye un marco ideal para exponer nuestras teorías sobre el mundo, la lógica de predicados constituye una herramienta excelente para la representación del conocimiento. De hecho, uno de los lenguajes de programación más importantes en inteligencia artificial es el PROLOG (abreviatura de «programación lógica»), inspirado en el modelo de la lógica de predicados. Pero de la importancia de la lógica de predicados para el procesamiento racional de información en los ordenadores se ha tratado ya en los dos capítulos anteriores. Yo consideraré aquí más explícitamente los otros métodos de representación del conocimiento, empezando por las redes semánticas.

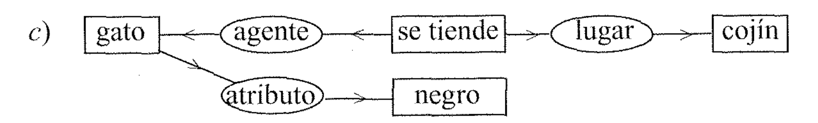
a. *Grafos, redes semánticas y árboles jerárquicos*. Fue Charles Sanders PEIRCE, uno de los grandes fundadores de la lógica simbólica, quien concibió y desarrolló la idea de representar las estructuras lógicas mediante *grafos* e *iconos*. Muchos aspectos de esas estructuras que el criterio extensional del lenguaje formal de primer orden deja fuera de consideración, como es el caso de la comprensión o «intensión» de predicados y relaciones, son recuperados gracias a la técnica de grafos.

Inspirándose en PEIRCE, J. F. SOWA ha elaborado recientemente un sistema de *grafos conceptuales* de términos y relaciones que permite representar toda clase de circunstancias y modos lingüísticos que matizan o enriquecen el sentido de una proposición. Las figuras adjuntas ilustran el método de Sowa.

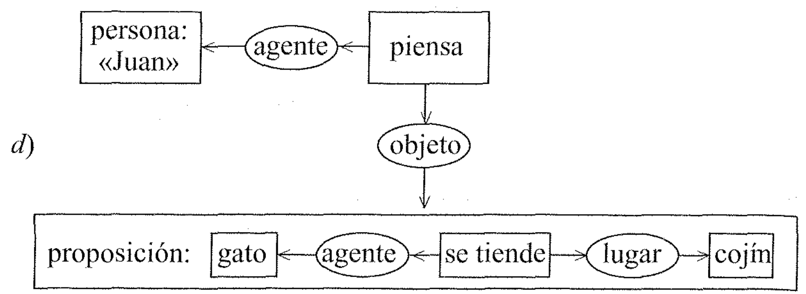
FIGURA 2. Grafos conceptuales de Sowa.



Una caja cuadrada puede alojar un predicado típico, pero también aludir simultáneamente a una individualidad.



La proposición sobre el hecho de que un gato negro se tienda en un cojín puede expresar además en un grafo de Sowa la circunstancia de que el color de un felino es atributo suyo o cuál es el agente responsable de la acción.



La hipótesis de que el hecho de que un gato se tienda en un cojín fuera objeto de consideración de alguien también puede ser representada por un grafo conceptual.

Los elementos relevantes del contenido conceptual de una proposición figuran en el interior de cajas cuadradas, que puedan alojar un predicado típico (por ejemplo, «gato»), pero también una precisión que aluda a su individualidad (por ejemplo, «Dina», nombre propio del conocido gato de Alicia). Las circunstancias y relaciones de carácter sintáctico o semántico que acompañan a esos elementos van indicadas en óvalos. La proposición sobre el hecho de que un gato negro se tienda en un cojín puede expresar además en un grafo de Sowa la circunstancia de que el color de un felino es atributo suyo o cuál es el agente responsable de la acción. La hipótesis de que ese hecho fuera objeto de consideración de alguien también puede ser representado por un grafo conceptual.

La iconografía de Sowa es un ejemplo privilegiado del método de representación del conocimiento mediante *redes semánticas*, que intentan capturar información real sobre el mundo insertando a sus objetos en un entramado de conexiones que definen su significado. Las redes semánticas han sido ampliamente utilizadas en Inteligencia Artificial desde que Ross QUILLIAN las introdujera en 1966 como respuesta a la cuestión central de su tesis doctoral: «¿Qué tipo de formato representacional puede permitirnos almacenar los *significados* de las palabras, a fin de poder usar esos significados tal y como los usa la gente?»

Un ejemplo (extraído de la popular obra sobre sistemas expertos de HARMON y KING[2]) del peculiar método de recolección de datos del detective Sherlock Holmes servirá para ilustrar la manera de dar significado a los objetos mediante el simbolismo de una red semántica. El fragmento literario es parte de la situación con que se inicia la novela *La liga*

---

[2] Paul HARMON y David KING, *Sistemas expertos. Aplicaciones de la Inteligencia Artificial en la actividad empresarial*, Díaz de Santos, Madrid, 1988.

de los pelirrojos. Mientras Sherlock Holmes atiende a la historia que le cuenta un visitante, su ayudante, el Dr. Watson, se afana en obtener del aspecto externo del personaje algún dato que le informe sobre la condición del desconocido huesped. Como cabía esperar, Watson fracasa en su intento; pero las manifestaciones de Holmes dejan boquiabierto al mismísimo Sr. Wilson, su visitante de turno:

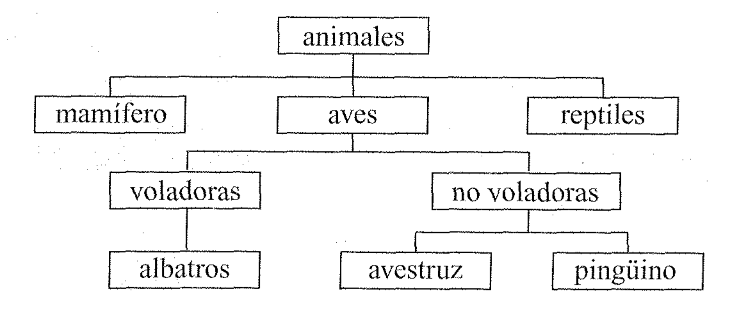
> — Aparte de los hechos obvios de que el Sr. Wilson ha trabajado manualmente durante algún tiempo, de que ha estado en China, y de que últimamente ha escrito mucho, no puedo deducir nada más...
> — Pero ¿cómo...? —pregunta sorprendido el propio Wilson—.
> — Sus manos, estimado señor. Su mano derecha es un poco más grande que la izquierda. Seguramente ha trabajado usted con ella y los músculos se le han desarrollado más... El pez que tiene tatuado justo encima de su muñeca sólo puede proceder de China. Esa pintura de las escamas de un delicado rosa es muy peculiar de allí... y... ¿Qué otra cosa puede indicar esa bocamanga derecha raída y brillante, y esa manga izquierda desgastada por el codo en el que se apoya sobre la mesa cuando escribe...?

FIGURA 3. Red semántica.

Como podrá observarse, la red no sólo capta los hechos y relaciones mencionados por Holmes, sino también algunos de los datos implícitos (como «todo hombre tiene un cuerpo con dos brazos», o «una manga es parte de una chaqueta») que todos los hombres utilizan tácitamente, pero que una máquina ignoraría si no se los explicitara.

En toda red distinguimos, con terminología de la actual teoría matemática general de grafos, puntos cruciales o *nodos* y *arcos* que los conectan entre sí. Los primeros representan a los objetos, mientras que los arcos expresan propiedades y relaciones que conectan a unos objetos con otros. En sus versiones más sencillas, como puede observarse en la figura adjunta, estas relaciones son del tipo «es un», «es una instancia de», «tiene», «es parte de», etc.

El *árbol jerárquico* tiene su ejemplo más ilustre en la célebre clasificación botánica de Linneo siguiendo el método de definición por género y diferencia que se remonta a Aristóteles (y que dio lugar en la antigüedad al llamado «árbol de Porfirio», que clasificaba los objetos del universo según la doctrina de las categorías aristotélicas). Llamamos árbol jerárquico a un esquema de estructura arbórea con nudos, ramas y hojas. En su forma invertida comienza por un nudo superior o nudo-raíz que contiene el objeto o categoría más general; las ramas que de él descienden lo conectan con otros nudos menos generales que a su vez se ramifican hacia otros nudos; este proceso de generalidad descendente, que tiene la virtud de hacer que los conceptos situados en puntos inferiores hereden las notas de los conceptos superiores a los que se subordinan, continúa hasta acabar en las hojas o elementos terminales, que ya no admiten más ramificación. La siguiente figura muestra el despliegue de una de las ramas de un árbol de clasificación en géneros y especies de una parcela del mundo animal que luego consideraremos más despacio como estructura arbórea:



Además de ser tal vez la forma más simple e intuitiva de representar el conocimiento, el árbol posee la ventaja añadida, explotada por Aristóteles en su teoría de las categorías, de prefigurar la marcha de la inferencia. El lector familiarizado con la deducción por redes semánticas, que revisten la forma de un árbol lógico, lo sabe por experiencia. Un ejemplo de la interacción entre la representación arbórea del razonamiento y la marcha de un motor inferencial lo encontraremos en el minisistema analizado en la sección 5 de este Capítulo.

b. *Marcos*. La idea de organizar la percepción en un todo unitario sirve de telón de fondo a un famoso e influyente artículo de Marvin MINSKY, «A Framework for Representing Knowledge» [«Un marco para representar el conocimiento», 1975] que ha marcado un hito en la reciente historia de la inteligencia artificial.

Contra la excesiva tendencia a representar el conocimiento como colecciones de simples fragmentos separados, MINSKY defiende la idea de organizar la representación en «bloques» mayores y articularlos con una estructura mejor diseñada. Como instrumento adecuado para producirla propone al «marco», o esquema de representación estructurada de objetos y de la interacción de estructuras objetivas.

La esencia de esta teoría —escribe el propio MINSKY— es que cuando uno se enfrenta con una nueva situación extrae de su memoria una estructura sustancial llamada marco. Es una especie de trama o entramado que uno recuerda de experiencias pasadas y que le sirve para poder adaptarse a la realidad con que se enfrenta, cambiando los detalles si es preciso.

Un *marco* es un conjunto de datos estructurados que representan una situación estereotipada, como, por ejemplo, estar invitado a un bautizo. Todo marco entraña varios tipos de información. Una parte de esa información nos dice cómo usar el marco, otra qué acontecimientos podemos esperar en ese contexto, y otra qué podemos hacer si tales expectaciones no se confirman.

Más concretamente, podemos describir el marco como un registro que recoge rasgos de un objeto o suceso, empezando por su nombre. El registro está dividido en «casillas» a rellenar con térmi-

nos que describen ese objeto. Por ejemplo, un marco que representara el concepto de «animal doméstico», podría ser:

1)

NOMBRE DEL MARCO	ANIMAL DOMÉSTICO
CASILLA 1	**DISPOSICIÓN:** AMISTOSO
CASILLA 2	**TIENE:** AMO
CASILLA 3	**TIENE:** HOGAR

donde el nivel superior contiene el nombre del objeto y en los estratos inferiores cada casilla contiene un atributo (por ejemplo, «disposición») y un valor (por ejemplo, «cariñoso»). Habrá tantas casillas cuantas parejas de atributos y valores se estime necesarias para describir el objeto en cuestión.

Una importante característica del marco es su facultad de compartir y conjugar sus propiedades con otros marcos que guarden con él alguna afinidad. Esta facultad permite simplificar la representación de grandes parcelas del conocimiento mediante una red de marcos donde los nodos secundarios heredan las propiedades de los nodos principales o más generales. La reiterada adición de nuevos nodos produce así un sistema fuertemente organizado. Es lo que hoy se llama en informática un «lenguaje de objetos estructurados», de enorme capacidad informativa y al mismo tiempo fácil de recorrer por un motor inferencial.

Supóngase, por ejemplo, que el anterior marco 1 ocupa el nodo de una determinada red, y supóngase también que añadimos ahora el nuevo nodo:

2)

NOMBRE DEL MARCO	PERRO
CASILLA 1	**ES UN:** ANIMAL DOMÉSTICO
CASILLA 2	**NOMBRE:** PLUTO

Apoyándose en la coincidencia de la casilla 1 de este nuevo marco con el nombre del anterior, el sistema tiene poder suficiente para adscribirlo a la misma familia que el primero y para unificarlos en un tercero que, gracias a la herencia, reúna las propiedades de los dos marcos originales:

3)

NOMBRE DEL MARCO	PERRO
CASILLA 1	**DISPOSICIÓN:** CARIÑOSO
CASILLA 2	**TIENE:** AMO
CASILLA 3	**TIENE:** HOGAR
CASILLA 4	**ES UN:** ANIMAL DOMÉSTICO
CASILLA 5	**NOMBRE:** PLUTO

que dice que un determinado perro llamado Pluto es un animal doméstico amable que tiene dueño y hogar: un hecho más informativo que sus predecesores, y de estructura bastante más compleja, que ha sido totalmente inferido por el sistema.

La idea de marco se la inspiró a MINSKY un ensayo publicado en los años treinta por el psicólogo BARTLETT. Desde el punto de vista filosófico es una concepción que rompe con la tradición positivista y en última instancia se remonta a la *Crítica de la razón pura* de KANT. Por otra parte el paralelismo de la noción de marco con la de *paradigma*, puesta en boga en los años sesenta por el filósofo de la ciencia Thomas KUHN, es evidente.

c. *Reglas de producción*. La historia de los sistemas basados en reglas de producción rebasa el ámbito estricto de la Inteligencia Artificial. Creados por el lógico norteamericano POST en 1943 como mecanismo general de computación, encontraron pronta aplicación en el campo de la teoría de autómatas, de las gramáticas formales y en el diseño de los lenguajes de programación.

Un sistema de producción consiste en un conjunto de reglas, llamadas indistintamente reglas de «si-entonces», reglas de «condición-acción», o simplemente «condicionales», que gobiernan su conducta. La estructura de cada regla responde a la pareja «antecedente-consecuente» o «premisa-acción» que se ajusta a cualquiera de los siguientes perfiles formales:

si se da la condición P, *entonces* vale la conclusión C
si se da la situación S, *entonces* ejecútese la acción A
si las condiciones A y B son válidas, *entonces* no lo es la condición C.

Un paradigma de sistema experto cuyo método de representación del conocimiento son las reglas de producción es el famoso sistema MYCIN, un programa especializado en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades infecciosas que viene prestando sus servicios como ayudante del equipo médico del Hospital Clínico de la Universidad de Stanford desde que SHORTLIFFE lo diseñara hacia mediados de la década de los setenta. Su base de conocimiento original constaba de 400 reglas de producción escritas en lenguaje LISP.

MYCIN va dirigido al médico práctico, es decir, al cirujano o al médico de cabecera que sospecha una infección en su paciente y ne-

cesita, aunque no dispone, de la inmediata guía de un especialista para un mejor diagnóstico y terapia del enfermo. En una primera fase y a través de un diálogo inicial, el médico suministra a MYCIN los datos que éste le pide; con ellos el sistema elabora una primera hipótesis de trabajo, alimentando algunos de sus vacíos esquemas de reglas con los contenidos empíricos del caso real y concreto que tiene entre manos. En una segunda fase de verificación, MYCIN contrasta severamente su hipótesis inicial con nuevos datos obtenidos de su interlocutor hasta finalmente reforzarla, modificarla o sustituirla por otra. Ello inaugura un nuevo curso de acción y una repetición de ciclos hasta dar, a la vista de la evidencia ofrecida, con el diagnóstico más acertado.

Como resultado de barajar los datos recibidos con su base de conocimiento, MYCIN emite diagnósticos de los que es ejemplo parcial esta cláusula cuyo objetivo es establecer la identidad de un agente infeccioso presente en el enfermo:

si el organismo es Gram-negativo, y
la morfología del organismo es bastoncito, y
la aerobicidad del organismo es anaeróbica,
entonces hay evidencia (0.6) de que la identidad del organismo es bacteroide.

El lector observará que esta cláusula es una instanciación, en la que se sustituyen las variables por datos reales, del patrón formal del primer tipo de regla esquematizado más arriba (donde P ha sido reemplazada por una conjunción de tres proposiciones, y C por una conclusión concreta).

Repárese también en el coeficiente de certeza. El ejercicio de la medicina implica la admisión de lo incierto o lo aproximado entre sus datos. De acuerdo con ello, las reglas del MYCIN incluyen entre sus parámetros un coeficiente de probabilidad que pondere el grado de fiabilidad que hay que adscribir a una determinada conclusión en vista de la evidencia presente (0,6 en el caso de la cláusula anterior).

Como complemento de sus diagnósticos, MYCIN emite también respuestas terapéuticas como, por ejemplo, ésta:

«Dado el presente diagnóstico, mi recomendación preferida para su terapia es:
»Administrar: Gentamicina

»Dosis: 119 mg durante 10 días (calculados sobre la base de 1,7 mg por kilo)
»Comentario: modificar la dosis en caso de problemas renales.»

El formato de esta cláusula es, claramente, una proposición condicional del segundo de los tipos indicados más arriba, pues conecta una situación con la ejecución de una acción.

Las ventajas que reporta el modelo de las reglas de producción para representar un área de conocimiento son obvias. Una es la *modularidad*: cada regla define una pequeña pieza de conocimiento que es independiente, lo cual facilita mucho el análisis; otra es que un sistema organizado en reglas es cómodamente *incrementable* (pueden añadirse nuevas reglas a la base de conocimiento sin tener que modificar las existentes en la mayoría de los casos) y *modificable* (es muy fácil cambiar reglas que hayan perdido valor, sin que sufran por ello las restantes).

Tampoco es desdeñable en estos sistemas la cualidad de *transparencia*, por la cual se entiende la capacidad que tiene el sistema de explicar sus propias decisiones. Las reglas «si-entonces» son especialmente aptas para responder a los dos tipos básicos de preguntas que puede hacerle la persona que los consulta: pueden ser las cuestiones técnicamente denominadas «*Cómo*» (por ejemplo, *¿Cómo* has llegado a esta conclusión?) y las llamadas cuestiones «*Por qué*» (por ejemplo, *¿Por qué* te interesa esta información?).

Es obvio, por tanto, que muy buena parte de la eficacia de este tipo de sistemas está en la estructura misma de las reglas de producción. Una vez cubiertos por contenidos reales los espacios huecos indicados por las variables de las reglas, el sencillo acto de comparar datos obtenidos que se tengan por ciertos con los antecedentes de una batería de reglas permite, cuando unos y otros coinciden, la descarga mecánica de los consecuentes de las mismas por aplicación del *modus ponens*.

§ 4. *Motores inferenciales*

Los sistemas basados en reglas de producción tienen tres componentes: una memoria de reglas, una memoria de trabajo y un intérprete, o motor inferencial. La primera es el arsenal de reglas que constituyen fundamentalmente la base de conocimiento del sistema.

La segunda es el espacio de trabajo donde se conjugan reglas abstractas con datos concretos, se elaboran hipótesis y se almacenan las conclusiones inferidas. La tercera es un programa de razonamiento automático.

La calidad de un sistema experto depende sustancialmente de dos factores: del valor de las informaciones que posee (base de conocimiento) y de su potencia deductiva (motor inferencial). Gran parte de ese potencial está ya aprisionado en las estructuras del formalismo de representación de su base, pero necesita de un agente que libere y ponga en marcha su latente dinamismo.

El *motor de inferencias* es precisamente el programa que activa los mecanismos generales de interpretación de los conocimientos y desencadena la secuencia de procesos deductivos que llevan a la conclusión solicitada. Recurriendo a estrategias diversas, ajenas a menudo al dominio de aplicación, el motor «interpreta» la información almacenada y codificada en la base de conocimiento, recorriéndola metódicamente hasta dar con las condiciones satisfactorias que determinan la inferencia de la respuesta buscada y con ello su detención.

La función de interpretación la realiza el motor inferencial aplicando una sencilla operación de comparación (la conocida operación de adecuación, emparejamiento y contraste que en argot informático se denomina «*matching*»). Esta comparación se reduce a tomar como patrón un símbolo —una frase o palabra clave contenida en la petición de búsqueda— y compararlo con los símbolos y frases de su base de datos hasta encontrar los que sean idénticos a ese patrón.

La actividad del motor consiste esencialmente en la aplicación recursiva de un ciclo básico que pasa por tres fases: *detectar* las reglas interesantes, *seleccionar* la regla o reglas a aplicar, y *activar* la regla elegida.

1. En la fase de *detección de reglas* el motor examina todas aquellas que podrían, en principio, conducir a la meta buscada si fueran activadas. Este conjunto de reglas candidatas comprende en primer lugar las reglas en cuya conclusión aparezca una parte del objetivo final que se persigue o del que actualmente está siendo investigado, pero también aquellas cuya aplicación produjera elementos totalmente nuevos (que enriquecerían la base de apoyo de sus futuras inferencias).

2. Las reglas detectadas en el curso de esta primera fase suelen ser varias en número. Ello obliga al motor a entrar en una segunda

fase de resolución del conflicto entre reglas candidatas para *seleccionar* las más prometedoras. El motor dispone de varias estrategias: elegir simplemente la primera regla, seleccionar las reglas que contengan más información, o las que tengan menos condiciones a satisfacer en sus premisas y sean por tanto más fáciles de evaluar, o las que hasta el momento han sido menos utilizadas, etc., para lo cual cuenta con unas reglas especiales o «metarreglas», que son reglas del tipo

> Si la evaluación de la regla 1 da VERDADERO
> como resultado, entonces aplicar la regla 1,

o

> Si la evaluación de la regla 1 da FALSO,
> entonces inhibir la regla 1,

es decir, reglas sin contenido empírico que actúan sobre otras reglas y que estratégicamente situadas en la base pueden identificar las que hay que utilizar en función del estado actual de los conocimientos sobre el problema en cuestión.

3. En la etapa de *aplicación*, el motor activa, según su orden de prioridad, la lista de reglas seleccionadas, cuya acción provoca generalmente la inserción de nuevos hechos o la verificación de hipótesis. Las submetas u objetivos secundarios así generados obligan a abandonar la línea principal de argumentación e iniciar para cada uno de ellos un nuevo ciclo de «identificación-selección-aplicación» hasta agotarlos todos y retomar la línea argumental inicial. El proceso cíclico continúa con la regla siguiente, y la siguiente, y la siguiente, hasta que se cumplan las condiciones de parada: se ha encontrado una solución, o la lista original de reglas candidatas ha sido agotada. En este último caso, el sistema tiene aún recursos para reintentar una nueva línea de ataque solicitando del usuario cuantas aclaraciones o nuevas informaciones juzgue convenientes.

Modos de razonar del motor de inferencias. Los motores de inferencia pueden razonar de dos maneras: o bien procediendo de los antecedentes a los consecuentes de las reglas que analiza, o bien a la inversa. En el primer caso, cuando la marcha va, por así decirlo, de las premisas a las conclusiones, se dice que el motor opera «en encadenamiento hacia adelante», o también de modo «deductivo». En el segundo caso, cuando camina de las conclusiones hacia las premisas, se habla de «encadenamiento hacia atrás» o de modo «inductivo».

En el encadenamiento hacia adelante o modo deductivo el motor verifica si los hechos establecidos en los antecedentes de las reglas coinciden con los datos de que dispone. He aquí un ejemplo. Una ojeada al árbol de clasificación de animales que figura en el apartado anterior dedicado a redes semánticas, permitirá al lector advertir que dicho árbol lleva por así decirlo encapsulada la regla «si x es un ave y x no puede volar, entonces x es un avestruz o un pingüino». Imaginemos que el motor dispone ya del dato de que un objeto problema puede ser tipificado como ave no voladora. Inmediatamente concluye, aplicando ese dato a la regla, que el objeto en cuestión es un avestruz o un pingüino. (Los detalles de este proceso están expuestos en el minimodelo de sistema experto que se analiza más adelante.)

El razonamiento deductivo es el más apropiado cuando el objetivo a alcanzar es impreciso. Un médico, por ejemplo, que buscase posibles hipótesis para el diagnóstico de un enfermo dado utilizaría el sistema experto en su modalidad de razonamiento hacia adelante.

En el razonamiento inductivo, o «en encadenamiento hacia atrás», el motor busca alcanzar uno o varios fines considerados como hipótesis o como problemas a resolver, y para ello aplica las reglas cuyas conclusiones contienen esos fines. Supóngase ahora que pedimos al sistema no que averigüe la identidad de un animal problema —como en el caso anterior, en que concluye que ese animal es un avestruz o un pingüino—, sino que defina a un animal ya identificado, del que ya se sabe que es «avestruz». Este término es ahora la clave para la elección de la regla candidata, que en nuestro ejemplo es la misma que en el caso anterior, pero no es abordada desde su antecedente, sino desde su consecuente, donde figura el término en cuestión. El antecedente de esa regla es precisamente ahora la meta a alcanzar en este caso. Gobernado por la metarregla «si el objetivo a cumplir figura como antecedente de una regla, toma esa regla en sentido inverso», el motor aplica un razonamiento hacia atrás y concluye: «Un avestruz es un ave que no puede volar», conclusión que refleja exactamente el recorrido ascendente por una rama del árbol. Un médico que quisiera verificar si un determinado diagnóstico es el adecuado a la vista de los síntomas y datos clínicos de que dispone, utilizaría el razonamiento hacia atrás.

Uno y otro modo tienen virtudes y defectos. El razonamiento «deductivo» tiene mayor poder generador que el «inductivo», pues su misión consiste precisamente en deducir *todas* las consecuencias generables (o teoremas) a partir de uno o varios axiomas. Pero al

añadir a la cadena de premisas las consecuencias recién extraídas, el crecimiento continuo de esta cadena puede provocar la temida «explosión combinatoria», cuando el motor produce series demasiado largas de respuestas irrelevantes o entra en un ciclo infinito de inferencias que obliga a desactivarlo. El razonamiento hacia atrás no considera, en cambio, más que los hechos que son relevantes para el caso, con lo que está a salvo de ese peligro. Un compromiso entre uno y otro modo es el razonamiento mixto, que se beneficia de ambos. En una primera fase de evocación de objetivos, se aplica un razonamiento deductivo que genere un conjunto pequeño de fines inmediatos; y en la fase de confirmación posterior, el razonamiento inductivo se encarga de verificar y seleccionar los objetivos deducidos en la precedente.

§ 5. *Anatomía de un minisistema: un juego de adivinanzas*

Cualquier usuario que adquiera para su ordenador un lenguaje de programación lógica, LISP o PROLOG, muy probablemente encontrará en el catálogo de entretenimientos que acompañan a su adquisición, el *Juego de los animales*. Este juego consiste en que el programa del ordenador «reconoce» o averigua, tras una serie de preguntas relativas a una determinada colección de animales que guarda en su memoria, el tipo de ellos en que uno está pensando.

El programa controla el diálogo planteando una cadena sistemática de interrogantes sobre las características del animal a identificar. Esas preguntas se inspiran en un repertorio de datos que tiene almacenados en su base de conocimiento. Si no da con la solución, reconoce que ha perdido.

Una rápida ojeada a la estructura y fundamento lógico del programa nos ayudará a desvelar el misterio de éste, al parecer, inteligente comportamiento.

Nuestro conocimiento de los animales, por poco científico que sea, implica su clasificación y descripción. Al agruparlos o clasificarlos, solemos dar un nombre a cada grupo. Y al describir a cada grupo, enumeramos sus características.

Podemos clasificarlos, por ejemplo, en mamíferos, aves y reptiles. Y describir luego a cada uno de esos grupos diciendo que los mamíferos tienen sangre caliente y los reptiles fría y que las aves tienen plumas.

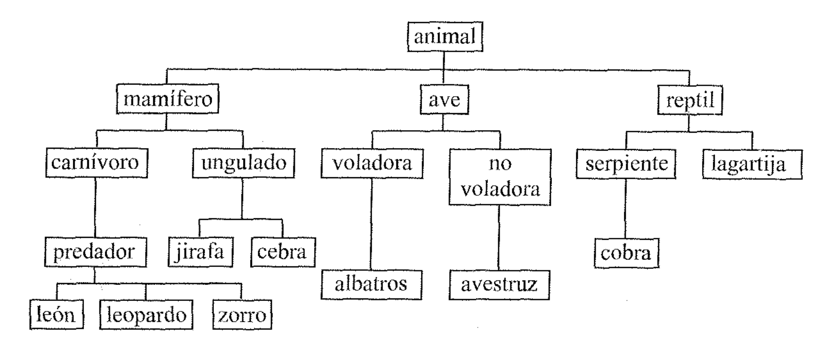
Si uno dispone ya, por ejemplo, de la definición de «ave» como

«animal que tiene plumas», entonces puede «reconocer» en cualquier momento cualquier individuo de ese tipo argumentando que, dado un animal *x*:

si *x* tiene plumas, entonces *x* es un ave.

En el juego de los animales, el programa del ordenador almacena en su base de conocimiento unos cuantos tipos de animales ordenados en un conjunto de reglas que reflejan su clasificación jerárquica.

Imaginemos una serie de animales familiarmente clasificados de acuerdo con este árbol jerárquico:



Este árbol indica una jerarquía de tipos. Llamemos en él *nudo* a todo punto ramificable y *hoja* al que no lo es (los extremos inferiores de cada rama, por ejemplo león o avestruz). Podemos dar el nombre genérico de *categoría* a los diversos tipos, exceptuando las hojas, y el de *subcategoría* a todo tipo (sin excluir las hojas) que tenga a otro por encima. Por ejemplo, «mamífero» es categoría respecto de «carnívoro» y subcategoría respecto de «animal». El proceso artificial de «reconocimiento» en este programa tiene como punto de partida una categoría que le facilita el usuario, y como término la identificación de la «hoja» en que éste piensa. Para ello se vale del referido conjunto de reglas, cuya estructura común es la siguiente:

> Si *x* pertenece a una determinada categoría y *x* cumple tal condición, entonces *x* pertenece a una determinada subcategoría.

Partiendo, pues, de la suposición de una categoría, el acto de reconocimiento identifica la subcategoría problema por chequeo de condiciones.

El pequeño sistema experto CLASSY, diseñado por la firma «Expert Systems Ltd», de Oxford, se apoya en el árbol jerárquico más arriba indicado y lo representa en su base de conocimiento mediante una batería de veinte reglas y treinta y una condiciones, que reproduzco aquí con el formato que revisten dentro del ordenador.

LA BASE DE CONOCIMIENTO

regla(1,nudo,animal,mamífero,[1,2])
regla(2,nudo,mamífero,carnívoro,[3])
regla(3,nudo,animal,mamífero,[4])
regla(4,nudo,animal,ave,[5])
regla(5,nudo,ave,vuela,[6])
regla(6,nudo,ave,no vuela,[7])
regla(7,nudo,animal,reptil,[8])
regla(8,nudo,reptil,serpiente,[9])
regla(9,nudo,mamífero,ungulado,[10])
regla(10,nudo,carnívoro,predador,[11,12]
regla(11,hoja,predador,león,[13,14])
regla(12,hoja,predador,leopardo,[15,16])
regla(13,hoja,predador,zorro,[17,18])
regla(14,hoja,ave voladora,albatros,[19])
regla(15,hoja,ave no voladora,avestruz,[21,22])
regla(16,hoja,serpiente,cobra,[23])
regla(17,hoja,reptil,lagartija,[25])
regla(18,nudo,mamífero,ungulado,[26,27])
regla(19,hoja,ungulado,jirafa,[28,29,30])
regla(20,hoja,ungulado,cebra,[31])

cond(1,tiene pelo)
cond(2,es de sangre caliente)
cond(3,come carne)
cond(4,amamanta a sus crías)
cond(5,tiene plumas)
cond(6,vuela)
cond(7,no vuela)

cond(8,es de sangre fría)
cond(9,no tiene patas)
cond(10,rumia)
cond(11,tiene mirada penetrante)
cond(12,tiene colmillos)
cond(13,el macho tiene melena)
cond(14,es felino)
cond(15,tiene manchas)
cond(16,es un felino grande)
cond(17,tiene hocico puntiagudo)
cond(18,tiene cola peluda)
cond(19,es muy buena voladora)
cond(20,se encuentra predominantemente en el mar)
cond(21,esconde su cabeza en la arena)
cond(22,tiene largo cuello y largas patas)
cond(23,tiene una capucha detrás de la cabeza)
cond(24,tiene patas)
cond(25,tiene una larga cola que pierde con facilidad)
cond(26,tiene pezuñas)
cond(27,tiene largas patas para huir de los predadores)
cond(28,tiene un cuello muy largo)
cond(29,tiene manchas oscuras)
cond(30,tiene color leonado)
cond(31,tiene rayas blancas y negras).

La expresión de las reglas y condiciones se atiene sin excepción a una sintaxis de formato muy rígido. Consideremos, por ejemplo, la regla 1:

regla (1,nudo,animal,mamífero,[1,2]).

Lo que esta regla quiere decir, desde el punto de vista del sentido común, es:

Si el objeto a identificar es animal y sus propiedades son las especificadas por las condiciones 1 y 2, entonces es un mamífero.

Pero sus componentes protocolarios son los siguientes: 1) un prefijo indicativo de que la cláusula en cuestión es «regla»; 2) su número de orden en la lista de reglas; 3) una palabra indicativa del

rango categorial que corresponde a la segunda de las dos denominaciones zoológicas que figuran en la regla (en este caso, «mamífero»): si es «nudo», se entiende que la posición de ésta en el árbol es susceptible de ramificación, mientras que si es «hoja» se entiende que su ubicación en el árbol es ínfima y ya no ramificable; 4) una denominación zoológica que desempeña el papel de categoría en el contexto de la regla; 5) una denominación zoológica que desempeña el papel de subcategoría en ese mismo contexto; y 6) el número o números, entre corchetes, de la condición o las condiciones que especifican las características de esa subcategoría y con la cual o con las cuales hay que conectar.

En el diálogo con el usuario la parte activa del sistema corresponde al motor inferencial (incorporado al lenguaje PROLOG en el que CLASSY está programado). Desde el punto de vista de nuestra psicología el comportamiento del motor puede describirse del siguiente modo: primero le pregunta al usuario cuál es la categoría más alta del animal en que está pensando. Una vez en posesión de ese dato, se sitúa en el nudo correspondiente del árbol y desde allí, mirando hacia abajo, procura detectar por chequeo de condiciones la inmediata susbcategoría y así sucesivamente hasta llegar a una hoja. Las respuestas negativas le permiten cambiar hipótesis por sus alternativas.

Si el usuario elige como categoría más alta «animal», el motor inferencial comprueba que la única regla en que esta palabra aparece es la primera y, guiándose por ella, es remitido a las condiciones («conds») 1 y 2, que están ubicadas en la segunda zona de la base con este formato:

cond(1, tiene pelo)
cond(2, es de sangre caliente).

Sin embargo, estos enunciados no afirman ni niegan nada de por sí, aunque ciertamente tienen contenido. El sistema no puede comprobar su verdad o falsedad más que envolviendo en interrogantes la condición que tiene ante sí y preguntando a su compañero de juego:

«*¿Es verdad que* [el animal en que piensas] *tiene pelo?*»

Un «sí» como respuesta le informa por de pronto que el objeto tiene esa propiedad, pero *también* que su espacio de búsqueda se encuentra en la rama izquierda del árbol, con lo que puede ignorar el resto. Y ahora pasa a preguntar por la segunda condición:

«¿Es verdad que es de sangre caliente?»

Si vuelve a obtener un «sí», tiene ya verificados los dos antecedentes de la regla 1; y una simple aplicación del *modus ponens* le da el consecuente: el animal problema es un mamífero. Pero, antes de aceptarlo como hecho establecido, el sistema puede comprobar esta aserción consultando la regla 3 y su «cond» asociado.

El sistema puede soportar varias sesiones, a condición de que discurran dentro de los límites de este diminuto zoo. Si el compañero de juego introduce en escena un nuevo animal, o hace trampas dando respuestas falsas, CLASSY tiene recursos para detectar o bien que le falta información para seguir razonando, o bien que se ha topado con una contradicción; en ambos casos ruega al usuario que enriquezca su universo con nuevas reglas y condiciones que describan ese nuevo animal, o que elimine la contradicción modificando las reglas o condiciones que él poseía.

Una sesión comienza, como ya se ha dicho, pidiéndole el sistema al usuario que establezca la categoría más fundamental. La palabra que obtenga como respuesta será contrastada con las que ocupan los diversos nudos del árbol hasta encontrar la que coincida con ella. Y este nudo será el punto de partida para comenzar la serie de preguntas sobre atributos observables que permitan al sistema la identificación del animal en cuestión. He aquí una muestra de diálogo (las preguntas y respuestas emitidas por el ordenador van en cursiva, y en letra normal las palabras del usuario):

Establece la categoría conocida más definitiva: animal
¿Es verdad que tiene pelo? Sí
¿Es verdad que es de sangre caliente? Sí
¿Es verdad que come carne? No
¿Es verdad que rumia? Sí
¿Es verdad que tiene un cuello muy largo? Sí
¿Es verdad que tiene manchas? Sí
¿Es verdad que su color es leonado? Sí

Conclusión
Apoyándome en los hechos que me has descrito deduzco que la subcategoría final de «animal» es «jirafa».

§ 6. *Manufactura del conocimiento y sentido común*

Hace algunos años Edward A. FEIGENBAUM, uno de los principales promotores de la tecnología de los sistemas expertos, y la periodista especializada en temas científicos Pamela MCCORDUCK dedicaron un libro, *La quinta generación*, a considerar el desafío que supone para el futuro la irrupción de los sistemas expertos:

> La creación automática del conocimiento tiene efectos impredecibles. Cuando una máquina puede usar todo el conocimiento que le hemos dado y usarlo sistemáticamente de modo que nosotros no podamos hacer, extrayendo de él inferencias cuya profundidad exceda nuestras capacidades (porque no está limitada como nosotros por el legado evolutivo, que sólo nos permite contemplar a la vez muy pocas cosas), ¿qué sucederá?

Quizá contribuya a un enfoque más adecuado de este problema recordar un pasaje del *Ensayo sobre el entendimiento humano* (1690) del gran filósofo empirista John LOCKE. En ese pasaje cuenta LOCKE las hazañas de un loro muy peculiar: «Tenía deseo de saber de la propia boca del príncipe Mauricio [de Nassau] lo que había de cierto en un cuento que corría... acerca de un viejo loro que tuvo cuando gobernó el Brasil, que hablaba, preguntaba y respondía cuestiones ordinarias como criatura racional... Me dijo que cuando llegó al Brasil tuvo noticia de ese viejo loro... y envió para que se lo trajeran. El tal loro era muy grande y muy viejo, y cuando lo metieron por primera vez en la habitación en que se hallaba el Príncipe, rodeado de muchos holandeses, dijo al verlos: "¿Qué gente blanca es ésta?" Le preguntaron que quién pensaba que era ese hombre, apuntando hacia el Príncipe, y contestó que «sería algún general». Cuando se lo acercaron, el Príncipe le preguntó: "¿De dónde vienes?" Respondió: "De Marinan." El Príncipe: "¿De quién eres?" El loro: "De un portugués." El Príncipe: "¿Qué haces allí?" El loro: "Guardo las gallinas." El Principe no pudo contener la risa y le dijo: "¿Tú guardas las gallinas?" A lo cual el loro contestó: "Sí, y lo hago muy bien", y cuatro o cinco veces repitió el sonido que hacen las gentes para llamar a las gallinas.» Si ese loro existiera, concluye LOCKE, tendríamos que celebrar el descubrimiento de una nueva especie cuyo nombre debería ser el de «loros racionales».

Para FEIGENBAUM la nueva especie de «sistemas inteligentes» manufacturados por el hombre que son los sistemas expertos se comporta en todo como el loro de nuestra historia. Una alternativa a ese punto de vista sería pensar que el ordenador no hace nada que el hombre no haya puesto antes en él, y que en ese sentido su comportamiento difiere bastante del que debía poseer aquel ilustre loro y se sitúa sospechosamente más cerca del de esos simpáticos animalitos que reproducen a la perfección el habla humana sin entender una palabra de lo que dicen. ¿Admitiría LOCKE para esos programas el nombre de «sistemas inteligentes», o se inclinaría más bien por el de «loros mecánicos»? El lector puede decidirlo por sí mismo.

* CAPÍTULO XXI

LA LÓGICA DE INTERNET

Todos para Uno y Uno para Todos.
Ted NELSON, 1987

§ 1. *La emergencia de Internet*

El nacimiento y la expansión de la red informática Internet constituyen un avance en la tecnología de la comunicación de las últimas décadas que no tiene precedentes. Internet suministra de manera relativamente interactiva a sus millones y millones de usuarios una masa de información en texto, imágenes y sonido que no cesa de crecer y ya ocupa más de mil millones de páginas. Facilita servicio de correo electrónico y muchas otras posibilidades intercomunicativas, además de solucionar una infinidad de problemas prácticos. Lo que desde el punto de vista de la información significa Internet para un hombre de nuestro tiempo lo resume este testimonio del conocido sociobiólogo Richard DAWKINS:

> Regularmente, navego en Internet. Es, con mucho, la más importante innovación experimentada por los medios que he conocido en mi vida. Es como si uno tuviera permanentemente al alcance de la mano una enciclopedia de colosales dimensiones. Es verdad que la telaraña mundial contiene una tremenda cantidad de información que no es más que paja, pero eso, en realidad, no tiene mayor importancia, porque es muy fácil seleccionar lo que te interesa de la red y prescindir de lo demás. Lo cual, evidentemente, no sucede con los periódicos, donde cuesta muchísimo trabajo apartar la abundante paja para quedarse sólo con el escaso grano.

§ 2. *La lógica de la comunicación*

Sabemos que las aportaciones de GÖDEL y TURING a la teoría matemática de la computación han venido a tender un puente científica y filosóficamente interesante entre la lógica y la informática, en cuya fase inicial, con la emergencia de los ordenadores, la palabra «computación» sirvió de paradigma. Lo mismo puede decirse en su fase actual, con la emergencia de Internet, de la palabra «comunicación». Pero, en el

ámbito de la comunicación, un puente conceptual de similares condiciones está aún por construir. A este respecto quizá valga la pena reparar en dos hechos que conciernen a la historia de la lógica y a la historia de la filosofía.

El primero es que debemos a ARISTÓTELES, padre de la lógica, el establecimiento de la fundamental distinción entre dos partes o funciones de esta ciencia, según que se la considere como instrumento para el análisis de teorías (la parte de la lógica que ARISTÓTELES llamó *analítica*) o como instrumento para el control de la comunicación (la parte que él llamó *dialéctica*, a la que sus discípulos añadieron también la *retórica*). Si la analítica puede ser descrita como una *lógica del pensamiento,* la dialéctica puede serlo, correlativamente, como una *lógica de la comunicación*. Y, si conviniéramos en ampliar en el sentido aristotélico nuestra idea de la lógica, podríamos incluso decir en términos muy generales que, paralelamente a las grandes aportaciones de BOOLE y FREGE a la parte analítica de la lógica en el siglo XIX, debemos a HEGEL en ese mismo siglo el desarrollo creador de la dialéctica como lógica y retórica de la cultura y de la comunicación.

Pero es también un hecho que la filosofía moderna, marcando en este sentido un retroceso respecto de ARISTÓTELES, se ha concentrado tanto desde DESCARTES en el análisis de la subjetividad y del pensamiento, que ha descuidado el estudio de la comunicación. Ha habido que esperar largo tiempo a que grandes filósofos del siglo XIX, como HEGEL en la primera mitad de dicho siglo y PEIRCE en su segunda, insistan en el hecho de que la *intersubjetividad*, y por tanto la intercomunicación entre sujetos de conocimiento, constituye una dimensión esencial de la condición humana que no sólo afecta al ámbito de su actividad social, sino también al de su actividad científica, y de ahí la importancia filosófica que adquiere, desde esta perspectiva, el estudio de la comunicación.

Es curioso constatar que la reciente historia de la informática, iniciada en el segundo tercio del pasado siglo XX, ha recorrido en relativamente poco tiempo una trayectoria similar a la cursada en medio milenio por la filosofía moderna. Durante las tres o cuatro primeras décadas de su historia los ordenadores fueron concebidos y fabricados como máquinas que parecían emular, como las de TURING, el introvertido solipsismo cartesiano. Eran aparatos capaces de realizar cálculos prodigiosos que maravillaban al hombre, pero no sabían comunicarse entre sí. Sólo bastante más tarde, al filo de los sesenta, empezó a preocupar a un exiguo puñado de investigadores visionarios el problema de tratar de cambiar el estado de cosas hasta conseguir que esas costosísimas máquinas «pensantes» que son los ordenadores salieran de su aislamiento y se interconectasen abriendo un flujo de mutua información. Ése fue el origen de la actual red de redes informáticas que llamamos *Internet.*

§ 3. *Tres relatos de la saga del futuro*

Más de un cronista de Internet ha bautizado al producto de su trabajo con el título «historia del futuro». Esta historia se desarrolla a lo largo de los últimos treinta o cuarenta años. La resumo en tres relatos: antecedentes, nacimiento y actual desarrollo de Internet.

a. *Relato primero: la formación de la red Arpanet*

La existencia de Internet no podría explicarse sin la de Arpanet, la red informática que la precede y que debe su nombre a una agencia militar.

Visiones de red. Esto nos remonta a los años de la guerra fría que más duros fueron para los Estados Unidos. En 1957 había tenido lugar el lanzamiento y puesta en órbita del primer satélite (*Sputnik*) ruso, y Norteamérica hubo de pasar por la amarga experiencia de ver perdida de momento su supremacía en la carrera del espacio. Con la voluntad de superar aquella situación el Congreso norteamericano creó al año siguiente, en 1958, la agencia de investigación avanzada ARPA (sigla de *Advanced Research Project Agency*), que pronto se concentró en el área computacional. Y fue en este campo y en el seno de ARPA donde se ubican las geniales visiones de J. C. R. LICKLIDER, joven psicólogo y matemático del MIT (Massachussetts Institut of Technology) obsesionado por poner en comunicación a los ordenadores entre sí y con el hombre. Su legendario artículo sobre la simbiosis entre hombres y máquinas («Man-Computer Symbiosis», 1960) forma parte de los anales de la historia de Internet.

Mas no fue entonces ARPA, sin embargo, el único polo de investigación estadounidense donde se barajó por anticipado la idea de una vasta y ambiciosa red de ordenadores ni LICKLIDER su único pionero. Otro brillante joven norteamericano, Paul BARAN, contratado en 1959 por la empresa Rand Corporation, en la costa californiana, había aportado una ingeniosa solución al problema que preocupaba a la Rand, competente en el sector aeronáutico, de afrontar y analizar el escenario subsiguiente a un ataque nuclear soviético, BARAN concibió el original proyecto de configurar una red de comunicación que fuese deliberadamente *no-jerárquica*, para evitar que un ataque selectivo la pudiera descabezar, y que basase por tanto su fortaleza y capacidad de supervivencia, aunque pudiera parecer paradójico, en las ideas de descentralización y redundancia. Este proyecto incluía la no menos revolucionaria idea de que los conductos de la red quedarían mucho mejor aprovechados si se cambiaba el procedimiento habitual en las comunicaciones telefónicas de dejar que circulasen los mensajes como unidades indivisibles, por el de darles curso después de haberlos dividido en segmentos más cortos que se recompondrían al llegar a su destino. Aquella

idea parecía atentar contra los principios clásicos de la telefonía y encontró tal resistencia en las autoridades que en 1965 BARAN desistió de sus propuestas.

Pero lo que los norteamericanos ignoraban era que esa misma idea, que entonces se les antojó herética aunque luego se ha revelado profética, había sido ya inteligentemente concebida y diseñada por aquellos mismos años en el continente europeo, concretamente en el prestigioso *National Physics Laboratory* de Inglaterra, donde tiempo atrás había trabajado Alan TURING. Allí el investigador británico Donald DAVIES inventó una técnica de comunicación, alternativa a la telefónica, que ponía en circulación los mensajes después de haberlos dividido previamente en *packets* (paquetes) que viajan por separado.

El paso a la realidad. A la agencia ARPA debemos en todo caso la voluntad real y el tesón de poner en marcha con éxito, apoyándose en las ideas anteriormente barajadas, el proyecto de una red informática de comunicación, cuyos principales artífices fueron otro par de jóvenes superdotados: Robert F. TAYLOR y Larry ROBERTS. TAYLOR, psicólogo y matemático como su amigo LICKLIDER, a quien sucedió en ARPA en 1965, y también interesado por intercomunicar a los ordenadores, se las había arreglado para contratar por su gran valía a ROBERTS, informático procedente del MIT.

Pronto obtuvo TAYLOR de ARPA un amplio presupuesto que le permitió poner de inmediato manos a la obra. Tras dos años de dudosos resultados, un simposio celebrado en 1967, dio ocasión a los hombres de ARPA de escuchar de boca de un colega del ya citado británico Donald DAVIS las ideas de éste sobre la intercomunicación computacional basada en conmutación de paquetes. El equipo norteamericano incorporó entusiasmado aquellas ideas ignorando que ya estaban contenidas en los trabajos de su compatriota BARAN, que dormían en los archivos estadounidenses el sueño de los justos.

ARPA cooperó muy a fondo en su trabajo con las principales universidades norteamericanas, en las que delegó importantísimas funciones. Otra idea crucial del proyecto era introducir en cada nodo de la red un ordenador «intermediario», especializado en el procesamiento de mensajes. La confección de este aparato, bautizado con el nombre de IMP —sigla de *Interface Message Processor* (Interfaz Procesadora de Mensajes)—, fue encomendada por ARPA en 1969 a la empresa bostoniana Bolt, Beranek y Newman,

y en ese mismo año se constituyeron con las respectivas entregas de aquel ordenador sendos nodos en cuatro universidades. Para 1971 el número de nodos era ya de una quincena. Así fue como nació la red informática llamada *Arpanet* (nombre literalmente traducible como la «red de ARPA»), que se fue desarrollando hasta extender sus tentáculos por todo el territorio norteamericano para luego desaparecer, tras gradual declive, en 1989, a los veinte años de su nacimiento.

b. Relato segundo: la transformación de la red Arpanet en la red de redes Internet

Considerado desde el punto de vista de los agentes sociales que en él intervinieron, el proyecto Arpanet era una estructura mixta, militar por su origen, pero no por la exclusividad de su financiación ni menos aún por su desarrollo, pues el medio que llevó la voz cantante en este último fue la comunidad universitaria.

La absoluta novedad de la materia a investigar fue uno de los factores que contribuyeron a la circunstancia de que el perfil medio arrojado por los universitarios interesados en el proyecto fuese el de profesores muy jóvenes y estudiantes avanzados de altísima cualificación. Hablando en términos generales, si en algo difieren la comunidad militar y la universitaria es que las exigencias de jerarquía y de secreto en el tráfico de información son mayores en la primera que en la segunda. Pero los jóvenes investigadores implicados en Arpanet fueron mucho más lejos que el común de los universitarios y pusieron en marcha una metodología de trabajo colectivo que cumplía a la perfección los ideales del igualitarismo. Para ellos la idea de autoridad o de jerarquía estaba explícitamente proscrita, como también el secreto o la privacidad en la creación de programas. Las famosas circulares RfC (*Request for Comments*: «Se ruega comentario»), por las que toda innovación o sugerencia de cualquier miembro del grupo se sometía a la opinión o iniciativa de los demás, documentan un espíritu sin precedentes en la historia de la investigación que ha sido, y de alguna manera parece ser aún, parte del espíritu de Internet.

Por otra parte, y por esquemático que quiera ser el presente resumen, no se puede dejar de mencionar al menos, a propósito de Arpanet, la invención del *correo electrónico* en 1972. Aunque colateral y modesta en apariencia, ésta fue, sin embargo, una de sus más

fructíferas conquistas. El correo electrónico ha logrado permitir que nuestros mensajes escritos puedan transmitirse en segundos o fracciones de segundo, no en días ni semanas como nos tenía acostumbrados el correo ordinario, y apenas sin coste. Quien programó este invento fue Ray TOMLINSON, *hacker* e ingeniero de la BBN. Entre los detalles de su plan figuraba la ocurrencia de dar a las direcciones de correo electrónico el formato que hoy siguen teniendo: en ellas el signo @, convencionalmente considerado al efecto como punto de separación universal e inequívoco, marca la divisoria de una fórmula en la que dicho signo es precedido del nombre del usuario (o, mejor dicho, de su cuenta electrónica) y sucedido por el nombre de la máquina que le sirve. Una adicional contribución del programador John VITTAL incluía una instrucción que permite poner en marcha la respuesta a cualquier mensaje con sólo apretar un botón, terminando así de liberarnos de la tradicional servidumbre impuesta por sobres, sellos y buzones de correo a la correspondencia epistolar.

Con el tiempo fueron surgiendo dentro y fuera de Norteamérica, paralelamente a Arpanet, otras numerosas redes de distinta arquitectura. Y con ellas surgió naturalmente el problema de unificarlas, lo cual implicaba dar un paso de mayor complejidad, puesto que el resultado de la unificación no sería ya, en rigor, *una* red de ordenadores, sino *una red de redes* de ordenadores.

El compromiso de llevar a cabo esta tarea lo asumieron dos hombres, Robert KAHN, ingeniero de la empresa Bolt Beranek y Newman, y Vinton G. CERF, investigador formado en universidades de California que había colaborado desde el principio en el proyecto Arpanet. Enseguida se percataron de que el problema principal estaba en la construcción de una plataforma intercomunicativa capaz de superar las diferencias de arquitectura y de sistema operativo de los diversos ordenadores de las distintas redes. A este respecto hablaron de «protocolos», tomando prestado el término a los diplomáticos, que lo utilizan para referirse a documentos que puedan servir de base para el entendimiento y eventual acuerdo entre personas y grupos de intereses máximamente encontrados. El artículo publicado por ambos en 1974 con el título «Un protocolo para la interconexión reticular de paquetes» («A Protocol for Packet Network Interconnection») aportaba ya un protocolo de control de transmisión de mensajes, TCP (*Transmission Control Protocol*), y con ello vino a poner los fundamentos de Internet (nombre, por cierto, que por primera vez aparece mencionado en este artículo).

Pero la mayor hazaña de CERF y KAHN, lo que John NAUGHTON, historiador de Internet, describe como «el ADN digital de la red», fue la ulterior elaboración (seis años después y con ayuda de la experiencia de los investigadores de Xerox en Palo Alto), de un segundo protocolo, que es el universalmente conocido TCP/IP, compuesto en realidad de dos: 1) un nuevo TCP encargado de la gestión de datos, que efectúa la fragmentación de los mensajes en paquetes, y 2) un protocolo llamado IP (*Internet Protocol*, «Protocolo de Internet»), encargado de localizar en la red al odenador destinatario y enviarle el mensaje a su dirección.

En junio de 1977 tuvo lugar una espectacular demostración de la realidad y el alcance de la comunicación por red computacional en la que se realizó el contacto entre un ordenador situado en la bahía de San Francisco y otro en la capital del Reino Unido. Sin embargo, por comprensibles razones de seguridad, el Pentágono no podía menos de asistir con cierto recelo a la creciente transparencia y extensión de la red, y por ello ARPA fue declinando gradualmente responsabilidad. A mediados de los años ochenta, el protocolo TCP/IP fue incorporado al recientemente construido sistema operativo UNIX, que ponía así la red al alcance de cualquiera de las populares estaciones de trabajo SUN. Lo que para Internet era una meta y un reto, era un riesgo en su vena militar para Arpanet, que en 1989 dejó de funcionar.

c. *Relato tercero: el lanzamiento de la Telaraña Mundial*

La mutación de Arpanet en Internet no tiene, pues, solamente por base el avance tecnológico, sino también un factor de interés sociológico. Visto desde fuera, el ejemplar igualitarismo democrático de los universitarios que componían el grupo Arpanet, no dejaba de ser un club elitista, cuyos miembros, igualados todos entre sí, eran todos ellos miembros muy privilegiados de las más privilegiadas universidades norteamericanas. El espíritu de Arpanet quedaba lejos, a diferencia de la nueva Internet, de la profunda revolución tecnológico-social iniciada en los años setenta y desarrollada en los ochenta, en la que el sistema operativo UNIX y el ordenador personal pusieron la informática al alcance no sólo de cualquier universidad o empresa, sino también de cualquier ciudadano particular. El diseño del programa MODEM en 1977 hizo posible que dos ordenadores personales se transfirieran mutuamente archivos por vía tele-

fónica. Eric S. RAYMOND, autor del conocido libro *The New Hacker Dictionary*, publicó en Internet un artículo titulado «La catedral y el bazar» en donde postulaba para el arte de la programación del *software*, y con ello para Internet, el modelo del bazar, donde todo el mundo puede poner cualquier cosa en todo momento a prueba, con preferencia al modelo de producto «intocable» estilo catedral, por abnegados que fuesen los artesanos que lo diseñaron.

Sin embargo, la aplicación que más ha incrementado la extensión mundial de Internet y a la que ésta más debe su carácter global, la llamada *Telaraña Mundial* (*World Wide Web*), nació en una institución más parecida a una catedral que a un bazar, como es el Centro Europeo de Investigación Nuclear de Ginebra, mundialmente conocido como CERN (sigla de *Centre Européen pour la Recherche Nucléaire*). En el seno del CERN, y ante el problema, que parecía insoluble, de sacarle partido al inmenso maremágnum documental de los informes, conferencias y actas de reuniones científicas de trabajo de las legiones y legiones de investigadores que trabajan en el CERN, dos brillantes personajes, Tim Berner LEE y Robert CAILLIAU, pusieron en marcha en 1989 el ambicioso proyecto de un sistema informático que rescatase automáticamente información de toda clase y número de documentos científicos alojados en una ingente muchedumbre de grandes bases de datos. Batiendo un doble récord de tiempo y de excelencia en la realización de su obra, LEE y CAILLIAU crearon en sólo doce meses de trabajo un modelo de sistema informático realmente perfecto y esencialmente caracterizado por:

1) ajustarse a la arquitectura «cliente-servidor», siendo el primero cualquier ordenador conectado a la red que solicite información y el segundo, el servidor, un ordenador especializado que se encarga de suministrarla;

2) introducir una serie de nuevos protocolos entre los que destacan: *a*) el llamado URL (*Uniform Resource Locator*), parecido al clásico IP, para uniformar la localización de la dirección de cualquier máquina: *b*) el llamado HTTP (*Hypertext Transport Protocol*), parecido al FTP, que reduce al máximo los conocimientos de informática que precise la persona que quiera utilizar el sistema; *c*) el llamado HTML (*Hypertext Mark-up Language*), que es un lenguaje que proporciona un sistema universal de convenciones para la descripción de un documento, una especie de esperanto de la documentación; y

3) la idea de introducir en cada ordenador «cliente» de la red un programa denominado *browser* (del verbo inglés *to browse*, hojear o mirar un libro o un escaparate) que tuviese por misión visualizar y escrutar, como quien curiosea en las páginas de un libro, la muchedumbre de documentos de grandes bases de datos, próximas o remotas.

El sistema *World Wide Web* (traducible como *Telaraña Mundial*), que así lo bautizaron sus creadores a propuesta de uno de ellos, CAILLIAU, fue hecho público el 15 de enero de 1991 y pronto unánimemente aceptado por la comunidad física mundial.

Pero al factor «catedral» no tardó en sumarse el factor «bazar». Muy poco tiempo después, en 1993, un joven investigador ideó en la Universidad de Illinois un *browser* que incorporaba la posibilidad de visualizar y transmitir imágenes y que, por esta y otras razones, era más susceptible de devenir instrumento popular que el potente y sofisticado *browser* de que estaba provisto el sistema WWW (abreviatura de *World Wide Web*) del CERN. El joven investigador, *hacker* aún por graduar, respondía al nombre de Marc ANDREESSEN y bautizó su programa con el de *Mosaic*. Tim Berners LEE reprobó al principio, por parecerle poco seria, la idea de que la red transmitiese imágenes. Pero cuando ANDREESSEN puso muy poco meses después a través de la red al dominio público su *Mosaic*, como *browser* para la Telaraña Mundial, hizo que ésta pronto acaparase la parte del león en el tráfico informativo de Internet. Al año siguiente, en 1994, ANDREESSEN fundó junto con Jim CLARK, informático de gran prestigio entre los *hackers*, una empresa privada y ambos lanzaron un nuevo *browser* que superaba al *Mosaic*: el *Netscape Navigator* I.0, cuyo éxito no pudo ser más fulminante. Pero un bazar está siempre abierto y expuesto al apetito de las fuerzas del mercado. La tardía irrupción en Internet de la gigantesca empresa Microsoft de Bill GATES, que es en el campo del *software* del ordenador personal, lo que ha sido IBM en el *hardware* de los grandes ordenadores, inició con el lanzamiento de su programa *Explorer*, rival de *Netscape*, la llamada «guerra de los *browsers*», jugando con la ventaja de que sus sistema operativo *Windows* monopoliza el referido campo. El sueño intercomunicativo de aquel David representado por un puñado de universitarios y *hackers* atrajo a la gente y con ella al Goliat del poder y el dinero.

§ 4. *El triunfo del binomio «hipertexto+multimedia»*

Cuando Tim Berners LEE concibió el proyecto que luego se plasmaría en la realización de su *World Wide Web,* lo propuso como «un sistema *hipertextual* [el subrayado es mío] para facilitar el tráfico de información compartida entre grupos de investigación de la comunidad de la física de altas energías». Hasta el aprendiz de usuario de Internet sabe de sobra por propia experiencia que la dirección de las páginas que visita aparece escrita en la parte superior de la pantalla de su ordenador precedida del prefijo: http://www... La triple «w» alude obviamente a la telaraña mundial, pero las letras «http» son, como ya he indicado, abreviatura del protocolo de transferencia hipertextual (*Hypertext Transference Protocol)* que es básico en el sistema. La idea de *hipertexto* es, por así decirlo, la clave de bóveda de la lógica del sistema *World Wide Web.*

a. La noción de hipertexto

La palabra «hipertexto» alude al procedimiento o a la facilidad, que puede ser mecánica, de pasar de una página a otra de uno o más textos.

En la tradición alfabética el texto por antonomasia es el libro, como anteriormente lo fue el códice y antes aún el pergamino. Y en esa tradición se entiende que la lectura de un libro, un códice o un pergamino debe ser unilineal, secuencial y progresiva, de manera que el lector siga fielmente en su lectura, del principio al fin, el orden consecutivo de los capítulos y, dentro de cada uno de ellos, el de sus páginas y líneas.

El procedimiento del hipertexto implica, por el contrario, la interrupción de esa lectura textual, el salto de un pasaje o de una página de un texto a otro pasaje o a otra página de otro texto o a otro pasaje o página del mismo texto que no sigan de manera inmediata y consecutiva a lo que se estaba leyendo. Cuando consultamos, por ejemplo, una entrada de una enciclopedia, frecuentemente nos salen al paso referencias cruzadas a otras entradas. Son referencias que invitan a saltar a otras páginas no consecutivas que pueden incluso hallarse en otro volumen de esa enciclopedia. Al saltar así de un pasaje textual a otro más o menos distante, estaríamos practicando el hipertexto, como también cuando curioseamos los volúmenes de una biblioteca o de una librería.

b. Los pioneros del hipertexto

La diferencia entre texto e hipertexto es en el fondo relativa. Muchísimos libros tienen llamadas a notas que nos obligan, si queremos atenderlas, a interrumpir la lectura del texto principal para bajar la mirada al pie de la página o al final del libro, según donde estén colocadas las notas. Y durante nuestra lectura suelen entrecruzarse con ella en nuestro pensamiento los recuerdos de otras páginas de ese libro o de otros libros del mismo autor o de otros autores.

Por otra parte, es evidente que en el caso de la lectura textual nuestra atención se concentra en seguir sin distraerse la línea de pensamiento indicada por el orden lineal y secuencial del texto, mientras que en la lectura hipertextual la diversión o distracción de la atención no es algo que se evita, sino que se necesita para saltar de un texto a otro.

Pero esta consideración nos lleva a preguntarnos cuál de los dos movimientos es más natural y espontáneo en nuestra mente, si el de la concentración textual o el de la diversión hipertextual. ¿A cuál de ellos se acomoda mejor, por ejemplo, nuestra asociación espontánea de ideas y recuerdos? Debemos a un hombre extraordinario, Vannevar BUSH, que fue asesor científico del presidente Roosevelt durante la Segunda Guerra Mundial, la idea, que empezó a obsesionarle desde los años treinta, de que la única manera de conservar el control sobre la explosión de la información que él veía avecinarse estaba en archivarla en ingentes depósitos documentales establecidos sobre nuevos soportes (en aquellos tiempos se contaba ya con el microfilme) y en encontrar vías de acceso a esos ingentes depósitos mediante métodos que fuesen, por una parte, tan naturales como nuestra espontánea dinámica de asociación de ideas y recuerdos, y, por otra, mecanizables. Ese mismo planteamiento fue, salvando las distancias en cuanto a resultados, el que llevó a Tim Berners LEE a proponer en el CERN el proyecto que luego sería la triple W.

En un visionario artículo escrito en 1933, pero publicado mucho más tarde en la revista *Atlantic Monthly* (1945) con el extraño título «As We May Think» (que se podría traducir con alguna libertad, y con un toque de pedantería que no tiene el título inglés, como «Una manera utópica de pensar»), dejó BUSH escrito su testamento sobre estas ideas. Él partía del supuesto de que «la mente humana opera por asociación» y soñaba con la creación de una máquina a la que dio el nombre de «memex», describiéndola como «una suerte de biblioteca de archivos privada y mecanizada». Esa máquina archivaría

en microfilmes todo libro o artículo que leyéramos y todas nuestras notas y comentarios, y aplicaría a ese conjunto de documentos un dispositivo localizador que se pudiese orientar en la búsqueda de datos con la ayuda de mecanismos que fuesen una réplica material de nuestros nexos asociativos.

BUSH murió en 1940, el mismo año que Roosevelt, sin poder beneficiarse para nada de los entonces emergentes ordenadores. Pero andando el tiempo, allá por los años sesenta, otra figura que es legendaria en la historia de los *hackers*, Ted NELSON, pudo acercar algo más aquel ideal a la realidad. Él fue quien acuñó el término «hipertexto», para referirse a una lectura no lineal ni consecutiva de los textos, que saltase de un documento a otro apoyándose en una amplia variedad de enlaces que pudieran conectarlos. La presencia de los ordenadores en aquellos años hacía totalmente innecesarias las especulaciones de BUSH sobre la construcción y manipulación de archivos de microfilmes.

Para NELSON constituía un gravísimo problema la conservación del conocimiento global de la humanidad. Si ese conocimiento no se almacena, se pierde para siempre. Pero si se lo almacena sin la posibilidad de controlar y manipular fácilmente la ingente masa de información almacenada, en la práctica y para el común de los ciudadanos es casi lo mismo que si se perdiera. Su definición de hipertexto, aparecida por primera vez en 1965, ofrecía la solución: «escritura no-secuencial con vínculos o enlaces (*links*) controlados por los lectores».

A fines de la década de los sesenta se llegó a implementar sobre ordenadores IBM alguna materialización informática del procedimiento de hipertexto. Pero, las ideas de NELSON iban mucho más allá. Su sueño era la implementación de un magno sistema que él llamó *Xanadú* y que definía como un universo de documentos o documentación universal, un *docuverso*, en el que «todo estuviera a disposición de todo el mundo», «un entorno unificado disponible para todo el que pudiera acceder a ese espacio global». El nombre Xanadú lo tomó NELSON del poema «Kubla Khan» del clásico autor inglés COLERIDGE, que habla allí de un «palacio mágico de memoria literaria».

c. La implementación tecnológica del hipertexto

Ésta ha sido la tarea admirablemente llevada a cabo gracias a la arquitectura y los protocolos del sistema de la Telaraña Mundial.

Una página de este sistema, lo que llamamos una página *web*, es un documento solicitado por cualquier ordenador cliente de la red y facilitado por uno de sus servidores. Desplegado o exhibido en la pantalla del cliente, ese documento se presenta como un texto, acompañado o no de imagen o incluso de sonido, y con la característica de que determinadas palabras, frases o figuras tienen un subrayado o coloreado especial, cada una de las cuales, obedeciendo a un clic del ratón, determina el cambio del texto presentado en la pantalla por otro proveniente de cualquier parte del mundo que está de alguna manera relacionado con el anterior. Los lugares de la página *web* así marcados cumplen la función de un enlace o vínculo (*link*) o, como también se dice, hipervínculo (*hyperlink*) que conecta un documento con otro sobre la base de algún género de asociación, sintáctica, semántica o pragmática. La visualización de los enlaces de una página *web* le permite al lector del hipertexto, o hiperlector, enriquecer indefinidamente, sea por ampliación o por precisión, la información que le proporciona la página que tiene ante sus ojos utilizando al efecto con sendos golpes de ratón el correspondiente abanico de posibilidades, ofrecidas por los enlaces, de saltar a otro texto, que a su vez le ofrecerá nuevos enlaces y posibilidades. La conexión intertextual en el hipertexto no es pues unilineal y secuencial, sino *múltiple y reticular*, lo cual multiplica considerablemente nuestras posibilidades de enriquecer la información de que disponemos.

d. La noción de multimedia

En la comunicación electrónica se habla de «multimedia» o «hipermedia» cuando el mensaje o texto transmitido no consta sólo de palabras escritas sino que va además acompañado de imagen o sonido o de ambas cosas, pudiendo ser , por otra parte, la imagen tanto fija como animada. En un sentido, como temía Tim Berners LEE al ponerle objeciones a la inclusión de iconos al *Mosaic* diseñado por ANDREESSEN, la imagen distrae de la lectura del puro texto y trae consigo el grave inconveniente tecnológico de requerir espacios muy considerablemente mayores de memoria y también una demora considerablemente mayor en la transmisión del mensaje. Pero también es verdad, como hubiera argumentado el filósofo MERLEAU-PONTY, que la percepción desempeña un papel clave en nuestra inserción en el mundo. El conocimiento sensible o, por mejor decir, perceptual enriquece en más de un aspecto al conceptual.

De de una manera más cruda viene a decir lo mismo Derrick de KERCKHOVE, discípulo de MCLUHAN, en su libro *Connected Intelligence. The Arrival of the Web Society* (Inteligencia conectada. El advenimiento de la sociedad *web*):

> El hipertexto únicamente le sería hoy familiar a un exiguo puñado de científicos y académicos si no fuera porque la invención del *Mosaic* por Marc Andreessen lo transmutó *ipso facto* en «hipermedia», por virtud de lo cual los enlaces pueden vincular no solamente textos, sino gráficos, sonidos e imágenes en movimiento. Los ciudadanos nacidos y nutridos durante casi medio siglo de televisión, necesitaban los valores sensoriales de los que el puro y anticuado texto carecía.

La conclusión que podemos sacar es que el secreto del triunfo de Internet como última materialización y realización hasta ahora, para bien y para mal, de la idea de aldea global de MCLUHAN ha sido la combinación del hipertexto de la Telaraña Mundial lanzada por el CERN con la facilidad multimedia que aportó, primero con su *Mosaic* y luego con su *Netscape Navigator*, el *hacke*r Marc ANDREESSEN.

§ 5. *Cómo orientarse en la red*

El conocimiento es uno de los principales factores de nuestra orientación en el mundo y su falta nos deja desorientados. Pero esto mismo puede también sucedernos cuando la información puesta a nuestro alcance es excesiva y no podemos manejarla, que es lo que pasa con los centenares y centenares de millones de páginas que pone a nuestro alcance Internet.

A este efecto la red nos ofrece un buen número de programas llamados «buscadores». Estos programas son motores lógicos de búsqueda que rastrean algorítmicamente inmensas bases de datos para recopilar información, sirviéndonos así de valiosa orientación en la red.

Cuando buscamos información en bibliotecas, éstas suelen poner a nuestra disposición dos tipos de ficheros: uno en que las fichas están clasificadas por materias ordenadas conforme a algún catálogo sistemático, y otro que las clasifica por los nombres de los autores, ordenados alfabéticamente. De manera parecida, los motores de rastreo de la red suelen utilizar alternativamente dos métodos: uno es la búsqueda sistemática por catalogación de materias, y otro

la búsqueda por palabras cualesquiera (sean o no nombres propios) o por cadenas de palabras, organizadas o no en frases.

El más conocido de los buscadores, Yahoo, creado en la Universidad de Stanford, facilita ambos procedimientos, pero está especialmente configurado para el primero de ellos, como puede verse en la adjunta representación de su página principal en la versión castellana de la misma. Esta página expone las principales categorías que sirven de base al sistema de ordenación del buscador. Cada una de ellas se subdivide a su vez en otras, y todas ellas están jerárquicamente ordenadas de mayor a menor extensión, como sucede en los ficheros por materias de cualquier biblioteca o en los sistemas de categorías de la filosofía tradicional y moderna, desde ARISTÓTELES a KANT, que pretenden describir o inventariar de alguna manera, según adopte su autor una actitud idealista o realista, el mobiliario del pensamiento o de la realidad.

La búsqueda por términos consiste en que el usuario indica al programa buscador, tecleándolas en la pantalla, la palabra o palabras que son de su interés. El programa de búsqueda rastrea con pasmosa celeridad bases de datos de la red distribuidas por todo el mundo, selecciona de ellas los documentos que contienen la palabra o palabras buscadas y responde ofreciendo una lista de tales documentos que el usuario puede explorar a voluntad. Con harta frecuencia sucede que esa lista es demasiado numerosa para ser cómodamente inspeccionada, con el agravante de que la mayoría de los documentos que proporciona son irrelevantes para nuestro interés. A ello da lugar en buena medida el carácter mecánico de la búsqueda efectuada por el programa, que se reduce al mero cotejo externo de los términos buscados con los contenidos en los documentos de las bases de datos. Pero nuestra búsqueda puede ser eventualmente «refinada» conectando los términos buscados mediante operadores booleanos (AND, OR, NOT) o intercomillando una cadena de palabras (por ejemplo, el título de un libro). Estas precisiones ayudan a «filtrar» algo mejor la información obtenida, depurándola de documentos irrelevantes. El reciente buscador Google, también creado en la Universidad de Stanford, suele proporcionar información mejor filtrada que la de muchos de sus rivales.

El siguiente párrafo de Laszlo SOLYMAR ilustra el modo en que puede uno buscar información en Internet:

> Permítaseme que recurra a mi experiencia personal para poner, a título de ilustración, un ejemplo de búsqueda de un dato cultural utili-

ESPAÑA

Tarjeta Visa Yahoo!
Solicita tu tarjeta

¿NO TE ATREVES A DECIRSELO?

Empleo en Yahoo!
Ven a trabajar a Yahoo!

Buscar | Búsqueda avanzada

Buscar: Sitios en castellano Sólo sitios de España

Superliga Yahoo! - Monta tu propia competición

nformación: Noticias · Deportes · Finanzas · Sorteos · Tiempo **Ocio:** Astrología · Cartelera · Corazón · Juegos · TV
rsonal: Mi Yahoo! · Correo electrónico · Companion · Direcciones de contacto · Agenda y calendario · Fotos y maletín
unidad: Chat · Clubs · GeoCities · Messenger · Postales **Area comercial:** Anuncios · De compras · Subastas **Otros...**

e y cultura
ratura, Teatro, Museos...

ncia y tecnología
males, Informática, Ingeniería...

ncias sociales
nomía, Psicología, Historia...

portes y ocio
ol, Deportes, Turismo...

onomía y negocios
empresas, Para consumidores, Empleo...

ucación y formación
naria, Secundaria, Universidades...

pectáculos y diversión
e, Actores, Música, ¡Genial!...

Internet y ordenadores
WWW, Aplicaciones, Revistas...

Materiales de consulta
Bibliotecas, Diccionarios...

Medios de comunicación
Temas de actualidad, Periódicos, TV...

Política y gobierno
Países, Embajadas, Derecho...

Salud
Medicina, Enfermedades...

Sociedad
Gastronomía, Culturas, Religión...

Zonas geográficas
Países, Europa, España, CC.AA....

Actualidad
- La OTAN activa la clausula de defensa mutua
- Bin Laden fue visto en Kabul la semana pasada
- Israel bombardea Gaza
- La SEPI vende Aerolíneas Argentinas al grupo Marsans

más...

Comunidades
- Superliga Yahoo!: Crea tu equipo
- Yahoo! Messenger: Mensajería instantánea

De Compras
- Compras: Especial F1
- Subastas: Informática y multimedia

En Yahoo!
- **Móviles**: Modelos, comparativas
- Selecciones de la semana

más...

Más en Yahoo! España
Local: Noticias locales - Català - Euskera - Galego - Valencià
Noticias: En portada - Mundo - Nacional - Sociedad - Temas de actualidad
Deportes: Baloncesto - Ciclismo - F1 - Fútbol - Golf - Motos - NBA - Rally - Tenis - más
Economía y Finanzas: Empleo -Actualidad - Cotizaciones - Divisas - Finanzas personales - más
Ocio y entretenimiento: Astrología - Ocio - Software - Invitaciones
Comunicación: Correo - Chat - Clubs - Gente - Messenger - Móviles - Postales
Favoritos: Novedades - Selecciones de la semana - Selecciones de los navegantes

Yahoo! en el Mundo
En Europa: Alemania - Francia - Dinamarca - Italia - Noruega - R.Unido-Irlanda - Suecia
Asia Pacífico: Asia - Australia-NZ - China - Chino - Corea - HK - India - Japón - Singapur - Taiwán
América: Argentina - Brasil - Canadá - Canadá en francés - Estados Unidos - Español - México

Yahoo! en tu página de inicio

Sobre Yahoo! - Enlaces a Yahoo! - Publicidad - Infracción de derechos - Comentarios - Sugiera su sitio

Centro de privacidad

zando las facilidades que ofrece Internet [el dato cultural en cuestión es un pasaje de la tragedia *Agamenón* de Esquilo (siglo V a.C.) que recoge el soliloquio de un vigía que otea el horizonte aguardando una señal de fuego que transmite un mensaje][...] Yo tenía interés en citar bien el referido soliloquio de la tragedia de Esquilo, y a este fin quise contar con otra traducción además de la que tenía, razón por la cual inicié la correspondiente búsqueda en Internet. Primeramente recurrí a la página MSN de Microsoft [que sirve de entrada a Internet en numerosísimos ordenadores y dispone de un buscador]. Tecleé el título de la obra, AGAMMENON*, obteniendo como resultado el ofrecimiento de consultar 4.827 páginas *web* relacionadas con el tema. Empecé a hojear unas cuantas. Algunas versaban sobre música *pop* y otras sobre pornografía. Sin detenerme a averiguar cuál pueda ser la relación que conecte a la tragedia de Esquilo con estos dos campos, preferí refinar y hacer más precisa mi búsqueda tecleando ahora AGAMMENON AND ESQUILUS. Esta segunda búsqueda redujo a 531 el número de páginas *web* relacionadas.

Pareciéndome que seguían siendo demasiadas, decidí cambiar de buscador y le hice la misma consulta a *Lykos*, que en anteriores ocasiones me había prestado eficaces servicios. Pero esta vez no me dio una sola respuesta, como si la palabra AGAMMENON le fuese particularmente ingrata a ese programa de búsqueda. Entonces recurrí a *Yahoo*. Tecleé de nuevo la palabra AGAMMENON y obtuve por respuesta una cantidad, mucho más manejable, de 9 entradas, una de las cuales brindaba el texto completo de la tragedia en traducción de D. W. Myatt. Finalmente volví a la inicialmente consultada página MSN de Microsoft, en cuyo buscador tecleé AGAMMENON AND ESQUILUS AND MYATT. En la pantalla de mi ordenador aparecieron tres réplicas, una de las cuales no solamente indicaba tres traducciones de la obra por la que yo estaba interesado, sino también traducciones del teatro completo de Esquilo con múltiples referencias a artículos especializados. El tiempo consumido en mi pesquisa fue de unos quince minutos[1].

§ 6. *La cultura de Internet*

La tecnología de la comunicación supone, como cualquier tecnología, una infraestructura, que es su arquitectura interna (alguno de cuyos aspectos lógicos acabamos de considerar), y una superestructura, que es el conjunto de usos personales y sociales de la red con las múltiples implicaciones que de ellos se derivan, lo cual constituye, por así decirlo, una «cultura» específica.

El estudio de la infraestructura o arquitectura técnica de la red puede ser encuadrado dentro de lo que solemos llamar *telemática*. A

* En inglés, idioma del autor, esta palabra tiene dos emes.

[1] Laszlo SOLYMAR, *Getting the Message. A History of Communications*, Oxford University Press, Oxford, 1999, p. 284.

la cultura implicada por el uso de la red muchos la llaman *cibercultura*. A propósito de esta última hablaré aquí brevemente de: 1) las relaciones entre la cultura de red y la cultura del libro, y 2) el impacto social de la cibercultura.

a. La cultura de red y la cultura del libro

Es una opinión bastante extendida que los grandes medios de comunicación de masas, como el cine, la radio y sobre todo la televisión, van a acabar muy pronto, si no han acabado ya, con la cultura del libro. El fundamento de esta opinión está en el hecho de que la tarea de leer un libro es naturalmente más ardua que la tarea de escuchar la radio o de ver y escuchar cine y televisión. Leer un libro supone aislarse o abstraerse de los movimientos y ruidos del entorno natural y social y concentrarse en el silencioso recorrido mental de una serie de filas de inmóviles símbolos linearmente yuxtapuestos. Dejarse entretener por cualquiera de los otros tres medios de comunicación es mucho más cómodo, y contra eso el libro no puede luchar. Marshall MCLUHAN, el profeta de la moderna cultura de la comunicación de masas, sostenía la tesis de que nuestra forma de pensar depende de nuestra forma de comunicarnos, de que la forma de la comunicación configura el contenido de ésta y también la mentalidad de los comunicantes, y de ahí su famoso eslogan de que en materia de comunicación «el masaje es el mensaje». Él llevaba este eslogan a sus últimas consecuencias y sostenía que si los rasgos culturales de la moderna civilización occidental son el individualismo, el racionalismo y el gusto por la investigación científica y técnica es porque los hombres que construyeron esa civilización eran hombres cuyo modo lógico de pensar quedó configurado por el ejercicio sistemático y exclusivo de la lectura de libros. Pero recíprocamente, en la medida en que el cine, la radio y la televisión descansan en el uso de la imagen y la palabra hablada y su expansión parece incontenible, MCLUHAN profetizaba que estos medios a los que él llamaba *orales* conducirían progresivamente a la extinción de la *galaxia Gutenberg*, que es como él llamaba a la cultura del libro y al advenimiento de un nuevo tribalismo.

MCLUHAN empezó a desarrollar sus argumentos hace más de treinta años. Pero, independientemente del hecho de que puedan seguir o no siendo válidos para el caso del cine, la radio y la televisión, parece evidente que están muy lejos de ser aplicables sin más a

la tecnología de la red. La pantalla de la red es, ciertamente, una pantalla multimedia y, en la medida en que transmite imágenes y sonidos, se parece a la pantalla de televisión, pero no por esto debe olvidarse que no es una simple pantalla de televisión sino de ordenador y que exige por parte del usuario un esfuerzo mental y una disposición a la comunicación interactiva que no tiene nada que ver con la actitud pasiva del televidente.

Pero los que defienden la tesis del puro antagonismo entre la cultura del libro y la cultura de red sólo tienen en cuenta una parte de la cuestión, porque la otra es que ambas culturas son complementarias. Esto se pone de manifiesto reparando en las relaciones que guardan entre sí la actividad de *navegar*, que es la actividad más propia del usuario de Internet, y la actividad de *leer* un libro. Estas dos actividades son, por una parte, antagónicas pero, por otra, complementarias.

En las primeras páginas de su obra *Being digital* («Ser digital», traducida al castellano como *El mundo digital*), el famoso director del Laboratorio de medios del Instituto de Tecnología de Masachussetts, Nicolás NEGROPONTE, nos sorprende contándonos que él es disléxico y que desde pequeño estaba incapacitado para leer libros. En lugar de ello, y a diferencia de sus compañeros de clase, se entretenía mirando mapas y saltando caprichosamente de un país a otro, lo cual le reportó un conocimiento de la geografía no americana superior al de sus colegas yanquis. Ésta es una manera indirecta de decirnos que él, inepto por naturaleza para la lectura de libros, era en cambio apto por naturaleza para navegar en la red. Porque la navegación en la red se apoya esencialmente, como bien sabemos, en el uso del *hipertexto*.

Pero si la red nos brinda la posibilidad de estas tres cosas: 1.ª, disponer de los potentísimos motores de búsqueda lógica que son los buscadores; 2.ª, recorrer con ellos merced a la telaraña mundial el inmenso océano de información escrita depositada en soporte electrónico que son los bancos de datos diseminados por todo el mundo, y 3.ª, seleccionar en pantalla o en disco la información deseada, entonces la mejor manera de definirla a efectos del tráfico de información escrita es decir de ella, como ha subrayado de KERCKHOVE, que es un colosal aparato *acelerador y selector de información.*

Esto, evidentemente, es lo que mejor define la función de navegar. Pero también es evidente que la pantalla electrónica no es nada cómoda para la vista, sobre todo cuando se trata de leer en ella dete-

nidamente un texto. Y de aquí la necesidad del papel, en el cual los símbolos de lectura están depositados remansadamente y en un medio menos agresivo para la vista, lo cual permite leer en el pleno sentido de la palabra, que es deslizar tranquilamente la vista sobre las filas de símbolos que tenemos delante y meditar con calma sobre su contenido.

La conclusión que se saca de aquí es que debe haber una colaboración entre texto e hipertexto. Si la red es el medio ideal para navegar y el papel impreso el medio ideal de lectura, entonces la necesidad del concurso de ambos es evidente. La red es como una inmensa biblioteca que recorremos navegando con ayuda de la técnica del hipertexto y el libro el texto que al final seleccionamos para leer y que cuando le llegue su hora al libro electrónico, supuesto que esté confortablemente preparado para la lectura, será también producto de Internet.

b. El impacto social de Internet

Uno de los aspectos socialmente más atractivos de Internet, dejando aparte los tremendos cambios que ha introducido en la economía y el comercio, es la espontánea proliferación de asociaciones y grupos de toda índole y de la más diversa finalidad, desde el intercambio científico a la ayuda mutua, la charla o el juego dramático de *roles* con simulación de cambio de identidad personal. Son las llamadas *comunidades virtuales*, compuestas por decenas, centenas o millares y millares de personas que viven en lugares muy distantes del planeta y que eran totalmente desconocidas entre sí antes de ingresar voluntariamente en la comunidad.

Rasgos fundamentales que campean en todas esas comunidades son el igualitarismo y la participación. Algunos han comparado estos nuevos fenómenos sociales con los famosos cafés que florecieron en el siglo XVIII en el alba de la democracia. No eran clubes aristocráticos, sino centros frecuentados por gente de todas las clases. En ellos se charlaba, opinaba y discutía de negocios o de política, se leían los periódicos, que entonces conectaban real e interactivamente con su público, y todo ciudadano, cualquiera que fuese su lugar en la sociedad, podía lanzar nuevas ideas, que los demás escuchaban atentamente. En uno de estos cafés se fraguó, por ejemplo, la idea que dio lugar a la creación de la compañía de seguros Lloyd de Londres. El filósofo alemán HABERMAS ha descrito esos

episodios como uno de los momentos más limpios y prometedores de la gestación de la esfera pública desde abajo y en el seno de una sociedad realmente participativa. Son la más clara manifestación del respeto a la diferencia que ha introducido la filosofía posmoderna.

Pero también solemos encontrar descripciones de la sociedad de la red que nos la pintan de otra manera. Todos los analistas y tratadistas de las sociedades capitalistas avanzadas están de acuerdo en que las nuevas tecnologías de la comunicación han introducido en dichas sociedades una serie de cambios estructurales que les afectan muy profundamente, entre ellos «la emergencia de nuevas formas de interacción humana» que discurren en «un dominio público generado por ordenadores que no tiene límites territoriales ni atributos físicos y está en perpetuo uso». Ese dominio público generado por ordenadores, carente de atributos físicos y perpetuamente utilizable, como teatro o escenario de las nuevas formas de interacción humana que nos brinda Internet, no es un espacio o plaza real, sino ideal o virtual, como son las imágenes de los espejos o las proyecciones matemáticas, y esto es lo que se ha dado en llamar con el metafórico nombre de *ciberespacio*.

Una connotación esencial del ciberespacio, de la que han sido precursores el telégrafo y el teléfono, es la desterritorialización, la destrucción de la distancia territorial que ahora puede eventualmente serlo de todo el planeta. Esta destrucción de la distancia territorial ha sido criticada, y con tanto mayor énfasis en la medida en que pueda ser global, por DELEUZE, VIRILIO, DREYFUS y otros autores. Parte de esta crítica se basa en el argumento de que nuestra obsesión por relacionarnos con lo lejano nos hace olvidar nuestra relación con lo próximo y cercano y produce en nosotros desarraigo. Pero otros (por ejemplo, STRATTON, 1997) advierten además que, desde el punto de vista del poder económico y del poder político, el ciberespacio abre, por así decirlo, un espacio de explotación. La destrucción de la distancia era, según MARX, una obsesión del capital, que siempre luchó, en su batalla por distribuir la mercancía, contra el tiempo que se tarda en recorrer el espacio. Y la circunstancia de que una de las pocas cosas que puedan viajar a través de la red, no sólo en *bits*, sino en átomos (por usar la jerga de NEGROPONTE), sea el dinero, otorga a esta entidad una situación de privilegio en los viajes ciberespaciales que hace enormemente alta la probabilidad *a priori* de que el ciberespacio se convierta en un mercado global, en un cibermercado.

En un discurso pronunciado en Kioto (Japón), en 1994, el vicepresidente norteamericano Al Gore expone el proyecto de la red como algo que parece ser antes económico que cultural:

> El esfuerzo en la construcción de la GII [*global information infrastructure*, estructura global de información] nos dará la oportunidad de conseguir, más allá de la ideología, la forja de una meta común que proporcione una infraestructura que beneficiará a todos los ciudadanos de nuestras naciones. Usaremos esta infraestructura para ayudar a nuestras respectivas economías y promover la salud, la educación, la protección ambiental y la democracia.

La conclusión que se saca de aquí es que desde el punto de vista social podemos hacer dos lecturas de la red y del ciberespacio: una que interpreta su presencia como la promesa de una nueva democracia cada vez más igualitaria y más participativa, interactiva y abierta a las diferencias, y otra que parece no excluir el deseo de ver en Internet una plataforma unitaria desde la cual se pudiera lograr que la población mundial se convirtiera en audiencia. Según una u otra visión, serán obviamente distintas nuestras expectativas y nuestra respuesta ante la pregunta: ¿quién gobierna el ciberespacio?

§ 7. *La lógica en Internet*

Una cosa es preguntar por la lógica interna que preside la arquitectura de Internet y otra, más concreta y práctica, preguntar por los servicios de lógica que oferta la red al usuario que los demande. A esta segunda pregunta se responde, sencillamente, señalando algunos de los principales sitios y portales de Internet dedicados a este fin. Indicaré la dirección de unos cuantos y comentaré con algún detalle uno de los programas ofrecido por uno de ellos, el programa *Tarski's World.*

a. *El sitio Mathematical Logic around the world*

El sitio de mayor interés general para la lógica matemática en Internet es seguramente el denominado *Mathematical Logic around the world* (dirección en la red: http://www.uni-bonn.de/logic/world.html). Es un servicio suministrado por el *Mathematical Logic Group*, de la Universidad de Bonn, y el *Institute for Logic*, de la

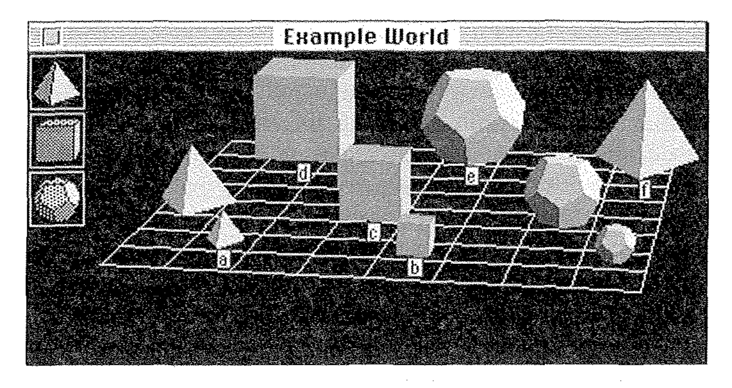
Universidad de Viena. Proporciona conexión con las principales revistas, departamentos universitarios y asociaciones de lógica matemática de todo el mundo y con numerosas páginas *web* que le son afines, e informa sobre el calendario de conferencias, reuniones y simposios de esta materia.

b. El programa Tarski's World

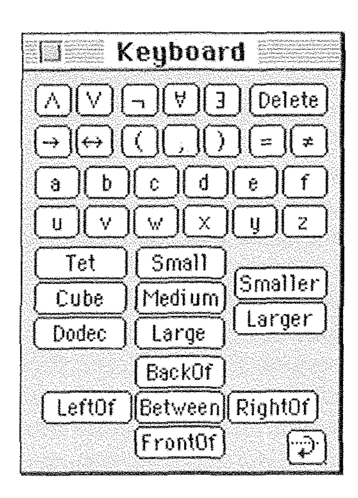
Pero, desde el punto de vista de la praxis de la lógica elemental y su docencia, es particularmente recomendable el conjunto de programas de lógica desarrollados por Jon BARWISE y John ETCHEMENDY en el CSLI (Centro para el estudio del Lenguaje y la Información) de la Universidad de Stanford. Bajo el rótulo principal de *Logic Software from CSLI* y con la dirección: http://www-csli.stanford.edu/hp/Logic-software.html, estos autores informan sobre el referido conjunto de programas de lógica, entre los que destaca por su valor docente el llamado *Tarski's World* («el mundo de Tarski»), destinado a la enseñanza de la semántica de primer orden.

Este programa suministra un entorno o contexto informático donde el estudiante puede configurar mundos de objetos geométricos y describirlos con ayuda del lenguaje formal de la lógica de primer orden. La intención de los autores es poder imponer a los alumnos de cursos elementales en el dominio del lenguaje de primer orden construyendo primero una serie de modelos semánticos a los cuales se pueda aplicar dicho lenguaje de una manera absolutamente inequívoca, y dejando para un momento posterior el problema de correlacionar el simplicísimo lenguaje de la lógica elemental con el lenguaje natural, cuyas innumerables sutilezas, ambigüedades y presuposiciones requieren del alumno una mayor dosis de reflexión analítica.

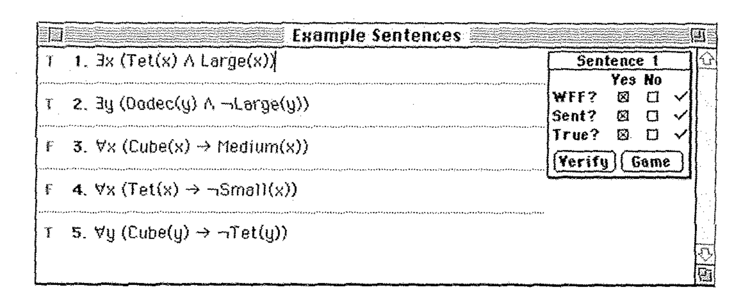
La primera de las figuras que siguen a continuación es la ventana que representa a uno de esos mundos en la pantalla del ordenador. Los objetos son tetraedros, cubos, y dodecaedros de tamaño mayor o menor. Haciendo clic en cualquiera de los tres tipos de objeto que se ordenan en columna a la izquierda de la ventana el ordenador hace que aparezca en el escenario de ese mundo (la rejilla o alfombra cuadriculada) un objeto que responde al tipo elegido. Los objetos que así van apareciendo tienen propiedades estructurales y guardan entre sí relaciones espaciales, dando lugar por tanto a determinados «hechos».



Pero esos hechos pueden ser descritos construyendo las oportunas fórmulas de lógica elemental con ayuda de la tabla de símbolos contenida en la figura que sigue a estas líneas. En esa tabla el lector podrá reconocer: 1) los principales símbolos constantes de la lógica elemental —los cinco conectores y los dos cuantificadores (A y E invertidas)—, junto con los paréntesis y la coma y los signos de igualdad y desigualdad; (2) las letras minúsculas iniciales del alfabeto que hacen las veces de nombres propios para denotar inequívocamente entre objetos individuales; 3) las letras finales del alfabeto que hacen las veces de variables de individuo; y, finalmente, 4) una serie de predicados monádicos (tetraedro, cubo, dodecaedro, pequeño, mediano, grande) y diádicos (mayor, menor, detrás de, a la izquierda de, entre, a la derecha de, delante de). La etiqueta *delete* alude a la operación de borrar.



El programa *Tarski's World* ofrece al usuario una tercera ventana en la pantalla de su ordenador, donde puede construir y evaluar fórmulas de lógica elemental. La figura que sigue a continuación recoge a manera de ejemplo en sendas fórmulas una serie de descripciones de «hechos» que tienen lugar en el mundo dibujado en la primera de las dos figuras anteriores. El lector puede construir esas fórmulas, carácter tras carácter pinchando con el ratón en la tabla de símbolos cada de uno de los signos que precise utilizar para confeccionarlas. Pero antes deberá cuidarse de haber «bautizado» cada uno de los objetos geométricos presentes en la alfombra cuadriculada de la «ventana del mundo» asignándoles inequívocamente a guisa de nombres propios las correspondientes letras iniciales del alfabeto. Las fórmulas 1, 2 y 5 enuncian con verdad tres hechos de ese mundo (que hay un tetraedro grande, que hay un dodecaedro que no tiene ese tamaño, y que ningún objeto puede ser al mismo tiempo «cubo» y «tetraedro»).



El recuadro situado en la esquina superior derecha de la tabla de fórmulas decide con un sí o con un no cuando el usuario lo requiere, si cada una de las fórmulas escritas es una fórmula bien formada (WFF), si constituye una oración o enunciado y si posee la condición de verdad supuesto el mundo antes descrito. (Obviamente, el primer y el segundo de estos tres chequeos son sintácticos y el tercero semántico.) Las fórmulas tercera y cuarta de las recogidas en esta tabla son falsas porque los hechos que describen no se dan en el contexto o mundo supuesto.

Finalmente el programa *Tarski's World* ofrece al usuario la posibilidad de aventurarse en un *juego o estrategia de ganancia o de pérdida* respecto de cada una de las fórmulas o enunciados en él propuestos. Este juego da por supuesta la existencia de un debate ra-

cional, dialéctico o *dialógico*, tal como el propuesto desde hace varias décadas por autores como LORENZEN y HINTIKKA, entre dos sujetos racionales, un *proponente* y un *oponente*, que se someten para dirimirlo a las reglas de la lógica. (En el caso del *Tarski's World* los jugadores o contendientes son, por una parte, el usuario del programa y, por otra, el programa mismo.) Cuando uno inicia el debate partiendo de una verdad lógica, tiene, como es de suponer, todas las bazas a su favor si los contendientes respetan las reglas. Pero, cuando no es ése el caso, el resultado final dependerá —supuesto que se respeten las reglas— de la información que, de hecho, uno tenga sobre el mundo.

Las reglas del juego son algo que se parece mucho a una nueva versión de las ya conocidas reglas de la lógica elemental. Si uno de los contendientes se compromete, por ejemplo, a afirmar un enunciado complejo que tiene la forma de una *conjunción*, sólo podrá estar seguro de ganarlo si se encuentra en condiciones de demostrar la verdad de cada uno de los componentes de esa conjunción, mientras que, si lo niega, sólo podrá tener esa misma seguridad si se encuentra en condiciones de demostrar la falsedad de al menos uno de esos componentes. Si el enunciado afirmado fuese una *disyunción*, la ganancia está asegurada si quien lo afirma está en condiciones de demostrar la verdad de al menos uno de sus extremos, mientras que si, por el contrario, se niega esa disyunción, quien lo haga necesitará estar preparado para demostrar la falsedad de cada uno de los mismos. Toda negación acarrea el compromiso de poder probar la falsedad de la proposición negada, e inversamente sucedería si la tesis propuesta fuese la falsedad de esa negación. La formulación de las reglas correspondientes a la *implicación* y a la *coimplicación* se ahorra reduciendo la implicación a su equivalente en términos de negador y disyuntor y la coimplicación a su equivalente en términos de conjuntor e implicador.

Las reglas de cuantificación no conllevan la manipulación de fórmulas más simples extraídas de otras más complejas, como sucede en el caso de las reglas de conectores, sino la aportación o indicación de individuos a los que afecta el alcance de esa cuantificación. Si el enunciado afirmado es una particularización, $\forall$ x P(x), el que la proponga se compromete, si no quiere perder el juego, a aducir, cuando su adversario se lo pida, un objeto que satisfaga la fórmula a la cual se ha aplicado el cuantificador. Mientras que, si lo que defendiese fuera la negación de esa cuantificación, quedaría obligado a sostener que no hay ningún individuo que satisfaga la re-

ferida fórmula alcanzada por la cuantificación, perdiendo el juego cuando su adversario logre señalar un individuo que efectivamente satisfaga esa fórmula.

Pero si la fórmula propuesta fuese una generalización, ∃ x P(x), el que la propusiese adquiriría el compromiso de poder demostrar que todo objeto del conjunto determinado por la fórmula cuantificada cumple lo exigido por ésta, perdiendo el juego si su adversario lograse aducir un objeto que incumpliese tal exigencia. Lo inverso sucedería si la generalización fuese negada.

En la siguiente tabla resumen BARWISE y ETCHAMENDY la formulación de estas reglas

Summary of the game rules[1]

FORM[2]	YOUR COMMITMENT[3]	PLAYER TO MOVE[4]	GOAL[5]
P ∨ Q	TRUE FALSE	you Tarski's World	Choose one of P, Q taht is true.
P ∧ Q	TRUE FALSE	Tarski's World you	Choose one of P, Q that is false.
∃ × P (x)	TRUE FALSE	you Tarski's World	Choose some *b* that satisfies the wff P(x).
∀× P (x)	TRUE FALSE	Tarski's World you	Choose some *b* that does not satisfy P(x).
¬ P	either	—	Replace by P and switch commitment.
P → Q	either	—	Replace P → Q by ¬ P ∨ Q and keep commitment.
P ↔ Q	either	—	Replace P ↔ Q by (Pt→Q) ∧ (Q→P) and keep commitment.

[1] Sumario de las reglas de juego.

[2] FORMA. En cada uno de las casillas de esta primera columna figura un esquema formal protagonizado por una de siete constantes lógicas elementales [los dos conectores booleanos ∨, &; los dos cuantificadores, ∃ (x), ∀ (x); el negador, ¬); y la pareja implicativa →, ↔]. En cada caso el esquema formal en cuestión es un posible punto de partida de un debate o juego dialógico.

[3] TU COMPROMISO. Las cuatro primeras casillas de esta primera columna indican el compromiso veritativo [VERDADERO (*TRUE*), FALSO (*FALSE*)] que en cada caso asume cada uno de los dos jugadores o contendientes. En las tres últimos casillas la palabra *either* (cualquiera de los dos) indica que en sus respectivos casos la regla no precisa detallar específicamente ese compromiso.

[4] JUGADOR DE TURNO. En las casillas primera y tercera de esta primera columna el ponente es el usuario [TU (*YOU*)] y el oponente el programa *Tarski's World.* En las casillas segunda y cuarta sucede al revés. (La inversa de cada uno de estos cuatro su-

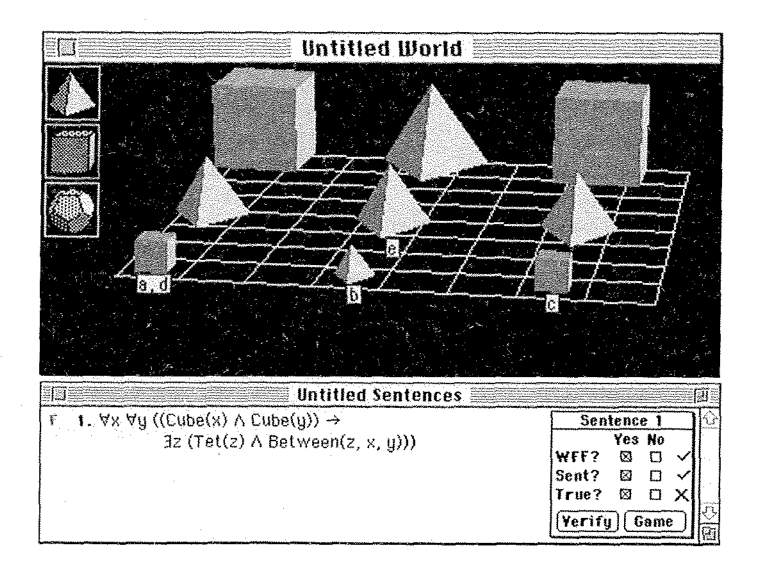
puestos puede ser trivialmente construida por el lector.) En las tres últimas casillas la regla de juego correspondiente no precisa detallar esa especificación.

[5] META (*GOAL*). El contenido de cada una de las siete casillas de esta columna se puede traducir así: 1. Del par de elementos P, Q elige uno que sea verdadero. 2. Del par de elementos P, Q elige uno que sea falso. 3. Elige algún b que satisfaga la *wff* (abreviatura inglesa de «fórmula bien formada») P(x) [en el simbolismo de estos autores, como en los de otros muchos, las fórmulas «abiertas» com P(x) se consideran fórmulas bien formada]*. 4. Elige un *b* que no satisfaga P(x). 5. Reemplaza ¬P por P y cambia tu compromiso. 6. Reemplaza P → Q por ¬P ∨ Q y mantén tu compromiso. 7. Reemplaza P ↔ Q por (P → Q) & (Q → P) y mantén tu compromiso.

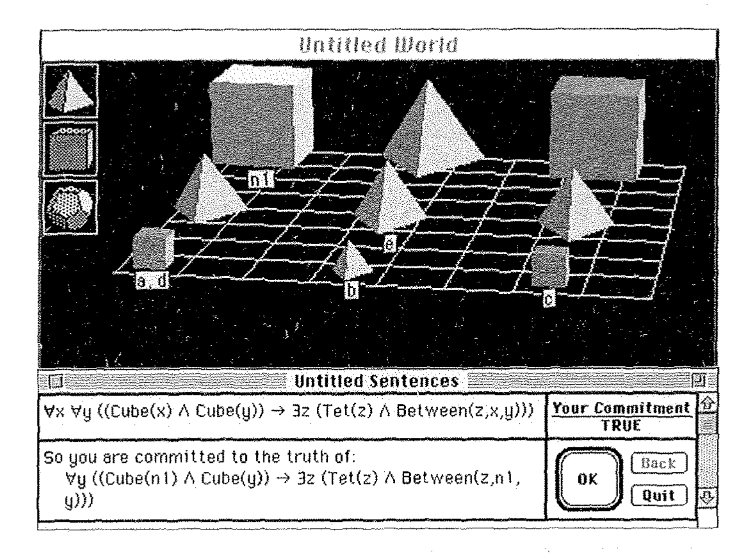
Ejemplo de juego lógico en el Mundo de Tarski

Las cuatro tablas de fórmulas que siguen a continuación, cada una de ellas precedida de su correspondiente escenario semántico en el mundo de Tarski, reflejan el inicio, el desarrollo y el final de un debate dialógico que el proponente pierde al dar precipitadamente por cierto que en el mundo semántico que ilustran estas figuras la proposición «dados dos cubos cualesquiera, hay un tetraedro entre ellos» es en todo caso válida. El lector puede encontrar una detallada explicación de los movimientos de este ejemplo en las páginas de Internet. Baste indicar aquí que la clave del fracaso del proponente está en no haber reparado a tiempo en que nada prohíbe que las dos variables, *x* e *y*, capturadas en la fórmula inicial por sendos cuantificadores universales, sean sustituidas por un mismo individuo.

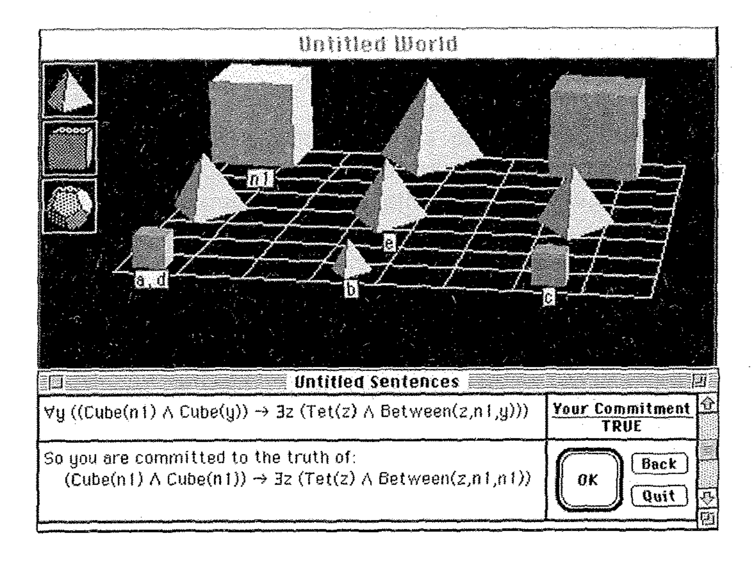
La tesis inicial



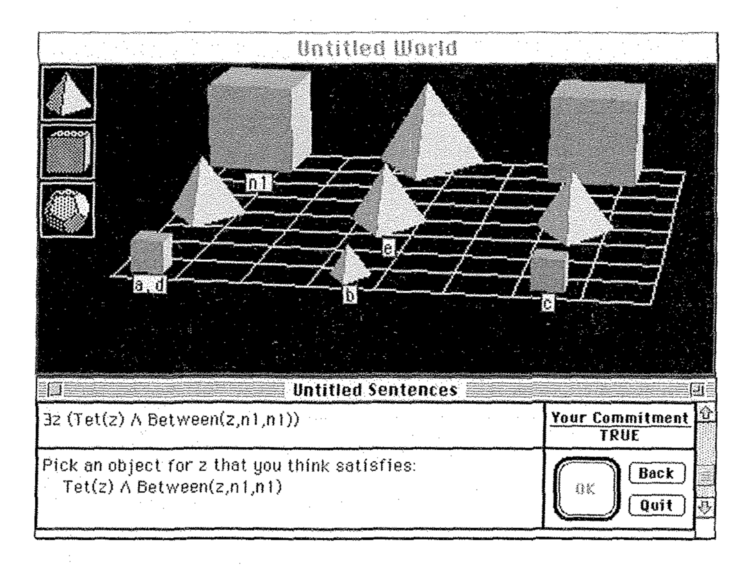
PRIMER MOVIMIENTO DEL ADVERSARIO (es decir, «el mundo de Tarski»), que pide al ponente que acepte, siendo consecuente, que su tesis continúa siendo válida, después de reemplazar legítimamente en ella la primera variable por el nombre de un objeto, «n1».



SEGUNDO MOVIMIENTO DEL ADVERSARIO, que pone en un aprieto al ponente al pedirle que acepte, si es consecuente, que, si la tesis inicial es válida, tendrá que seguir siéndolo tras sustituir en ella, también legítimamente, a la segunda variable por *el mismo* nombre de objeto.



FINAL DEL JUEGO. Si el ponente no se ha rendido ya, tendrá que hacerlo cuando el adversario le pide que aduzca un objeto que sustituya a la tercera variable, afectada por el cuantificador particular, y que satisfaga, lo cual es evidentemente imposible, las condiciones de la conjunción resultante.



c. *Máquinas de Turing*

En el sitio *web* que acabo de citar, BARWISE y ETCHAMENDY informan también sobre su programa *Turing's World*, que sirve de introducción a la teoría de las máquinas de Turing y a la lógica de la computación.

En el sitio *Visual Turing* cuya dirección en la red es http://www.cheransoft.com/vturing/, figura un programa elaborado por el servicio *sheran software* que permite editar y manipular máquinas de Turing.

d. *Automatización del razonamiento*

BARWISE y ETCHAMENDY informan también en el sitio citado sobre otro de sus programas lógicos, Hyperproof, destinado al adiestramiento en el razonamiento analítico.

En el sitio http://gtps.math.cmu.edu/tps-about.html pueden encontrarse los programas TPS (*Theorem Proving System*) y ETPS

(*Educational Theorem Proving System*), que han sido utilizados en la Universidad Carnegie Mellon. Son, respectivamente, un demostrador automático de teoremas para lógica de primer orden y teoría de tipos y una aplicación interactiva del mismo bastante recortada para propósitos educacionales. Ambos están escritos en el lenguaje *Common Lisp* y desarrollados sobre plataformas Unix y Linux.

Trabajando respectivamente en las Universidades de Cambridge y Berlín, Larry PAULSON y Tobias NIPKOV han desarrollado un entorno de demostración de teoremas llamado *Isabelle* sobre el cual puede encontrarse información en la página de igual denominación que puede localizarse en la red buscando la dirección: http://www.cl.cam.ac.uk/Research/HVG/Isabelle/index.html

ANEXO

BREVE HISTORIA DE LA LÓGICA

A. LA IMAGEN TRADICIONAL DE LA LÓGICA

§ 1. *La imagen griega de la lógica*

La pasión por la vida pública y por la meditación filosófica y científica forman parte del alma de la cultura griega, y ambos tipos de actividad exigen saber argumentar; la confección y acumulación de pruebas interesan tanto al abogado y al político como al investigador de la naturaleza. ZENÓN DE ELEA, famoso por sus paradojas, fue un genio en el arte del razonamiento dialéctico, en el que también descollaron SÓCRATES y PLATÓN. Y los SOFISTAS eran muy solicitados como maestros de retórica.

a. *La lógica de Aristóteles.* Sin embargo, nadie antes de ARISTÓTELES (384/83-322 a.C.) investigó temáticamente la lógica como tal, es decir como teoría de la inferencia. De ello es consciente el propio filósofo, quien al final de una de sus primeras obras lógicas [1], *Sobre la refutación de los sofismas*, escribió: «En cuanto a esta investigación, no es que una parte estuviera ya previamente elaborada y otra no, sino que no había nada en absoluto [...]. Sobre las cuestiones de retórica existían ya muchos y antiguos escritos, mientras que sobre el razonar (*perí dé toú syllogídsesthai*) no teníamos absolutamente nada anterior que citar, sino que hemos debido afanarnos empleando mucho tiempo en investigar y con gran esfuerzo.»

Con todo, el asunto abordado en las primeras obras lógicas de Aristóteles, como son el tratado de los *Tópicos* y la que acabo de citar, no es la lógica de la ciencia, sino la *dialéctica* o lógica de la opinión, la teoría de la argumentación no necesaria, sino solamente probable, que es la que ejercitamos en la vida diaria y de la que disponemos cuando aún no se ha generado la ciencia. Sólo bastante más tarde, ya en fase de plena madurez, escribió Aristóteles, en la obra transmitida con el título *Segundos Analíticos*, su teoría de la demostración o razonamiento científico. Y más tarde aún llevaría a cabo el análisis puramente formal del razonamiento o silogismo en los *Primeros Analíticos*.

A Aristóteles debemos, pues, los principales criterios de división de la lógica. Uno consiste en contraponer la *analítica* a la *dialéctica*, la lógica de la argumentación rigurosa a la lógica de la opinión. Es éste un criterio que ha perdurado hasta Kant, cuya *Crítica de la razón pura* se divide precisamente en «Analítica trascendental» y «Dialéctica trascendental». Por otra parte la diferencia entre los *Primeros* y los *Segundos Analíticos* introduce otro importante criterio de división de la lógica en *formal* y *material*, en sintaxis y semántica. Y aunque éstas son etiquetas que Aristóteles

---

[1] Tras la muerte de Aristóteles sus seguidores reunieron los escritos lógicos del maestro en un conglomerado al que dieron el nombre general de *Organon* (palabra que significa «instrumento»). Este conglomerado contenía seis obras, ordenadas sistemáticamente: *Categorías, Peri hermeneias* (= *De interpretatione*), *Primeros Analíticos, Segundos Analíticos, Tópicos, Sobre las refutaciones sofísticas.* Las dos primeras versan, respectivamente, sobre el concepto y la proposición, que son preámbulo de la inferencia, tema de las restantes.

no llegó a emplear expresamente, el siguiente testimonio del gran comentador de la escuela peripatética ALEJANDRO DE AFRODISIA, que enseñó en Atenas quinientos años después de su maestro (hacia el siglo II de nuestra era), pone de relieve el carácter *formal* de la lógica de Aristóteles al decir de éste que «desarrolla su discurso valiéndose de letras, para mostrarnos que las conclusiones no surgen por virtud de la materia, sino por virtud de esta forma o figura (*skhéema*) y de esta combinación y modo de las premisas; el silogismo no concluye [...] por causa de la materia, sino por ser tal la fórmula (*sydsygía*). Las letras indican que la conclusión será la que es generalmente, siempre y cualquiera que sea la materia que se suponga.»

¿Axiomatizó Aristóteles su silogística? El lógico polaco Jan ŁUKASIEWICZ ha investigado la lógica griega con el instrumental de la contemporánea. Una de sus principales conclusiones respecto de la silogística, tal y como aparece expuesta en los *Primeros Analíticos*, es que Aristóteles la organizó axiomáticamente. El propio Łukasiewicz ha diseñado por su cuenta un sistema axiomático totalmente formalizado de la teoría del silogismo aristotélico.

Es evidente que en los *Primeros Analíticos* se establecen relaciones deductivas de reducción entre los silogismos perfectos (primera figura) y los imperfectos (segunda y tercera figuras). Pero quizá sea más acertado pensar con CORCORAN que a Aristóteles no le interesó ni le hubiera interesado axiomatizar la lógica, que no era para él una ciencia sustantiva o propiamente dicha, sino un simple *órgano* o instrumento de construcción científica. En los *Segundos Analíticos*, que es un tratado de teoría de la ciencia donde no se considera ya el razonamiento en su mera estructura formal sino en su contenido científico, sí que se ocupa expresamente Aristóteles del método axiomático. Allí advierte que es ése un método sobre todo adecuado para la matemática, pues en ésta, más que en cualquier otra ciencia, los axiomas son las primeras premisas indemostrables de las que deben partir y en las que en última instancia deben apoyarse las pruebas científicas. Pero las leyes de la lógica no son, desde el punto de vista aristotélico, premisas ni principios materiales de ninguna prueba científica, sino reglas formales que gobiernan desde fuera la marcha de la investigación. Por virtud de la lógica las diversas ciencias extraen de los principios y los hechos de sus campos respectivos las correspondientes conclusiones. Esto invita a pensar que es bastante probable que Aristóteles no concibiera su silogística como un sistema axiomático, sino como un sistema metalingüístico de reglas de deducción natural, que no son ingredientes o factores materialmente constitutivos de las pruebas científicas, sino formalmente regulativos de ellas. E. W. BETH, creador del método de las tablas semánticas, ha recordado, por otra parte, que fue Aristóteles quien primero utilizó el método semántico de modelos al descartar por contraejemplo formas inválidas de argumento.

Las limitaciones de la lógica aristotélica son manifiestas. Los lógicos contemporáneos señalan con razón el muy insuficiente conocimiento de la lógica proposicional por parte de Aristóteles. Y, desde DE MORGAN, se insiste en la limitación de la silogística aristotélica, basada en predicación monádica, para dar cuenta del hecho de la predicación relativa.

Finalmente conviene recordar que otra aportación que debemos a Aristóteles (y que la lógica matemática no supo abordar hasta muy adentrado el siglo veinte) es la llamada *lógica modal*. Esta lógica resulta del análisis de proposiciones a las que anteponemos cualquiera de las cuatro partículas modales: *posible* (p. ej., «es posible que haya seres inteligentes en otros lugares del universo»), *necesario* (p. ej., «es necesario que dos y dos sean cuatro»), *imposible* (p. ej., «es imposible que un círculo sea cuadrado») y *contingente* (contingente es lo que puede darse y puede no darse, como, p. ej., «es contingente que el equipo A gane al equipo B»). Estos prefijos modifican

la estructura lógica de las proposiciones y de los argumentos en los que intervienen. Esto da lugar a la teoría de la proposición y del razonamiento modal. De la primera se ocupa Aristóteles en su breve tratado *Perí hermeneías* y de la segunda en los *Primeros Analíticos,* donde además de los famosos catorce modos legítimos de la primera, segunda y tercera figuras del silogismo categórico, investigó prácticamente un centenar de modos correspondientes a la teoría del silogismo modal.

b. *La lógica megárico-estoica.* A diferencia de lo que sucede con Aristóteles, cuyos escritos lógicos se han conservado con bastante integridad, sólo conocemos textos fragmentarios de los lógicos megáricos y estoicos a través del testimonio de sus contemporáneos, lo cual nos permite, sin embargo, advertir que con ellos se desarrolla por vez primera la lógica proposicional y la teoría de los conectores [2].

La *escuela megárica,* fundada en el siglo V a.C. por Euclides de Megara, discípulo de Sócrates, es anterior a la estoica. En ella florecieron los lógicos DIODORO CRONO (siglo IV a.C.) y su discípulo FILÓN DE MEGARA. Sobre la enconada polémica que ambos mantuvieron acerca del condicional (interpretado en el sentido que hoy llamamos extensional por el discípulo y en el de una lógica modal por el maestro) puede el lector releer la nota 11 del Capítulo II de este libro. «Hasta los cuervos —diría dos siglos más tarde Calímaco, bibliotecario de Alejandría— graznan en los tejados sobre el sentido de la implicación.»

Los lógicos de la *escuela estoica,* el más brillante de los cuales fue CRISIPO (siglo III a.C.), no sólo dominan el lenguaje de los conectores. Cuentan con un sistema deductivo basado en cinco reglas de inferencia o «indemostrables» que formulan así:

I. Si lo primero, entonces lo segundo; pero lo primero; por tanto, lo segundo.
II. Si lo primero, entonces lo segundo; pero no lo segundo; por tanto, no lo primero.
III. No a la vez lo primero y lo segundo; pero lo primero; por tanto, no lo segundo.
IV. O lo primero o lo segundo; pero lo primero; por tanto, no lo segundo.
V. O lo primero o lo segundo; pero no lo segundo; por tanto, lo primero.

Las denominaciones ordinales («lo primero», «lo segundo») cumplen la función de variables proposicionales. El lector habrá reconocido en I y II lo que la tradición posterior llamará *modus ponens* y *modus tollens,* y en IV y V dos formas de silogismo disyuntivo (con «o» exclusiva al menos en la premisa mayor de IV).

Al establecer una triple diferencia entre 1) la voz significante, 2) la cosa a la que alude o se refiere la voz, y 3) el significado de ésta, los estoicos parecen anticipar la *semántica* de Frege. Entre la voz, que es corpórea, y la cosa, también corpórea, referida por la voz, está el significado, que es incorpóreo y se define como «lo que el bárbaro no entiende cuando un griego habla».

---

[2] Dos monografías interesantes sobre la lógica de los estoicos son: Jan ŁUKASIEWICZ, *Para una historia de la lógica de enunciados*, traducción de José Sanmartín, Cuadernos Teorema, Valencia; y Benson MATES, *Lógica de los estoicos*, traducción de Miguel García Baró, Cuadernos de Filosofía y Ensayo, Tecnos, Madrid, 1985.

En este mismo plano se mueven los largos análisis llevados a cabo por los estoicos de la primera paradoja semántica: el *pseudómenos* (=mentiroso), que recurrirá a todo lo largo de la historia de la lógica, desde la escolástica medieval a Russell.

La frase paradójica «Todos los cretenses mienten» le fue atribuida al filósofo cretense EPIMÉNIDES, que vivió en el siglo VI a.C. [3]. Lo que hay de paradójico en ella se advierte considerando que si es verdad que todos los cretenses mienten, miente el que lo dice, si es cretense, y entonces la frase no es verdad. Con este otro formato, que recoge Cicerón, la paradoja del mentiroso le es atribuida a Eubúlides (siglo IV a.C.): «Si miento y digo que miento, ¿miento o digo la verdad?» La tradición cuenta que Teofrasto, discípulo de Aristóteles, escribió tres libros sobre el tema y Crisipo más de veinte, y que al lógico Filitas de Cos la investigación de aquel enigma le costó la muerte por extenuación.

§ 2. *La imagen medieval de la lógica*

a. *El sentido de la lógica medieval.* La estampa, dibujada por el pensamiento moderno, de la Edad Media como «edad oscura» no es del todo fidedigna en lo que concierne a la historia de la lógica. Es cierto que en el cuadro de valores de esa época, y exceptuando a los filósofos árabes, el conocimiento científico no ocupó el lugar privilegiado que le otorgaron antes los antiguos pensadores griegos y después los modernos. Pero la necesidad de llevar a cabo un análisis racional de los textos de las Escrituras estimuló en los teólogos cristianos la investigación de interesantes estructuras lógicas y el desarrollo de lo que hoy llamaríamos una «lógica del lenguaje ordinario». MOODY, historiador de la lógica, ha escrito[4] que «mientras el objetivo primordial del desarrollo de la lógica de Aristóteles fue exhibir la estructura formal de las demostraciones en las ciencias de la naturaleza, y el de la lógica contemporánea elaborar una formulación abstracta y una derivación axiomática de los principios de la matemática, la lógica medieval funcionó como un arte del lenguaje (*sermocinalis scientia*, «ciencia de la palabra») estrechamente asociado con la gramática, con vistas a su utilización como medio para establecer interpretaciones que pusieran de manifiesto que los textos de autoridad de las Sagradas Escrituras y de los Padres de la Iglesia eran lógicamente coherentes y estaban libres de contradicción».

Hasta el siglo XI sólo se conocía, gracias a BOECIO (hacia 480-524/526), la mezcla de una parte muy exigua de la lógica aristotélica (*Categorías, De interpretatione*) con la estoica, además de los *Tópicos* de Cicerón, aunque debemos a San ANSELMO (1033-1109), ya al final de ese primer y oscuro lapso de tiempo, el célebre «argumento ontológico» de la existencia de Dios y una interesante gramática filosófica.

El período creador de la lógica medieval se inicia en el siglo XI. Dentro de él distingue Moody dos fases. En la primera, que dura hasta mediados del XIII, la lógica como *pura dialéctica*, aislada de contenidos materiales, es cultivada por Pedro

---

[3] SAN PABLO (*Epistola a Tito*, I, 12) la pone en boca de un «profeta» cretense, que tal vez fuese Epiménides.

[4] Ernest A. MOODY, «The Medieval Contribution to Logic», incluido en las pp. 376-391 de su colección de artículos *Studies in Medieval Philosophy, Science and Logic,* University of Berkeley, California Press, 1975. Véase también el ensayo de Jan ŁUKASIEWICZ citado en la nota 2 de este Anexo.

ABELARDO (1079-1142), Guillermo de SHYRESWOOD (m. 1249) y Pedro HISPANO (m. 1277). Este lógico hispano —que al final de su vida gobernó la Iglesia como papa con el nombre de Juan XXI— formuló las leyes de De Morgan muchos siglos antes de que naciera quien hoy les da su nombre: *copulativa et disiunctiva de partibus contradicentibus contradicunt* [la negación que contradice a la proposición copulativa (=la conjunción) y a la proposición disyuntiva (=la disyunción) se efectúa contradiciendo (es decir, negando) cada una de sus partes] [5].

La segunda fase del período creador de la lógica medieval se extiende desde la mitad del siglo XIII a la del XIV. Ya se conoce la filosofía de la ciencia de Aristóteles y se acusa la influencia de AVICENA y AVERROES. Los grandes lógicos cristianos, como Guilermo de OCCAM (1285-1349), Juan BURIDÁN (hacia 1295-1358), Alberto de SAJONIA (hacia 1316-1390) y Pablo de VENECIA (m. 1429), meditan críticamente sobre los supuestos del legado aristotélico y elaboran nueva temática.

b. *Principales contribuciones de la lógica medieval.* Entre las principales aportaciones de los pensadores medievales a la historia de la lógica hoy suelen señalarse tres líneas de investigación:

1. Una es la *teoría de las consecuencias.* Probablemente sin disponer de los textos estoicos, los lógicos medievales lograron redescubrir gran número de teoremas de la lógica de proposiciones sin más apoyo que los escritos de Boecio y los *Tópicos* de Aristóteles. La ya citada formulación por Pedro Hispano de las leyes de De Morgan puede servir de ejemplo, como también esta formulación del principio *ex contradictione quodlibet*: «de un enunciado cuya contradicción es patente se sigue formalmente cualquier otro enunciado», establecida por el PSEUDO SCOTO (un brillante lógico del siglo XIV, Juan de Cornualles, al que se ha confundido por error con Duns Scoto).

La definición medieval de la noción de consecuencia recuerda en muchos casos el análisis no extensional de la implicación propuesto por Diodoro Crono. Así la define, por ejemplo, el Pseudo Scoto: «la consecuencia es un enunciado hipotético, que consta de un antecedente y un consecuente, vinculados condicionalmente de forma que es imposible que el primero sea verdadero y el segundo falso». Por otra parte era usual en los tratados distinguir entre consecuencia *formalis* y *materialis*, según que se pudiera concluir o no en ella sólo por la forma.

2. La teoría de la *suposición de los términos* (*suppositio terminorum*) profundiza la doctrina aristotélica de la cuantificación y preludia en algunos aspectos la lógica cuantificacional de Frege, aunque manteniéndose en una línea alternativa a ésta, pues no abandona como ella el esquema «sujeto-predicado», característico de la lógica aristotélica y del lenguaje ordinario.

---

[5] La frase de Pedro Hispano deja sin mencionar el requisito de cambio del conector principal por su dual. Un requisito que no falta, sin embargo, en esta impecable formulación posterior, debida a OCCAM, de una de las Leyes de De Morgan: *Opposita contradictoria disiunctivae est una copulativa composita ex contradictoriis partium ipsius disiunctivae* («La contradictoria que se opone a una proposición disyuntiva es una conjunción compuesta de las contradictorias de las partes de dicha disyuntiva»).

La doble dimensión que percibe la semántica actual según que hablemos del «significado» (semántica «intensional») o la «referencia» (semántica «extensional») de los términos, se corresponde con la distinción medieval entre la *significatio* o sentido y la *suppositio* o función referencial de los mismos.

En la teoría de la suposición encontramos además una anticipación de nuestra actual dicotomía mención/uso. Los lógicos medievales entendían que un término puede referirse o bien a sí mismo (*suppositio materialis*) o bien a las cosas que significa (*suppositio personalis*). Por ejemplo, en el enunciado: «hombre es bisílabo» el término «hombre» supone materialmente, mientras que en este otro enunciado: «el hombre es mortal» supone formal o personalmente. Hoy decimos, correlativamente, que en el primer caso el término en cuestión es «mencionado» y en el segundo «usado». También es importante recordar que, en lo que concierne a la «extensión» o referencia de los términos a las cosas, los tratados medievales solían subdistinguir la suposición personal precisando que, dentro de la natural ambigüedad del contexto proposicional en que es usado, la referencia del término estaba caracterizada por una determinación particular (*suppositio determinata*) cuando quedaba afectado por el prefijo «alguno» y por una exigencia de distribución (*suppositio confusa et distributiva*) cuando es «todo» el prefijo que le afecta.

3. Aunque ya Abelardo y Pedro Hispano trataron las proposiciones modales, el desarrollo más pleno de la *lógica modal* tiene lugar en la Edad Media tardía, cuando se conocen bien las obras lógicas y filosóficas de Aristóteles, Avicena y Averroes, que usan a fondo el razonamiento en contextos modales. Esas obras y el problema teológico de armonizar la presciencia y la omnipotencia divinas con la libertad humana invitaban a los pensadores a profundizar en el estudio de cuestiones modales. El gran teólogo franciscano Duns SCOTO (hacia 1270-1308) reemplazó la visión aristotélica de la cadena cósmica del ser y sus modos ontológicos por otra alternativa, y de acuerdo con este revolucionario cambio los lógicos de la época intensificaron el estudio de la lógica modal. Occam llegó a contabilizar casi un millar de modos válidos de silogismos modales.

El problema semántico de la verdad, paradojas como la del «mentiroso», sobre la cual Pablo de Venecia recogió una lista de catorce soluciones, y los sofismas constituyen otros círculos de problemas de la lógica de esta época. «La contribución de la lógica medieval al ulterior desarrollo y enriquecimiento de la lógica moderna», puede concluirse con Moody, está en haber trazado «el puente semántico entre el sistema formal abstracto, axiomáticamente derivado, de la moderna lógica matemática, y las formas concretas, empíricamente orientadas, en que exhiben los lenguajes naturales la estructura racional de la experiencia en su nivel fenomenológico».

Pero un panorama de la lógica medieval, por breve que sea, no debiera dejar de mencionar el *Ars magna* del poeta, apóstol, filósofo y teólogo Raimundo LULIO (Ramon LLULL, hacia 1235-1315), como presagio de la vocación de cálculo de la lógica matemática.

Según una leyenda del medievo, el gran sabio cristiano Alberto Magno poseía una adorable cabeza femenina de bronce que podía hablar. A Tomás de Aquino, discípulo de Alberto, aquel objeto le molestaba tanto que lo destruyó tras la muerte del maestro. Esta leyenda olvida que el anciano San Alberto sobrevivió unos cuantos años a Santo Tomás, que murió a los cincuenta. Pero

alude al gusto medieval por el algoritmo y el cálculo, en el que sobresalieron los árabes. Parece ser que un grupo de astrólogos árabes proyectó una máquina pensante, la *zairja*, que discurriría mecánicamente combinando las veintiocho letras del alfabeto arábigo con veintiocho ideas filosóficas. Queriendo superar en versión cristiana a la *zairja*, el aristócrata mallorquí Raimundo Lulio inventó una «máquina» consistente en ordenar en segmentos de círculos concéntricos giratorios, confeccionados por él en forma de discos, un abecedario de ideas sobre Dios y el universo, que resultaban así susceptibles de combinación mecánica. Este embrionario computador fue, andando el tiempo, objeto de sátira en la novela *Los viajes de Gulliver* (1726) de Jonathan Swift y tema de consideración por parte de Leibniz y Hegel.

§ 3. *La imagen moderna de la lógica*

a. *El humanismo del Renacimiento.* Por reacción al pensamiento medieval, los humanistas del Renacimiento prefirieron el latín de Cicerón al escolástico y la filosofía de Platón a la de Aristóteles y sustituyeron el estudio de la lógica como analítica deductiva por el culto a la dialéctica y la retórica.

Esta tendencia culmina en Pierre de LA RAMÉE (Petrus RAMUS, 1516-1572). Autor de unas polémicas *Aristotelicae Animadversiones* (1543), Ramus alcanzó la fama con su *Dialectique* (1555), la primera obra de lógica escrita en lengua francesa, donde procura reducir la lógica de Aristóteles a la simplicidad más escueta.

Convertido al protestantismo, Ramus fue uno de los innumerables asesinados por odio religioso en la matanza del Día de San Bartolomé. Su influencia, que se extiende incluso a una pequeña obra lógica del poeta inglés Milton, contribuyó grandemente al empobrecimiento de la lógica deductiva.

b. *Bacon y Port-Royal.* En los amantes de las ciencias naturales el interés por el método de la ciencia empírica desbancó al interés por la deducción. El *Novum Organum* (1620) de Francis BACON (1561-1626) crea una nueva área de investigación, la *lógica inductiva*, bajo el signo, como sugiere su título, de una alternativa a la lógica aristotélica.

Posteriores a esta obra de Bacon son dos libros que ocupan un lugar de relativa importancia en la historia de la lógica deductiva. Uno es la *Logica Hamburgensis* (1638) de Joachim JUNGIUS, que mereció los elogios de Leibniz; en él se hace mención de este ejemplo de argumento difícil de formular en lógica aristotélica: «un círculo es una figura; por tanto todo el que dibuja un círculo dibuja una figura». El otro es *La Logique, ou l'Art de penser*, más popularmente conocido como la *Lógica de Port-Royal* (1662) de Antoine ARNAULD y Pierre NICOLE, que formaban parte del movimiento religioso de orientación pietista al que se vinculó Pascal. Contrariamente a Ramus, los autores de este libro, que tuvo gran influencia incluso hasta el siglo XIX, creen que la lógica no es el arte de bien disertar, sino de pensar o razonar; y ofrecen un tratamiento tradicional, muy sencillo y elegante, de la lógica deductiva, acompañado de cuestiones de epistemología y metodología. La aportación más interesante de la *Lógica de Port-Royal* es la doctrina de la *comprensión* y la *extensión* de los términos y conceptos generales (la primera se define como el conjunto de notas que implican y la segunda como el conjunto de individuos a los que se aplican).

c. *La lógica desde Kant a Mill.* El historiador de la lógica Ivo THOMAS ha llamado «interregno» al lapso de tiempo que transcurre entre el final del florecimiento de la lógica en la escolástica tardía y la emergencia de Leibniz, precursor de la lógica matemática. En este lapso de tiempo, que acabo de reseñar, la creación en el campo de la lógica deductiva es escasa.

En el siglo XIX esta línea continúa en el ámbito filosófico, a espaldas de la revolución de la lógica formal acontecida en el campo matemático. Las lecciones de *Lógica* de KANT, publicadas en 1800, hacia el final de su vida, conservan el espíritu de Port-Royal. Y el admirable *Sistema de lógica deductiva e inductiva* (1843) de John STUART MILL (1806-1873) es mucho más creador en el tratamiento de la inducción que en el de la deducción.

B. LA IMAGEN MATEMÁTICA DE LA LÓGICA

§ 4. *El sueño de Leibniz*

En la historia del pensamiento, la filosofía y la matemática han recorrido rutas unas veces convergentes y otras divergentes. En una de las épocas en que la convergencia entre ambas fue mayor, en la Europa moderna de los siglos XVII y XVIII, emerge la gigantesca figura de Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716), que ocupa un puesto de primer rango en la historia mundial de una y otra: en la historia de la filosofía, como máximo representante del racionalismo idealista y del optimismo metafísico; y en la historia de la matemática, como creador del análisis infinitesimal.

La producción filosófica y matemática de Leibniz es bien conocida. Pero no lo es tanto su obra lógica, dispersa en ensayos y apuntes fragmentarios, muchos de los cuales han permanecido inéditos, hasta que el lógico francés Louis COUTURAT los recopiló a principios de este siglo.

a. *La idea de una «mathesis universalis».* Ya en su juventud, cuando aún no había cumplido los veinte, concibió Leibniz en un ensayo, *De arte combinatoria* (1666), la idea de diseñar una notación y unas reglas de cálculo similar al matemático, pero susceptible de ser aplicado a los pensamientos. (En él analiza con cierta detención el *Ars magna* de Lulio.)

Desarrollando una idea parecida hablaría más tarde Leibniz, en su monografía *Mathesis universalis*, de darle a la filosofía el rigor de la matemática mediante una nueva lógica, distinta de la antigua, que en su opinión sólo podría ser creada por un matemático, pero cuyo uso no sería sólo para matemáticos. Reconociendo que la matemática en el sentido tradicional es sólo una *Mathesis specialis*, pues se limita específicamente al estudio de la cantidad (*scientia generalis de quantitate*), Leibniz advierte que la nueva lógica sería «una ciencia general de la cualidad» (*scientia generalis de qualitate*). Varios de los nombres que propone para esa lógica soñada tienen algo de proféticos: *Logica Mathematica sive Mathesis universalis sive Logistica sive Logica Mathematicorum.*

b. *Los secretos del cálculo.* Una de las claves del proyecto leibniziano era el diseño de una notación simbólica, la «característica universal»: un conjunto de símbolos o caracteres que se pudieran poner en correspondencia con los pensamientos, de manera que a los pensamientos simples les correspondieran caracteres simples y a

los compuestos caracteres compuestos [6]. En el ensayo *Elementa characteristicae universalis* («Elementos de una característica universal», 1679) leemos: «La regla de construcción de caracteres es la siguiente: asígnese a cada término (esto es, al sujeto o al predicado de la proposición) un número, de manera que cuando un término se componga de otros le corresponda como número el producto de los números correspondientes a esos otros términos de que se compone. Por ejemplo: convengamos en expresar el término *animal* por el número 2 (o, más generalmente, por *a*), el término *racional* por el número 3 (o, más generalmente, por *r*) y el término *hombre* por el resultado de multiplicar los anteriores 2 y 3, es decir, 6 (o, más generalmente, por el número *ar*).»

Como resultado de esta correspondencia entre pensamientos y números, las operaciones aritméticas pueden cobrar significación filosófica. Así, siguiendo con el ejemplo, la proposición

El hombre es animal racional

se simbolizaría mediante la ecuación

$$h = a.r \text{ (o más concretamente: } 6 = 2.3\text{),}$$

de donde se sigue que puedo calcular a o r, dados h y cualquiera de ellos: $a = h/r$ (2=6/3) y $r = h/a$ (3=6/2).

Otra de las claves del proyecto de Leibniz, complementaria de la anterior, es la idea de un *calculus ratiocinator*, un cálculo lógico de cualidades que trascienda la pura cantidad del cálculo matemático. Una vez que estuviésemos en posesión de ese cálculo, él imaginaba así el futuro de la filosofía: «procédase, pues, de forma que toda desviación en el razonamiento no sea otra cosa que un error de cálculo [...]. Y una vez poseamos ese método, cuando surja una controversia entre dos filósofos no será preciso que gasten en discutir más tiempo del que gastarían dos calculadores. Pues bastará con tomar asiento, echar mano de pluma y ábaco y [...] decirse el uno al otro: ¡calculemos! («*Id efficiendum est, ut omnis paralogismus nihil aliud sit quam error calculi* [...]. *Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos Computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo* [...] *dicere: calculemus!*» [7].

---

[6] «El arte característica es el arte de formar y ordenar los caracteres de tal manera que hagan referencia a los pensamientos o que tengan entre sí la misma relación que entre sí tienen éstos. Una expresión de este arte es un agregado de caracteres que representan la cosa expresada. La ley de las expresiones es la siguiente: que la expresión de una cosa se componga de los caracteres de aquellas cosas de cuyas ideas se compone la idea de la cosa a expresar (*ars characteristica est ars ita formandi atque ordinandi characteres, ut referant cogitationes seu ut eam inter se habeant relationem, quam cogitationes inter se habent. Expressio est aggregatum characterum rem quae exprimitur repraesentantium. Lex expressionum haec est: ut ex quarum rerum ideis componitur rei exprimendi idea, ex illarum rerum characteribus componatur rei expressio*).

[7] *Philosophische Schriften*, edición Gerhart, Berlín, vol. VII, p. 20.

¿Qué juicio se merece el proyecto de Leibniz? Sus inmediatos sucesores en la representación de la filosofía alemana distan de sobrevalorarlo. Hegel se refiere a él en su *Lógica* como «una idea favorita que Leibniz concibió en su juventud y en la que más tarde persistió pese a la inmadurez y superficialidad de que adolece». Para Hermann SCHOLZ, lógico alemán contemporáneo, el advenimiento de Leibniz es «una aurora» en la historia de la lógica.

Evidentemente, el plan quedó inconcluso, en parte porque los múltiples quehaceres de Leibniz, que incluían la política y la diplomacia, no le dejaban tiempo para convertir sus notas en una monografía definitiva y en parte por limitaciones teóricas, una de las cuales pudiera ser, según algunos, la perseverancia en el esquema aristotélico de la proposición como sujeto-predicado.

En cualquier caso vale la pena recordar que Leibniz escribió el más arriba citado ensayo sobre los «Elementos de una característica universal» en 1679. Exactamente dos siglos más tarde, en 1879 publicaría Frege su *Conceptografía*, libro que instala el paradigma no aristotélico de la lógica como ciencia exacta, del cual Leibniz es precursor.

§ 5. *La revolución de Boole y Frege*

Los años 1854 y 1879 son decisivos en la historia de la lógica, porque en ellos tiene lugar la aparición de dos libros revolucionarios que definen el paradigma no aristotélico, hoy dominante, de una lógica concebida como ciencia exacta, al modo matemático. En el primero de esos dos años vio la luz la obra *Las leyes del pensamiento*, del lógico y matemático inglés George BOOLE; y en el segundo la *Conceptografía*, obra del lógico y matemático alemán Gottlob FREGE.

Ambos libros surgen en el contexto de un movimiento creador en la historia de la matemática: la formidable expansión de la nueva álgebra, en la que intervienen importantes matemáticos ingleses, es el escenario sobre el que se dibuja el proyecto, realizado por Boole, de un «álgebra lógica»; y una profunda reflexión sobre el concepto de número, en la que destacan importantes matemáticos alemanes, es correlativamente escenario del proyecto, realizado por Frege, de una lógica de la que pudieran deducirse los conceptos y las leyes de la aritmética.

Sin menoscabo de su esencial convergencia, sin embargo, los proyectos de Boole y de Frege son también radicalmente divergentes. La estrategia de Boole se endereza a la creación de una «matemática de la lógica» y consistió en adoptar para ésta las leyes del álgebra; mientras que el objetivo de Frege, cuyo impacto histórico ha sido mucho más vasto, es la creación de una «lógica de la matemática», de una lógica de cuño enteramente nuevo que pudiera servir de marco y de fundamento a la ciencia matemática.

a. *El álgebra de Boole.* En la primera mitad del siglo XIX el *álgebra* experimenta grandes avances orientados a una formulación más abstracta de las leyes que gobiernan procesos matemáticos fundamentales, como los de adición y multiplicación y sus propiedades. La «teoría de grupos» de N. H. ABEL y Evaristo GALOIS, la perspectiva de un álgebra que George PEACOCK llamaría en sus obras «simbólica» o «abstracta» y el «álgebra vectorial» de W. R. HAMILTON son líneas de un desarrollo en el que se inserta la empresa de crear un *álgebra lógica*, acometida por el solitario y autodidacta George BOOLE (1815-1864).

A la edad de treinta y un años publica Boole su primer libro orientado a este objetivo, *El análisis matemático de la lógica* (*The Mathematical Analysis of Logic*, 1847) [8], cuya «Introducción» empieza así: «Aquellos que están familiarizados con la teoría actual del Álgebra Simbólica saben que la validez de los procesos de análisis no depende de la interpretación de los símbolos que emplean, sino solamente de las leyes de su combinación.»

Esta perspectiva encarna para él «el verdadero principio del Álgebra Simbólica», que le permite descartar la idea de que la matemática sea sólo ciencia de la magnitud: «Tomando por fundamento este principio general, me propongo establecer el Cálculo de la Lógica, y postular para el mismo un lugar entre las formas reconocidas del Análisis Matemático, aunque por su objeto e instrumentos deba permanecer, por el presente, solo.»

La estrategia de Boole se puede resumir diciendo que consiste en extrapolar o transportar a la lógica la notación y las leyes del álgebra, de modo que resulte posible convertir las proposiciones categóricas en ecuaciones y los silogismos en sistemas de ecuaciones cuya solución sea susceptible de ser obtenida por métodos algebraicos.

Esta estrategia se basa en tres brillantes intuiciones:

1) Una de ellas es la idea de que si sustituimos nuestra notación numérica ordinaria (que consta de los diez dígitos que van del 0 al 9) por una notación binaria que conste exclusivamente del par de dígitos 0 y 1, podría desaparecer la diferencia entre las leyes lógicas y las leyes matemáticas. El paso de uno a otro sistema notacional, dicho sea incidentalmente, se reduce a una trivial traducción: en lugar de escribir la serie de los números naturales como solemos hacer en nuestra notación decimal ordinaria, con un alfabeto numérico que sólo constase de dos dígitos lo haríamos así:

Notación decimal: 0, 1, 2, 3, 4, 5 ...
Notación binaria: 0, 1, 10, 11, 100, 101 ...

Pero de la profundidad de la idea de Boole nos dan medida este par de consideraciones. Uno es que así cabe establecer con solidez la equiparación, vagamente entrevista ya por Leibniz, entre las operaciones matemáticas de suma y producto y las operaciones lógicas de disyunción y conjunción. Las dos tablas siguientes

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

pueden ser indiferentemente interpretadas como representativas de las operaciones aritméticas de suma y producto «módulo 2» [9] y como tablas de verdad de las operaciones lógicas de disyunción exclusiva y conjunción. Los computadores digitales, cuyos circuitos electrónicos son estructuralmente binarios por estar sujetos a la condi-

[8] Hay edición española de esta obra, con introducción y traducción de José Sanmartín, en Colección Teorema, 2.ª ed., Cátedra, Madrid, 1984.

[9] Podemos llamar «módulo 12», por ejemplo, a nuestra manera de contar las horas del día: cuando las agujas del reloj marcan las 12, vuelven a marcar desde 1. Análogamente, contamos «módulo 2» cuando llegado este número volvemos a empezar.

ción de que pase o no por ellos una corriente, son una impresionante realización tecnológica de la intuición de Boole de que el cálculo lógico es el mismo que el matemático.

2) La segunda intuición básica de Boole es que sus fórmulas de álgebra lógica pueden ser alternativamente interpretadas como operaciones de silogística aristotélica (*cálculo de clases*) y como operaciones deductivas sobre enunciados complejos (*cálculo de proposiciones*). La conciencia clara de la división de la lógica elemental en esos dos campos, y la sujeción de ambos a un solo cálculo formal es otra de las memorables aportaciones de este pensador.

3) La tercera intuición básica de Boole está en la idea de representar mediante los símbolos «1» y «0», respectivamente, al Todo (la totalidad del universo) y a la Nada en la interpretación del álgebra lógica como cálculo de clases. (En la interpretación alternativa como cálculo proposicional 1 y 0 denotan verdad y falsedad.) La operación mental que Boole llama *elección* o selección, por la que pensamos o concebimos colecciones de cosas resulta así elegantemente matematizable. Si x es una clase de cosas, $1\text{-}x$ será su «clase complementaria» (literalmente: «el universo mermado en x»), integrada por todas las cosas que no son x. Sea x la clase de los hombres, y la de los animales y z la de las piedras. Una proposición categórica universal negativa (p. ej., «Ningún hombre es piedra») se expresaría así en álgebra lógica:

$$xz = 0,$$

queriendo decir con ello que la clase xz es nula. La expresión simbólica de la universal afirmativa sería, en cambio,

$$x\,(1\text{-}y) = 0,$$

declarando análogamente la nulidad del producto de la clase sujeto con la complementaria del predicado (literalmente: «No hay hombres que no sean animales»).

En su obra principal y mucho más extensa *Las leyes del pensamiento* (*The Laws of Thought*, 1854) [10], que incluye aplicaciones del álgebra lógica a la discusión de temas filosóficos y una teoría de la probabilidad, Boole desarrolla más a fondo su sistema, aunque le sobrevino la muerte sin lograr liberarlo de graves limitaciones. Una de ellas es que si bien los pasos iniciales y los terminales en su álgebra tenían un sentido claramente lógico, no sucedía así con algunos de los pasos intermedios. La interpretación de la suma lógica como disyunción inclusiva acarreaba también complicaciones. Finalmente Boole, a diferencia de Frege, no toma en consideración el problema de la lógica de las relaciones, prisionero quizá del esquema tradicional de la proposición como «sujeto-predicado».

Uno de sus principales seguidores, el matemático y economista William Stanley JEVONS (1835-1882), logró hacer más coherente, aunque complicándolo, el cálculo de Boole [11].

---

[10] Hay edición española de la parte inicial de esta obra, traducida por J. Manuel Domínguez Rodríguez, en Paraninfo, Madrid, 1981.

[11] Jevons salva mejor que Boole la autonomía de la lógica como ciencia de la cualidad y hace más coherentes, aunque más complicados, los cálculos del álgebra lógica, que amplió con la teoría de las formas normales. Él sugirió la lectura del símbolo de adición lógica «+» como disyunción inclusiva, pues Bo-

b. *La lógica de Peirce.* El más grande filósofo norteamericano, experto en múltiples ciencias, equiparable quizá a Leibniz en versatilidad y originalidad, fue Charles Sanders PEIRCE (1839-1914), cuyo intemperante y poco sociable carácter frustró su carrera académica y lo condujo a la ruina. Peirce fundó la corriente filosófica denominada *pragmatismo*, cultivada también por su contemporáneo William James y en la primera mitad de nuestro siglo por John Dewey.

La principal aportación que le debemos en lógica es la formalización y desarrollo del *cálculo de relaciones*, al que dio varias versiones en una serie de ensayos escritos entre 1867 y 1885. Pieza típica de ese cálculo, ya iniciado antes de él por Augustus DE MORGAN (1806-1878)[12] y sistematizado después por Ernst SCHROEDER (1841-1902) [13], es el análisis de la operación del «producto relativo». En conexión con estos temas llegó a descubrir —de modo independiente aunque varios años después de Frege— el uso de cuantificadores.

Entre sus decisivas contribuciones a la lógica de enunciados se cuentan: la introducción de la relación implicativa; la construcción y el uso (en el que se adelanta en medio siglo a Wittgenstein) de las tablas de verdad como método de decisión de la validez de funciones veritativas; y la idea (en la que se adelanta también en medio siglo a Sheffer) de reducir por definición los conectores a uno solo, el hoy llamado «funtor de Peirce» o negación conjunta, idea poco práctica entonces, pero hoy importante en teoría de circuitos.

Peirce es asimismo creador de la hoy floreciente *semiótica* o teoría de los signos [14]. En lógica inductiva su teoría de la *abducción* explica ejemplarmente el método hipotético-deductivo y es una de las apenas confesadas fuentes de inspiración de Sir Karl Popper.

---

ole lo interpretaba en el sentido de la «o» exclusiva. A Jevons le debemos también la confección de un «piano mecánico» para computar operaciones silogísticas.

Otros cultivadores relevantes del álgebra lógica son el escritor de cuentos infantiles Lewis CARROL (1832-1898), que es también autor de una *Symbolic Logic* (1893), y John VENN (1834-1923) a quien debemos los diagramas que llevan su nombre, con la consiguiente discusión del problema del «importe» o compromiso existencial de las proposiciones categóricas. Su *Symbolic Logic* se publicó en 1881.

[12] DE MORGAN es figura puente entre la lógica tradicional y la lógica simbólica. Dio su nombre a las conocidas leyes de la lógica de enunciados y mantuvo una célebre discusión con su contemporáneo William HAMILTON sobre la «cuantificación del predicado» en las proposiciones categóricas tradicionales. Su investigación sobre la lógica de las relaciones es pionera en la materia.

[13] El opúsculo de SCHRÖDER *Der Operationkreis der Logikkalküls* [*El círculo de operaciones del cálculo lógico*] (1877) y su colosal obra en tres volúmenes *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [*Lecciones sobre el álgebra de la lógica*] (1890-1905) representan la culminación del álgebra lógica en el siglo XIX. A Schröder le debemos la observación de la dualidad entre la adición (disyunción) y el producto (conjunción) en lógica.

[14] En su novela *El nombre de la rosa* el semiótico italiano Umberto ECO le rinde homenaje al mezclar en la figura del fraile-detective que la protagoniza rasgos característicos de Guillermo de Occam, Sherlock Holmes y Charles S. Peirce.

c. *La lógica de Frege.* Frege es en la historia de la lógica la figura más parecida y a la vez más opuesta a la de Aristóteles. Igual que éste, se propone crear una teoría abstracta de la inferencia, tarea que realiza él solo y de un modo, como dijo Kant de Aristóteles, «perfecto y acabado». Pero su obra lógica es mucho más decisiva que la de Boole en la inauguración de un nuevo paradigma deductivo que se puede calificar de no aristotélico, en la medida en que exige la construcción de un lenguaje artificial que se aparta del natural, en que cambia por el esquema de «función-argumento» el modelo tradicional de la proposición entendida como «sujeto-predicado» y en que crea la teoría de la cuantificación como marco básico de las deducciones.

La influencia de Frege, prácticamente nula en el siglo XIX, se ha tornado absoluta en el XX. Si durante siglos la inmensa mayoría de los manuales de lógica se ajustaron al patrón aristotélico, en el nuestro se atienen al de Frege. En los manuales tradicionales el modelo deductivo era la silogística, y su preámbulo la doctrina de la proposición categórica. En los nuevos el modelo deductivo es la teoría de la cuantificación y su preámbulo el aprendizaje del lenguaje artificial de primer orden.

La Conceptografía. Gottlob FREGE (1848-1925) fue profesor de matemáticas en la Universidad de Jena, donde transcurrió su vida. Abrigaba la convicción de que la ciencia matemática, dejando aparte la geometría, podía deducirse de la lógica. Y al encontrar dificultades en el intento de probar su tesis en lenguaje ordinario decidió elaborar el instrumental lógico adecuado, incluyendo el diseño de un lenguaje artificial.

A este fin escribió, cuando aún contaba treinta y un años, su *Conceptografía* (1879) [15], un librito de ochenta y ocho páginas que iba a revolucionar la historia de la lógica pero cuya acogida inicial no pudo ser más decepcionante.

En un prólogo de seis páginas expone su objetivo. Dado que las pruebas científicas son de dos tipos, las que tienen su fundamento en la lógica y las que lo tienen en la experiencia; y en el entendimiento de que las pruebas en matemática pertenecen al primero, el autor se había visto en la necesidad de corregir las lagunas y defectos del lenguaje natural como vehículo de exposición demostrativa, creando un lenguaje artificial que se atuviera estrictamente, dejando fuera de consideración todo lo demás, al *contenido conceptual* (*begrifflicher Inhalt*) y a las relaciones de inferencia. De ahí el título del libro, que viene aclarado por su subtítulo: *Un lenguaje de fórmulas del pensamiento puro, construido a imagen del aritmético.*

Las relaciones entre este lenguaje y el natural, precisa Frege, son parecidas a las existentes entre el ojo y el microscopio. El ojo es superior a éste en la vida, pero lo necesita para la ciencia. No falta en el prólogo el recuerdo al proyecto de Leibniz, «demasiado gigantesco» para ser realizado de una vez, pero quizá accesible por pasos o zonas, como parecían acreditarlo ya la aritmética, la geometría o la química. Darle realidad en la teoría de la inferencia pudiera ser, a este respecto, un paso decisivo.

El libro se divide en tres partes dedicadas, respectivamente, a introducir la notación, exponer y derivar «juicios del pensamiento puro», y contemplar algunas aplicaciones matemáticas. Las conquistas lógicas de Frege en este opúsculo son, entre otras, las siguientes: 1) invención del modelo «función-argumento» para formalizar la proposición; 2) invención del cuantificador; 3) invención del cálculo cuantificacio-

[15] Su traducción española se encuentra en preparación en la Colección Filosofía y Ensayo de Editorial Tecnos.

nal, incluida la cuantificación múltiple; 4) formalización precisa de la implicación material; 5) conexión sistemática del cálculo proposicional con el cuantificacional; 6) axiomatización completa de la lógica elemental; y 7) distinción entre axiomas y reglas de inferencia. Si se repara en que esta última distinción es ignorada en obras tan cruciales del siglo XX como el *Formulario mathematico* (1895-1908) de Peano o los *Principia mathematica* (1910-1913) de Whitehead-Russell, hasta que algo más tarde Łukasiewicz llamara la atención sobre ese olvido, se estará de acuerdo con el historiador de la lógica BOCHENSKI cuando escribe: «todo lo publicado entre 1879 y 1921 cae por debajo del estándar de Frege».

El rasgo que más salta a la vista del lenguaje ideográfico de la *Conceptografía* es su bidimensionalidad. Conviniendo con Frege en que



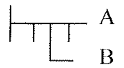
es la representación de un enunciado y



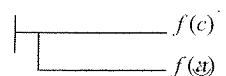
la aserción del mismo, la representación y la aserción de una implicación (si B, entonces A) se simbolizarían, respectivamente,

(En su calidad de condición, suposición o hipótesis, el antecedente es situado gráficamente «bajo» el consiguiente, que queda hipotecado por esa condición.)

La negación es simbolizada por Frege adosando media barra vertical bajo el trazo horizontal de la proposición negada. La definición de la conjunción (B y A) en términos de negador e implicador (no es cierto que B implica no A), se representaría:



El sistema axiomático de la *Conceptografía* reduce el vocabulario lógico a tres palabras: implicador, negador y generalizador, definiendo por ellas a las demás. Sus axiomas son nueve: ocho tautologías (carga de premisas, dos cadenas de silogismo hipotético, *modus tollens*, dos leyes de doble negación y dos de equivalencia) y una ley cuantificacional de eliminación de generalizador que Frege formula así:



El cuantificador universal está representado por una concavidad en el trazo horizontal de la proposición cuantificada en el que se aloja una letra gótica indicativa de la variable ligada. La *f* es obviamente una letra predicativa. La única regla explícitamente aducida de inferencia es el *modus ponens*.

El profesor que apadrinaba al joven Frege en la Universidad de Jena no se equivocó al vaticinar que ese libro sería entendido por muy pocas personas. Entre las escasas recensiones que se hicieron eco de él, destaca el juicio rotundamente negativo emitido por Venn y Schröder, representantes de la escuela de Boole. Frege contestaría, parafraseando a Leibniz, que su lógica no era, como la de Boole, un *calculus raciocinator* de finalidad más o menos práctica, sino, más profunda y radicalmente, una *lingua characteristica* con ambición teórica, que al ser bidimensional permite apreciar visualmente los dos factores de la deducción: los nexos de inferencia (gráficamente representados por líneas) y el contenido conceptual (gráficamente representado por letras). En este lenguaje no hay supuestos ocultos y las lagunas o agujeros no tienen lugar.

Las siguientes palabras de QUINE [16] compendian el significado de la *Conceptografía* en la historia de la lógica: «si es deplorable exagerar la brecha entre la vieja y la nueva lógica, más deplorable aún, empero, sería subestimar la novedad e importancia de la nueva. La publicación de la *Conceptografía* en 1879 fue el pregón de un renacimiento, pues aportó la teoría de la cuantificación y, con ella, el instrumento más potente y característico de la moderna lógica. Problemas lógicos y semánticos que tuvieron en vilo a Tomás de Aquino y otros pensadores admiten un tratamiento más simple y claro a la luz de la teoría de la cuantificación, con cuya ayuda los lógicos modernos han logrado iluminar, en grado no soñado hasta ahora, el mecanismo de la deducción en general y de los fundamentos de la matemática en particular.

El programa logicista. El descubrimiento a principios del XIX de las geometrías no-euclidianas, que se desviaban de la de Euclides sin implicar por eso una contradicción, debilitó la confianza en la idea tradicional de que la geometría euclidiana proporciona un sólido fundamento intuitivo a la teoría de números. Por otra parte la teoría del cálculo infinitesimal, que había servido de utilísima herramienta a la física de Newton, planteaba problemas críticos sobre la legitimidad del uso de la noción de infinito en matemática. En la segunda mitad del siglo XIX tienen lugar en Alemania la reflexión de grandes figuras como WEIERSTRASS, DEDEKIND y CANTOR sobre la definición de la idea de número y sobre la necesidad de establecer de un modo conceptual y no intuitivo las bases de la matemática.

En este círculo de problemas se inscribe la tarea de investigación que se propuso llevar a cabo Frege durante toda su vida y a la que se etiqueta con el nombre de *logicismo*. El programa logicista se propone demostrar que la lógica y la matemática tienen el mismo estatuto epistemológico, y que la matemática puede reducirse a la lógica, puesto que sus conceptos pueden ser obtenidos por definición a partir de conceptos lógicos y sus principios y teoremas pueden ser obtenidos por deducción a partir de principios y teoremas lógicos. Este punto de vista, afín al de Leibniz, se oponía radicalmente al de Kant, quien hubiera considerado absurdo tratar de reducir las proposiciones de la matemática, que eran para él sintéticas *a priori*, a las proposiciones lógicas, que eran para él puramente analíticas.

---

[16] W. V. QUINE, Prefacio a J. T. CLARK, *Conventional Logic and Modern Logic*, Woodstock College Press, Woodstock, Maryland, 1952.

La invención de su *Conceptografía* no fue para Frege un fin en sí mismo, sino un medio al servicio de su objetivo logicista, que aparece primero expuesto en un lenguaje no técnico en su obra *Los fundamentos de la aritmética* (1884), y mucho más tarde desarrollado con todo el rigor del lenguaje conceptográfico en lo que el pensó que sería su *magnum opus*: *Las leyes fundamentales de la aritmética* (vol. I, 1893; vol. II, 1903).

Al final de *Los fundamentos de la aritmética* escribió Frege: «con la presente obra espero haber contribuido a la probabilidad de la tesis de que las leyes de la aritmética son juicios analíticos y por tanto a priori. La aritmética resulta ser así mero despliegue de la lógica; y toda proposición de la aritmética, una ley lógica, aunque derivada.» No podía sospechar entonces que *Las leyes fundamentales de la aritmética*, la gran obra con la que quiso coronar treinta años de trabajo en el programa logicista, iba a quedar bloqueada por el sorprendente descubrimiento de la paradoja de las clases debido al joven lógico Bertrand Russell. Tras desesperados intentos de resolver el problema, Frege dio finalmente por fracasado su programa y terminó sus días acogiéndose a la tesis tradicional de que la teoría de números tiene su fundamento en la geometría.

La semántica de Frege. Los ocho años que transcurrieron entre la publicación de *Los fundamentos de la aritmética* (1884) y el primer volumen de *Las leyes fundamentales de la aritmética* (1893) representan un período particularmente creativo en Frege. A ese período pertenece una serie de ensayos en que reflexiona sobre los fundamentos semánticos de su obra. Esos ensayos contienen fundamentales aportaciones que han servido de inspiración a la filosofía del lenguaje y a la filosofía analítica del siglo XX. Entre ellos destacan «Función y concepto» (1891) y muy especialmente «Sobre sentido y referencia» (1892) [17]. Sobre el contenido de este último véase anteriormente Capítulo VIII, § 3.

d. *La teoría clásica de conjuntos.* Más o menos paralelamente a la obra de Frege tiene lugar la emergencia de la *teoría de conjuntos*, resultado de las investigaciones del matemático alemán Georg CANTOR sobre la idea de número, que él enriquece con la noción de conjunto finito o transfinito. El desarrollo de esta teoría en los últimos cien años está estrechamente vinculado a la historia de la lógica matemática.

Conviene recordar a este respecto que el infinito puede ser concebido, tanto en filosofía como en matemáticas, de dos maneras: como aquello a lo que cabe acercarse sin llegar a alcanzarlo, o como algo que está dado ya, de una vez por todas. En el primer caso se habla de *infinito potencial*; en el segundo, de *infinito actual o existencial*.

A diferencia de lo acontecido en el campo de la filosofía con la teología medieval, en matemática ha prevalecido desde la antigüedad la idea del infinito potencial. Así, por ejemplo, ha sido tradicional entender que la serie de números naturales

---

[17] El segundo de dos pequeños volúmenes que reúnen los ensayos semánticos de Frege, traducidos por L. M. Valdés, lleva por título *Investigaciones lógicas*, Cuadernos de Filosofía y Ensayo, Tecnos, Madrid, 1984. El segundo, que contiene «Función y concepto» y «Sobre sentido y referencia», está en preparación en la misma colección.

tiende, pero no llega al infinito. C. F. GAUSS había expresado esta opinión de la siguiente forma: «... protesto contra el uso de una magnitud infinita como si se tratase de una magnitud realizada, lo cual nunca es lícito en Matemáticas. Lo infinito es sólo una *façon de parler*, en el fondo se habla de límites a los que ciertas situaciones se aproximan tanto como se quiera, mientras que a otras les es permitido crecer sin restricciones.» La revolución de Cantor consiste en haber introducido explícitamente la idea de infinito actual en matemática [18].

La definición de conjunto de Cantor. El concepto de «conjunto» (sinónimos suyos son los términos «clase», «colección», «agregado» y «dominio») de Cantor es muy general, anterior a la noción de número e incluso a las nociones de finito e infinito , y coincide parcialmente con la noción intuitiva de «totalidad» que usan el sentido común y la filosofía. He aquí una de las definiciones que dio Cantor de este concepto: «Por un "conjunto" entendemos la reunión en una totalidad M de objetos m de nuestra percepción o nuestro pensamiento que sean definidos y distintos (y que se denominan los "elementos" de M)» [19].

De esta definición se desprende: *a*) por una parte, la libertad prácticamente omnímoda, según Cantor, que tiene nuestra mente para formar totalidades reuniendo arbitrariamente objetos cualesquiera (yo puedo elegir, p. ej., enteramente a capricho dos personas cualesquiera, como Shakespeare y Cervantes, o dos números cualesquiera, como tres y cinco, y formar un conjunto con cada uno de tales pares o agrupar esos cuatro objetos en un solo conjunto); y *b*) por otra parte, una exigencia de control objetivo que compensa de la anterior libertad y reclama que los objetos reunidos para formar el conjunto sean «definidos» (esto es, que dado un conjunto sea posible en principio decidir para cualquier objeto si pertenece o no al conjunto) y «distintos» (lo que evita el riesgo de confusiones y repeticiones en el control de objetos).

El teorema fundamental de la teoría de conjuntos. Un punto culminante del descubrimiento de Cantor fue el llamado *teorema fundamental* de la teoría de conjuntos, que ha sido objeto de grandes discusiones por parte de filósofos y matemáticos: «El conjunto enumerable de todos los números naturales (y asimismo el de los racionales) no es equivalente al continuo, sino sólo a una parte o subconjunto propio de éste. O dicho más brevemente: *el conjunto de números reales no es enumerable.*»

---

[18] Así justificaba él su descubrimiento: «A la idea de considerar [...] lo infinitamente grande no solamente en la forma de lo indefinidamente creciente, sino también de fijarlo matemáticamente por medio de números bajo la forma característica del infinito actual he sido casi contra mi voluntad, en oposición a mis más preciadas tradiciones, obligado de manera lógica por el sentido del esfuerzo científico y de las tentativas de muchos años, y por eso tampoco creo que puedan aducirse argumentos en contra que yo no haya sabido encontrar.

[19] «Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M gennant werden) zu einem Ganzen» (CANTOR, 1895).

Prueba del teorema fundamental: el método diagonal. La prueba del teorema fundamental se efectúa por modo indirecto: suponiendo que el continuo es enumerable y derivando un contradicción de tal suposición. Pero antes de proceder a su desarrollo conviene tener en cuenta algunas precisiones:

1) Para demostrar el teorema basta tomar primero como continuo, no todo el sistema de los reales, sino sólo el intervalo particular de ellos que va de 0 a 1 (es decir, no toda la línea recta respresentativa de ese sistema, sino sólo un segmento finito de ella). A este intervalo lo denotamos por 1. Luego será fácil extender la prueba a todo el continuo.

2) Será conveniente representar los elementos (números reales) del continuo como *decimales* (fracciones). A este fin, un teorema elemental sobre decimales establece que todo número real positivo puede ser expandido o representado por un decimal «infinito» o no terminativo, esto es, un decimal que después de cualquiera de sus dígitos contiene siempre otro dígito diferente de cero. (Hay números positivos que admiten una expansión en un decimal terminativo. P. ej., 3/4 = 0,75; pero entonces existe tambien una expansión infinita del mismo número, la cual es, en nuestro caso, 3/4 = 0,74999... Ello se obtiene disminuyendo en una unidad el dígito terminativo de la fracción y agregando a su derecha una serie interminable de números 9.)

3) El teorema fundamental afirma, pues, que un conjunto equivalente al de los naturales, esto es, enumerable, no puede contener todos los decimales del continuo, o de un intervalo del mismo.

De acuerdo con las anteriores indicaciones, supóngase ahora que

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots$$

es una lista o enumeración infinita de (algunos, aunque no necesariamente todos los) números reales pertenecientes al intervalo. Podemos también escribir, de acuerdo con esa lista y una debajo de otra, las fracciones decimales no terminativas que, respectivamente, corresponden a cada uno de esos números:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{00}, & & x_{01}, & & x_{02}, & & x_{03}, \ldots & & \\
 & \searrow & & & & & & & \\
x_{10}, & & x_{11}, & & x_{12}, & & x_{13}, \ldots & & \\
 & & & \searrow & & & & & \\
x_{20}, & & x_{21}, & & x_{22}, & & x_{23}, \ldots & & \\
 & & & & & \searrow & & & \\
x_{30}, & & x_{31}, & & x_{32}, & & x_{33}, \ldots & & \\
 & & & & & & & \searrow & \\
 & & & \ldots & & & & &
\end{array}$$

La tabla constituye, como la lista, un método de enumeración de los infinitos números reales contenidos en el intervalo. Sin embargo, cabe asegurar que esa enumeración no los agota. Como prueba de ello puede especificarse un decimal x' que sea no terminativo (esto es, que denote un número real) y que comience por 0 (esto es, que pertenezca al intervalo 1), pero que no esté contenido en la tabla infinita cuya construcción se acaba de indicar. Su estructura será pues:

$$x' = 0 . x'_0 \; x'_1 \, x'_2 \ldots$$

Para identificar el contenido concreto de cada uno de sus dígitos consideraremos primero la diagonal que pasa, en la tabla, a través de los dígitos: x_{00}, x_{11}, x_{22}, x_{33}, . . . A continuación construimos x' del siguiente modo: cada uno de los sucesivos dígitos de la diagonal, x_{nn}, es reemplazado por un dígito diferente x_n, de forma que:

si $x_{nn} = 5$, entonces $x'_n = 6$; y si $x_{nn} \neq 5$, entonces $x'_n = 5$.

La fracción resultante representa un número real x' que pertenece al intervalo, pero no a la enumeración, ya que difiere de la primera de las fracciones de ésta en el lugar de las décimas; de la segunda de las fracciones, en el de las centésimas; de la tercera, en el de las milésimas, y así sucesivamente. La enumeración dada no es, por tanto, una enumeración de todos los números reales en el intervalo. Una tal enumeración no existe. (Cfr. A. A. FRAENKEL, *Set theory and logic*, 1966, pp. 20-22.)

§ 6. *De Russell a Hilbert*

a. *La lógica de Russell y Wittgenstein.* El papel que ha desempeñado Bertrand RUSSELL (1872-1970) en la historia de la lógica del siglo XX está marcado por dramáticos contrastes. Por una parte, ha sido el más ardiente defensor del programa logicista, y a su plena realización dedicó, aunque sin conseguirlo, la monumental obra *Principia Mathematica* (1910-1913). Por otra, fue él quien descubrió, emulando a ZENÓN DE ELEA, la *paradoja de las clases*, que desencadenó la llamada «crisis de fundamento de la matemática». Pese a los denodados esfuerzos de Russell, que ideó la *teoría de tipos* para contrarrestarlo, este descubrimiento contribuyó a la ruina del ideal logicista. Finalmente llama la atención la circunstancia de que, habiendo sido Russell la primera figura mundial de la lógica matemática en la primera década del siglo, tomase al acabar la primera guerra europea la decisión de abandonar ese campo para dedicar el resto de su vida a la filosofía general y a la política [20]. A esta decisión no fueron ajenas las críticas de Wittgenstein.

La paradoja de las clases. En su biografía intelectual recuerda Russell el impacto que le produjo su encuentro en 1900 con el matemático y lógico italiano Giuseppe PEANO [21], en el Congreso Internacional de Filosofía. Russell era ya un logicista convencido. Conocía bien la difícil obra de Cantor y de Frege, y le pareció que el simbolismo de Peano, mucho más intuitivo y legible que el de la *Conceptografía*, podía ser el vehículo más adecuado para poner en marcha el programa de deducir la matemática a partir de la lógica.

Pero su «luna de miel», como él la llamó, con el ideal logicista duró poco. Al año siguiente, mientras trabajaba sobre la obra de Cantor, descubrió la llamada «paradoja

---

[20] En 1940, sin embargo, publica una obra de semántica y filosofía del lenguaje (*Investigación en torno al significado y la verdad*); y unos después vería la luz un libro suyo de epistemología (*Conocimiento humano*, 1948) que incluye una teoría original del razonamiento inductivo.

[21] Sobre Peano y la formalización de la aritmética véase más arriba, Capítulo XIV, § 8.

de las clases» o «paradoja de Russell», referente a «la contradicción acerca de las clases que no se pertenecen a sí mismas». Alarmado por su hallazgo, que parecía multiplicarse en miles de contradicciones, le comunicó la anomalía a Frege, quien respondió que «la aritmética se tambaleaba» («*die Arithmetik ist in Schwanken geraten*») [22].

La paradoja de las clases ha sido formulada así por CURRY [23]:

1. Clases y clases de clases. Parece intuitivamente evidente que disponemos de la idea de «clase», la cual nos permite coleccionar mentalmente objetos, como la clase de los pájaros, la clase de los hombres o la clase de los triángulos. Igualmente nos consta que podemos concebir «clases de clases». Si una especie animal es una clase, la clase de las especies animales es una clase de clases.

3. Clases propias e impropias. Dividamos ahora las clases, como propone RUSSELL, en dos grandes grupos: propias e impropias. *Propias* son las clases que no son miembro de sí mismas, como es el caso, por ejemplo, de la clase de los hombres o de la clase de las cucharillas de café (porque es obvio que ni la clase de los hombres es un hombre, ni la clase de las cucharillas de café es tampoco una cucharilla de café). *Impropias* son las clases que son miembro de sí mismas, como la clase de todas las clases o la clase de todos lo conceptos (porque es obvio que la clase de todas las clases es una clase, y la clase de todos los conceptos es un concepto).

4. La clase russelliana. Consideremos ahora una clase R, a la que llamaremos *clase de Russell* y la definiremos como «la clase de todas las clases propias».

5. Preguntemos ahora: ¿es R propia o impropia?

6. Al tratar de responder a esa pregunta quedamos envueltos en la siguiente paradoja:

Supóngase que R es propia. Al ser, por definición, «la clase de todas las clases propias», deberá ser miembro de sí misma. Pero, si es miembro de sí misma, entonces no es una clase propia.

Supóngase que R no es una clase propia. Siendo, como es, por definición, «la clase de todas las clases propias», no es miembro de sí misma. Pero, si no es miembro de sí misma, es una clase propia.

7. En símbolos (utilizando los conectores $\neg$, $\leftrightarrow$, los símbolos de igualdad, $=$, y pertenencia, $\in$, y X, Y como variables de clase o conjunto):

Para toda clase X:

(1) $X \in R \leftrightarrow \neg (X \in R)$ (por definición de R)
(2) $R \in R \leftrightarrow \neg (R \in R)$ (sustitución de X por R)

La línea (2) establece una equivalencia entre $R \in R$ y la negación de $R \in R$.

Ya en 1899 había descubierto CANTOR, aunque sin publicarla, una paradoja similar sobre el conjunto de todos los conjuntos: según un conocido teorema de la teoría de conjuntos (*teorema de Cantor*), la medida de tamaño o «cardinalidad» de un con-

---

[22] El 16 de junio de 1902 Russell comunicó su descubrimiento por carta a Frege, quien le contestó el día 22 con las palabras citadas. Ambas cartas figuran en la antología de J. VAN HEIJENOORT, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967, pp. 124-128.

[23] Haskell B. CURRY, *Foundations of mathematical logic*, McGraw, Nueva York, 1963, p. 4.

junto es inferior a la cardinalidad del conjunto de sus subconjuntos [24]; pero esto tiene por consecuencia que el conjunto mayor que pudiera pensarse no sería tal, puesto que lo superaría en cardinalidad el conjunto de sus subconjuntos.

De dos años antes data otra paradoja más técnica de Cesare BURALI-FORTI, matemático italiano de la escuela de Peano. Pero la fuerza de la paradoja de Russell estriba, como sucede con la antinomia clásica de EPIMÉNIDES, en que no requiere ningún conocimiento técnico previo. Opera con el sencillo concepto de «clase» o colección, que es un pilar básico del logicismo de Frege y de la teoría de conjuntos de Cantor, mas también del sentido común. Que de ese concepto se deduzca una contradicción es un escándalo no menos formidable para el hombre de la calle que para el hombre de ciencia.

Teoría de tipos y descripciones. Los filósofos de la ciencia han discutido recientemente sobre cuándo debe ser abandonada una teoría científica. Según Popper (tesis falsacionista), cuando quede refutada o «falsada» por los hechos. Según Kuhn (tesis pragmatista o instrumentalista), cuando uno disponga además de otra teoría alternativa en la que apoyarse.

Ante el escándalo de las paradojas, Frege reaccionó de acuerdo con el criterio popperiano y, tras algún infructuoso intento de corrección, terminó resignándose a pensar que sus treinta años de investigación en el proyecto logicista habían sido vanos. Otros, como el propio Cantor y Zermelo, optaron más pragmáticamente por revisar supuestos e introducir alguna corrección o modificación en la teoría. A esta tarea se entregó resueltamente por su parte el joven Russell: «Lo consideré casi como un desafío personal, y de haber sido necesario hubiese consumido todo el resto de mi vida en el intento de hallar una solución.» Su solución fue la *teoría de los tipos*, cuya versión más desarrollada apareció expuesta en el artículo «La teoría de los tipos como base de la lógica matemática», aparecido en 1908. Muchos opinan que es ésta la más importante contribución positiva de Russell a la lógica.

El gran matemático francés Henri POINCARÉ (1854-1912), que consideraba a la lógica matemática una empresa inútil, había sugerido que el talón de Aquiles de las paradojas consistía en incurrir de alguna manera en la falacia del círculo vicioso. Russell aceptó esta idea y, de acuerdo con ella, formuló su *principio del círculo vicioso*, una especie de ley de bloqueo de paradojas, que se podría enunciar de una manera sencilla diciendo que una proposición no puede ser argumento de sí misma (o sea, que es correcto pasar mediante ejemplificación, p. ej., de «$\bigwedge x Px$» a «Pa», pero no a «PPa», donde el predicado fuese «P» y el argumento «Pa»). La versión técnica que da Russell del principio es ésta: «ninguna totalidad puede contener miembros cuya definición incluya los miembros que la integran».

Para poder determinar con seguridad cuándo procede y cuándo no aplicar ese principio entra en juego la teoría russelliana de los tipos, que obliga a distinguir una serie de estratos en el lenguaje, que cabe describir así en orden ascendente:

1) Los términos o sujetos de las proposiciones atómicas, que denotan individuos y jamás pueden funcionar como predicados, constituyen el tipo primero y más bajo.

---

[24] Por ejemplo, un conjunto *C* que conste de dos elementos, *a* y *b*, tiene cuatro subconjuntos: el conjunto vacío, el conjunto unidad formado por uno de sus elementos, el formado por el otro, y el propio *C*, que es subconjunto de sí mismo.

2) La totalidad de las proposiciones atómicas y de las proposiciones cuantificadas en las que sólo las variables de individuo queden ligadas por la cuantificación son, dice Russell, «las *proposiciones de primer orden*, que constituyen el segundo tipo lógico».

3) Las proposiciones que versen sobre estas últimas —en cuyo caso los cuantificadores no afectan exclusivamente a símbolos de individuo— son «las *proposiciones de segundo orden*, que constituyen el tercer tipo lógico». Y así sucesivamente.

Para Russell estos tipos o estratos tienen una base en la realidad: las proposiciones de primer orden tratan de las propiedades que convienen inmediatamente a los objetos, y las de segundo orden de las propiedades que convienen no a los objetos, sino a las propiedades de éstos. Los tipos guardan entre sí una jerarquía de carácter lógico, cuya violación da lugar a proposiciones anómalas, que pueden estar gramaticalmente bien construidas, pero que no son verdaderas ni falsas, sino carentes de sentido. Y ése es el caso de las proposiciones paradójicas, que pueden dejar de serlo cuando se corrige la confusión de tipo o de orden en que incurren. Cuando el cretense Epiménides proclama que «todos los cretenses mienten» podríamos entender que está refiriéndose a una totalidad de proposiciones de primer orden *desde* una proposicion de segundo orden, sin incurrir, por tanto, en contradicción.

Ésta es la llamada *teoría simple* de tipos, que ha encontrado un grado relativamente general de aceptación. Por razones técnicas, sin embargo, Russell se creyó en la necesidad de complicarla construyendo una *teoría ramificada*. Queriendo eludir ciertas definiciones que parecían adolecer de circularidad, subdividió barrocamente cada tipo en *órdenes*, no tomando ya por criterio, como en la teoría simple, el correlato objetivo de las estructuras lingüísticas, sino el modo de definirlo.

En estos años de dedicación obsesiva a resolver el problema de las paradojas Russell sumó a la invención de la teoría de los tipos otro feliz hallazgo: la *teoría de las descripciones*, expuesta en su breve artículo «Sobre la denotación» (1905), que sería considerado por Ramsey modelo de contribución filosófica, aunque el director de la revista en que apareció se había resistido a publicarlo por extravagante. (De la teoría russelliana de las descripciones se ha tratado ya en el Capítulo XII, § 3, n. 8.)

Los «Principia Mathematica» y el ideal logicista. Russell se adhirió firmemente hasta el fin de su vida a la tesis logicista de que la matemática se deduce de la lógica. Pero en el realismo platónico profesado por muchos partidarios de esta tesis, es decir, en la creencia en la realidad de los objetos matemáticos, se mostró mucho menos perseverante y la cambió por un empirismo crecientemente radical.

Al desarrollo completo del programa logicista dedicó los tres grandes tomos de *Principia Mathematica* (1910-1913), la más ambiciosa y voluminosa de sus obras lógicas [25], que escribió en común con su colega Alfred North WHITEHEAD (1861-1947), matemático y filósofo de Cambridge.

Los *Principia* están escritos en un lenguaje simbólico en gran parte tomado de Peano. Proponen la teoría ramificada de tipos para obviar las paradojas y desarrollan axiomáticamente en el primer volumen la lógica matemática (cálculo proposicional y

---

[25] Antes había escrito *Los principios de la matemática* (1903), donde analizó y discutió los conceptos básicos del logicismo desde un punto de vista más filosófico. Pero el primer borrador de esta obra estaba ya terminado antes de que Russell descubriera la paradoja de las clases, aunque la versión final diera ya cuenta del problema y adelantara incluso una teoría simple de tipos.

cuantificacional más cálculo de clases y relaciones) y la matemática en los restantes (aritmética de cardinales finitos e infinitos, aritmética de relaciones, series y teoría de ordinales).

Desde el punto de vista formal el sistema de los *Principia* tiene graves defectos, entre ellos el olvido de la diferencia entre axiomas y reglas de inferencia. Pero la justificación crítica de sus contenidos deja más que desear. La ramificación de la teoría de los tipos, encaminada a bloquear definiciones indeseables, bloqueaba también definiciones imprescindibles para sacar adelante la teoría de números reales. Los autores de la obra pretendieron neutralizar este desagradable efecto invocando un *axioma de reducibilidad* que tenía trazas de proposición *ad hoc* y no convenció a casi nadie.

Como advierte Quine a propósito del logicismo de Russell, una cosa es que la lógica *más* la teoría de conjuntos pueda servir de fundamento a la matemática —es la tesis de Zermelo— y otra, aún por probar, que la teoría de conjuntos se derive de la lógica.

Las críticas de Wittgenstein y Ramsey. El *Tractatus logico-philosophicus* (1921) de Wittgenstein ocupa un lugar propio en la historia de la lógica y es a la vez, aunque no sólo, consecuencia y refutación de los *Principia.*

Inicialmente discípulo de Russell, Ludwig WITTGENSTEIN (1889-1951) cuestiona en esa obra tesis capitales de la filosofía lógica de su maestro. Si las constantes lógicas son interdefinibles y las proposiciones lógicas tautologías, cuyo valor de verdad se decide construyendo mecánicamente una tabla, los sistemas axiomáticos pierden mucho de su majestuosa arrogancia. El *Tractatus* sentencia además que «la lógica no dice nada sobre el mundo» y que a las palabras lógicas no les corresponde ningún contenido real, como tampoco les corresponde contenido textual a los puntos y paréntesis de un relato.

Un brillante discípulo de Russell y Wittgenstein que murió prematuramente, F. P. RAMSEY (1903-1930), mejoró con gran inteligencia el logicismo russelliano, dividiendo las paradojas en *lógicas* (de las que es ejemplo la paradoja de las clases) y *semánticas* (de las que es ejemplo la del mentiroso) y argumentando que bastaba la teoría simple de tipos para bloquear las primeras, mientras que las segundas no afectaban realmente al sistema de los *Principia.* Ello permitía eliminar la teoría ramificada (útil sólo como antídoto de paradojas semánticas) y con ella el enojoso axioma de reducibilidad.

b. *La teoría axiomática de conjuntos (sistema de Zermelo-Fraenkel).* En un memorable artículo de 1908, «Investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos», el matemático Ernst ZERMELO presentó la primera teoría axiomática de conjuntos. (A la teoría preaxiomática de Cantor se la llama desde entonces «clásica» o «ingenua».) ZERMELO define la teoría de conjuntos como «la rama de la matemática que se ocupa de investigar las nociones de "número", "orden" y "función" y de desarrollar los fundamentos lógicos de toda la aritmética y el análisis». Pero reconoce la grave amenaza que significa para ella «la antinomia russelliana del conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos como elementos»; y piensa que, para salvar «la teoría creada por Cantor y Dedekind», se impone someterla a severas restricciones que la alejen de la contradicción.

A este fin propone reducirla «a unas pocas definiciones y siete principios o axiomas», cuya consistencia no puede aún garantizar, aunque los cree suficientes para escapar a las paradojas.

El marco formal de la teoría es la lógica de primer orden con igualdad. El dominio o universo de objetos que se le fija es el de todos los conjuntos e individuos

(aludidos aquí unos y otros por cualesquiera minúsculas del alfabeto en calidad de metavariables.) El único símbolo primitivo o no definido, significando la idea de *ser un elemento de (o pertenecer a) un conjunto*, es ∈ (grafismo equivalente al ε griego):

$$x \in y$$

se lee como «*y* pertenece a (es un elemento de) *x*».

Tras introducir mediante definición las relaciones de *inclusión o subconjunto* (en símbolos: $x \subseteq y$), y de *inclusión propia o subconjunto propio* (en símbolos: $x \subset y$), Zermelo proponía en su artículo los siete axiomas siguientes:

1. *Axioma de extensionalidad*. Dos conjuntos son iguales si contienen los mismos elementos.

$$\wedge x \wedge y[\wedge z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$$

Dado que al axioma de extensionalidad determina totalmente por sus miembros un conjunto, éste puede ser denotado por una relación o lista de ellos, cualquiera que sea su orden, convencionalmente encerrada entre llaves:

$$\{a, b, c, ...\}$$

2. *Axioma de pares*. Para cualesquiera dos elementos x e y del dominio existe un conjunto *z* que contiene exactamente ambos.

$$\wedge x \wedge y \vee z \wedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

3. *Axioma de separación*. Si un predicado o relación está definido para todos los elementos de un conjunto dado, existe un subconjunto de éste que contiene como elementos precisamente aquellos elementos de dicho conjunto de los cuales ese predicado es verdadero.

$$\wedge x \vee y \wedge z(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \psi).$$

4. *Axioma del conjunto potencia*. Para todo conjunto existe su conjunto potencia, que es el conjunto cuyos miembros son todos los subconjuntos del primero.

$$\wedge x \vee y \wedge z(z \in y \leftrightarrow \wedge u(u \in z \rightarrow u \in x)).$$

5. *Axioma de unión*. Para todo conjunto x existe su correspondiente conjunto unión y, que contiene como elementos precisamente todos los elementos de los elementos de x.

$$\wedge x \vee y \wedge z(z \in y \leftrightarrow \vee t(t \in x \wedge z \in t)).$$

6. *Axioma de infinito*. Existe al menos un conjunto *Z* que contiene como elemento al conjunto vacío y que está constituido de manera que para cada uno de sus elementos, a, le corresponde también como elemento el conjunto {a}

(1) $0 \in Z$;
(2) si $a \in Z$, entonces $\{a\} \in Z$.

7. *Axioma de elección*. Para todo conjunto t de conjuntos no vacíos que no tengan ningún elemento en común, hay un conjunto u que consta de uno y sólo un elemento de cada uno de los conjuntos de t.

$$\bigwedge t[\bigwedge x[x \in t \to \bigvee z(z \in x) \wedge \bigwedge y(y \in t \wedge y \neq x \to \neg \bigvee z(z \in x \wedge z \in y))] \to \bigvee u \bigwedge x(x \in t \to \bigvee w \bigwedge \upsilon[\upsilon = w \leftrightarrow (\upsilon \in u \wedge \upsilon \in x)])].$$

Nota sobre el axioma de elección. Del axioma de elección ha escrito FRAENKEL que «es probablemente el más interesante y, a pesar de su tardía aparición, el más discutido de la matemática, después del axioma euclidiano de las paralelas». De la misma manera que la hipótesis de la falsedad de este postulado de Euclides ha dado lugar a la investigación de geometrías alternativas no euclidianas, también la hipótesis de la falsedad del axioma de elección abre la puerta a la investigación de una teoría no cantoriana o no zermeliana de conjuntos que incluye entre sus teoremas la negación de ese axioma.

Los cantorianos piensan que renunciar a él significaría, entre otras cosas, renunciar a otros pilares de la teoría de conjuntos como el principio de buena ordenación o la hipótesis general del continuo, con los que guarda relación de equivalencia lógica. En su *Introducción a la filosofía matemática* (1919), Bertrand RUSSELL ideó un ingenioso símil ilustrativo de la necesidad que, en su opinión, tiene el matemático de contar con el axioma de elección. Imaginemos un millonario que tiene el capricho de comprar una caja de un par de medias cada vez que compra una caja con un par de zapatos. Imaginemos también que posee ya un conjunto infinito de cajas de zapatos y otro igual de cajas de medias y que por un nuevo capricho quisiera comprobar cuántos zapatos y cuántas medias tiene eligiendo de cada caja un miembro de cada par para calcular luego el total. Tras abrir cada una de las infinitas cajas, habría que «elegir» un miembro de cada pareja. En el caso de las cajas de zapatos puede servir de ayuda el criterio de seleccionar en cada caso, por ejemplo, el zapato izquierdo. Pero en el caso de las medias no hay diferencia entre izquierda y derecha y la selección tendría que ser arbitraria. Los críticos del axioma dudan de que pueda garantizarnos la capacidad matemática de efectuar infinitas elecciones arbitrarias. Sus defensores, como Russell, se resisten a aceptar que podamos recorrer la colección de zapatos y no la de medias del millonario.

Axiomas añadidos posteriormente al sistema de ZERMELO. En 1921 FRAENKEL añadió a los anteriores el *axioma (o esquema de axioma) de reemplazo*. Para todo conjunto x y toda función con una variable v existe el conjunto que contiene exactamente los miembros determinados por fv, perteneciendo v a x.

$$\bigwedge u \bigwedge \upsilon \bigwedge w(\varphi(u, \upsilon) \wedge \varphi(u,w) \to \upsilon = w) \to [\bigwedge x \bigvee y \bigwedge \upsilon(\upsilon \in y \leftrightarrow \bigvee u(u \in x \wedge \varphi(u, \upsilon))].$$

Y en 1925 VON NEUMANN propuso un *axioma de fundación o restricción*. Todo conjunto no vacío contiene un miembro tal que no comparte con él ningún miembro común.

$$\bigwedge x\{\bigvee y(y \in x) \to \bigvee y[y \in x \wedge \neg \bigvee z(z \in x \wedge z \in y)]\}$$

El sistema de VON NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL. Opinando que las restricciones de ZERMELO a la teoría clásica de conjuntos eran tal vez demasiado drásticas, VON NEUMANN elaboró en los años veinte un sistema axiomático alternativo, más liberal, que conserva la idea cantoriana de generar conjuntos por comprensión, pero introduciendo a cambio una duplicidad de conceptos primitivos: la distinción entre «conjuntos» y «clases», consistente en que los conjuntos pueden ser miembros de otros conjuntos, pero no así las clases. Perfeccionado en la década de los treinta por BERNAYS, este sistema le serviría en 1938 de base a GÖDEL, con leves modificaciones, para establecer la compatibilidad del axioma de elección con el resto de los axiomas.

c. *El intuicionismo de Brouwer.* Una solución alternativa al problema de las paradojas, que se opone radicalmente al logicismo de Frege y Russell, es el *intuicionismo* de Brouwer.

Esta postura tiene que ver con la concepción que uno tenga de la idea de *infinito.* Más arriba recordé a propósito de la teoría clásica de conjuntos (§ 5, d), que según una importante tradición intelectual esa idea es válida mientras la entendamos solamente en un sentido potencial, como indican, por ejemplo, los puntos suspensivos con que sugerimos que la serie de los números naturales: 0, 1, 2, 3 ... puede crecer hasta el infinito. ARISTÓTELES y KANT son figuras representativas de esa tradición en filosofía. GAUSS [26], KRONECKER (que se enfrentó críticamente con Cantor) y POINCARÉ (que se enfrentó críticamente con Russell) la representan en matemática. Como ha escrito un importante lógico actual: «La matemática no-intuicionista que culminó en las teorías de Weierstrass, Dedekind y Cantor, y la matemática intuicionista de Brouwer difieren esencialmente en su concepción del infinito. En la primera el infinito es tratado como *actual* o *completo* o *existencial.* A un conjunto infinito se lo considera como una totalidad completa y existente, anterior o independiente de cualquier proceso humano de generación o construcción [...]. En la segunda el infinito es tratado sólo como *potencial* o *en devenir* o *constructivo*» [27].

El año 1908 (el mismo en que publicó Russell su artículo sobre teoría de tipos y Zermelo el suyo sobre la teoría axiomática de conjuntos) vio la luz un ensayo del matemático holandés L. E. J. BROUWER (1881-1966) titulado «La no fiabilidad de los principios de la lógica», que es un documento fundacional del intuicionismo, a propósito del cual ha escrito Weyl: «la lógica clásica ha sido abstraída de la matemática de conjuntos finitos [...]. Alguien que olvidó este limitado origen cometió después el error de otorgarle prioridad y superioridad sobre toda la matemática, y finalmente la aplicó, sin justificación, a la matemática de los conjuntos infinitos.»

Este criterio lleva a Brouwer a poner en tela de juicio principios y teoremas de la lógica y la matemática clásica cuya verdad se tenía por indudable. Uno de ellos es el venerable principio de exclusión de tercero: $A \vee \neg A$. Supongamos la proposición «Algunos números impares son perfectos». (Los números perfectos se caracterizan por ser iguales a la suma de los que los dividen sin dejar resto; por ejemplo, 1, 2 y 3 dividen a 6 sin dejar resto y $6 = 1 + 2 + 3$.) Dado que hasta el presente no se conoce ningún número impar que tenga esta propiedad ni ningún procedimiento para averiguarlo, y dado que no nos es posible recorrer, examinando uno por uno, la serie de los números naturales, el intuicionista juzga aventurado decir de la citada proposición

---

[26] Véase el pasaje de Gauss reproducido al principio de § 5, *d.*

[27] St. C. KLEENE, *Introducción a la metamatemática,* Tecnos, Madrid, 1974, p. 53.

que es verdadera o falsa. El principio de tercero excluido es indiscutiblemente válido para él en contextos finitos, en los que podemos decidir, por ejemplo, si los apóstoles fueron doce.

Esto implica mutilar drásticamente la lógica clásica. El intuicionista no duda, por ejemplo, de la validez irrestricta del principio de no contradicción. Pero al no otorgársela al principio de tercero excluido pone en duda también la clásica equivalencia, fundada en las leyes de De Morgan,

$$A \vee \neg A \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg A).$$

También desconfían los intuicionistas del valor de las pruebas de existencia por reducción al absurdo. Una prueba realmente válida de existencia en matemáticas debe ser, como dicen ellos, *constructiva*, entendiendo por tal que consiste en aducir un caso existente o, en su defecto, un método o procedimiento que permita construirlo, de la misma manera que la demostración real de que en una isla hay un tesoro no se efectúa deduciendo un absurdo de su negación, sino mostrando ese tesoro o aduciendo un mapa o un conjunto de instrucciones conducentes a encontrarlo.

Como es de suponer, los efectos que producen tales mutilaciones lógicas en la matemática clásica no son triviales. Por otra parte, la oposición del intuicionismo al logicismo se extiende también a la concepción de las relaciones entre la matemática y la lógica. Para el logicista la lógica tiene prioridad sobre la matemática, puesto que ésta se deduce de ella. Para el intuicionista la prioridad sería inversa, pues opina que en la experiencia del conocimiento humano viene primero el proceso matemático, como dato concreto de intuición —Kant diría «forma de intuición pura»— vinculado a nuestra experiencia primordial del tiempo, en el que se produce la acción de contar. Sólo después, como esquematización ulterior de procesos ya realizados y como formalización abstracta de nuestros cálculos y razonamientos matemáticos, vendría, según el intuicionismo, la construcción de la lógica.

d. *El formalismo de Hilbert.* Metodológicamente más exigente que el logicista, el intuicionista paga por ello el precio de la limitación de sus resultados. Situándose en una posición intermedia, la escuela *formalista* llegó a ser dominante, durante la década de los veinte, en la investigación de fundamentos de la matemática.

El lógico y matemático alemán David Hilbert (1862-1943), fundador de la escuela, estaba de acuerdo con el mayor grado de rigor de los métodos intuicionistas, pero consideraba necesario salvar las verdades de la matemática clásica y las conquistas de la teoría de conjuntos. Opinaba que la matemática es una síntesis de enunciados «reales» confirmados por la experiencia cotidiana, como los que expresan las operaciones finitas de sumar y restar, y enunciados «ideales», como la teoría de los números imaginarios; y argumentaba que también la ciencia física es un conglomerado de enunciados reales y suposiciones teóricas idealizadas de las que no se puede prescindir. En física «nos ocupamos predominantemente con teorías que no reproducen por completo el actual estado de cosas, sino que representan una *idealización simplificadora* del mismo, y en ello reside su significado».

El programa formalista de Hilbert consiste en unir la formalización axiomática con el rigor constructivo del siguiente modo: en un primer momento la matemática clásica, incluidas sus tesis infinitistas, es formalizada y axiomatizada; en una segunda fase se procura obtener, recurriendo sólo a métodos finitistas o constructivos, una prueba de que el sistema formal axiomático resultante —que queda como tal desprovisto de significado— es consistente, es decir, está libre de contradicción.

Al estudio de los sistemas formales con vistas a obtener la demostración de su consistencia lo llamó Hilbert *metamatemática* o *teoría de la prueba* (*Beweistheorie*). Esto implica, obviamente, la distinción entre teoría y metateoría, o si se quiere, entre tres niveles de teoría: uno, la teoría intuitiva que va ser formalizada; otro, la teoría formal así resultante, expresada en lenguaje formal puro; y un tercero, la metateoría (es decir, la metamatemática), que investiga, desde un lenguaje informal y con métodos constructivos, esa teoría formalizada. Hoy sabemos que Hilbert, en cuya escuela brillaron figuras como BERNAYS y VON NEUMANN, cantó victoria antes de tiempo, porque su discípulo GÖDEL dio al traste con el programa formalista.

e. *Platonismo y constructivismo.* Más de una vez se ha llamado la atención sobre la analogía que guardan las tres principales teorías rivales en el *problema de la investigación de fundamentos* de la matemática en las primeras décadas de nuestro siglo con las diversas escuelas que debatieron en la Edad Media sobre el *problema de los universales*. El debate actual de la investigación de fundamentos gira en torno al estatuto ontológico de la noción de conjunto y de número y al estatuto epistemológico de las leyes matemáticas. La controversia medieval se interesaba por el estatuto ontológico y epistemológico de nuestras ideas y conceptos universales.

El problema de los universales es, por otra parte, la versión medieval del problema platónico de las ideas: nadie duda de que el correlato real de los nombres propios que usamos en nuestro lenguaje son las cosas individuales; pero ¿hay algo en la realidad que corresponda, análogamente, a las palabras que usamos como nombres comunes? Los *realistas* sostenían con Platón que sí lo hay y que ese correlato ontológico de nuestros nombres y conceptos universales son las esencias de las cosas, que, igual que los individuos, existen en la realidad con independencia de nuestra mente; los *conceptualistas* pensaban que el significado de los nombres comunes que empleamos al hablar y escribir no es algo real, sino sólo una construcción de nuestra mente; y los *nominalistas*, como OCCAM, opinaban que esas palabras son únicamente *flatus vocis*, proferencia verbal, meras etiquetas a las que no corresponde nada mental ni menos aún real, pues fuera de la mente sólo existen los individuos reales y concretos, este o aquel hombre determinado, mas no «el hombre» en general.

La tesis *logicista* comparte con el ultrarrealismo medieval, y también con la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo, la adopción del *platonismo*. Frege era decididamente platónico, como también lo fue Russell en su primera época («la lógica trata del mundo real con la misma certeza que la zoología, aunque considerado en sus aspectos más abstractos y generales», escribió todavía en 1916); pero de manera gradual fue abandonando el platonismo por el empirismo al estilo de Hume, y de ahí que alguien lo haya descrito como un Hume con indumentaria conjuntista. La tesis *intuicionista* guarda paralelo con el conceptualismo, y la *formalista* vendría a ser una mezcla de conceptualismo y nominalismo. Intuicionismo y formalismo, y en un grado mayor el primero que el segundo, son hoy agrupados bajo la etiqueta de *construccionismo*, posición caracterizada por exigir de las pruebas lógicas y matemáticas un rigor que los platónicos partidarios de la noción de infinito actual y de la teoría axiomática de conjuntos califican de miopía por su limitado alcance.

§ 7. *La nueva crisis de fundamentos. El teorema de Gödel*

a. *Las revolucionarias aportaciones de los años treinta.* En la década de los treinta, la lógica matemática experimenta una cierta revolución de principios que descansa sobre la triple base de: 1) el descubrimiento, efectuado por Gerhardt GENTZEN,

de los cálculos de deducción natural; 2) el establecimiento de los teoremas de limitación de Kurt GÖDEL y A. CHURCH y de las teorías de la computación de Emil POST y Alan M. TURING, y 3) el desarrollo de la semántica debido a Alfred TARSKI.

Con los cálculos de deducción natural supongo ya familiarizado al lector. Las nociones fundamentales de la semántica de Tarski fueron consideradas en el Capítulo VIII, B, y la teoría de la computación de Turing lo fue en el Capítulo XVII.

b. *El teorema de Gödel.* En la historia de la ciencia el nombre de Kurt GÖDEL[28] irá indisolublemente unido al artículo «Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas afines», publicado en 1931[29], cuando su autor, a quien abrió fulminantemente las puertas de la fama mundial, contaba veinticinco años. Este artículo constituye una de las más importantes contribuciones a la lógica y a la matemática de los últimos siglos. Su principal resultado es el *teorema de incompletud de la aritmética* (universalmente conocido como «*teorema de Gödel*»), según el cual se establece que todo sistema formal deductivo que añada, cuando menos, al aparato de la lógica elemental los principios y reglas de la aritmética se enfrentará fatalmente con proposiciones bien construidas que no podrá ni demostrar ni refutar y que, por tanto, son «indecidibles»; la presencia de tales proposiciones delata que el sistema en cuestión, que se queda, por así decirlo, perplejo e indeciso al no poder dar cuenta deductiva de ellas, es «incompleto».

La materialización de este resultado se puede visualizar así: imaginemos un computador alimentado con una serie de proposiciones primitivas o «axiomas» de una teoría formalizada y una serie de reglas de construcción y de deducción de fórmulas. Si los axiomas son verdaderos y las reglas de deducción transmiten la verdad desde las premisas a las conclusiones, toda nueva fórmula que después de construida es deducida por la máquina será asimismo verdadera, y falsa si ésta la rechaza. El fenómeno constatado por el teorema de GÖDEL se produce cuando surge una fórmula que el computador no puede ni deducir ni refutar.

Innecesario es decir que para un sistema deductivo el diagnóstico de «incompletud» es tan enojoso como el de impotencia sexual para cualquier varón. Pero el artículo de GÖDEL no termina con este incómodo descubrimiento. Una consecuencia asimismo frustrante (denominada por algunos «*segundo teorema de Gödel*») del hallazgo de incompletud es la demostración de la incapacidad de la aritmética formal para probar por sus solos medios que posee la propiedad de «consistencia». (Como ya se indicó en el Capítulo XIII, un sistema formal deductivo es «coherente», «correcto» o «consistente» cuando está libre de contradicción.) Obviamente la prueba de consistencia es algo tan vital para un sistema deductivo como el certificado de normalidad psiquiátrica para un ciudadano respetable.

El artículo de GÖDEL dio al traste con el formalismo de su maestro HILBERT, vigente por entonces, y revolucionó los planteamientos de la lógica. El hecho de que se

---

[28] Su vida fue, como la de SPINOZA o KANT, preferentemente sedentaria. Vinculado en su juventud al Círculo de Viena, emigró, huyendo de los nazis, a los Estados Unidos, para establecerse definitivamente en Princeton hasta su muerte. Y su obra se reduce a un puñado de artículos de lógica matemática y excepcionalmente de física o de filosofía, casi todos ellos muy breves, pero de un increíble nivel de creatividad, concisión y rigor técnico.

[29] La serie «Cuadernos Teorema» ha publicado una traducción española de este artículo (Valencia, 1980). Otra puede encontrarse en la recopilación de obras de GÖDEL aparecida en Alianza, Madrid, 1981.

detectasen tamañas anomalías en un sistema lógico que pretendía formalizar una pieza del saber científico tan venerable y segura como es la aritmética elemental contribuyó a determinar la crisis de confianza de los años treinta —no menos estrepitosa que el *crash* bursátil de la época— en el optimismo de la razón. En el mundo científico de aquellas fechas los teoremas de GÖDEL hicieron tambalearse los cimientos de las matemáticas a la manera como, pocos años antes, las ecuaciones de incertidumbre de HEISENBERG habían sacudido los cimientos de la física.

c. *A través del espejo.* Pero la originalidad del artículo sobre proposiciones indecidibles no lo está sólo en sus resultados, sino en los métodos empleados para obtenerlos.

Una pieza clave de la estrategia de GÖDEL en esta empresa es su invención de un código o sistema de índices (procedimiento hoy llamado «gödelización») que correlaciona las fórmulas del sistema formal con un subconjunto de los números naturales. En virtud de este código, toda fórmula del sistema formal encuentra, como en un espejo. su imagen exacta en un número; y, recíprocamente, cada una de esas claves numéricas basta para identificar su correspondiente fórmula del sistema formal.

La correspondencia así obtenida hace posible que, tras la codificación numérica de las fórmulas, las proposiciones de la *metamatemática* (así llamaba HILBERT a la teoría que se ocupa de los sistemas formales deductivos y sus fórmulas) se transformen en proposiciones que versan sobre números, sin perder por ello su prístino sentido de proposiciones metamatemáticas. El resultado es una coordinación entre metamatemática y aritmética que ha sido parangonado con la correlación entre magnitudes espaciales y numéricas diseñada por DESCARTES al inventar la geometría analítica.

d. *La fórmula de Gödel.* El programa de la gödelización culmina con el diseño de una proposición formal (la célebre «fórmula de Gödel») que, convenientemente interpretada, afirma de sí misma su indemostrabilidad. Se trata de una fórmula que es autorreferente, como lo son las proposiciones paradójicas del tipo de «yo miento ahora», pero sin cometer ningún tipo de falacia. Porque las proposiciones paradójicas que predican de sí mismas —como es el caso de la que acabo de citar— su propia verdad o falsedad incurren en lo que RUSSELL llamó la falacia lógica del círculo vicioso. Al decir «yo miento ahora», ¿miento o digo la verdad? Si es verdad que miento, entonces lo que hago, antes que mentir, es decir la verdad; y por otra parte, si es falso que miento, es verdad que no miento. De esta nube de contradicciones queda libre la fórmula de GÖDEL. Su diferencia respecto de las proposiciones paradójicas está en que, aun siendo autorreferente, no predica de sí misma la cualidad *semántica* de la verdad (o su contraria, la falsedad), sino la cualidad *sintáctica* de la deducibilidad o demostrabilidad (o su contraria, la indemostrabilidad o indeducibilidad). Tanto GÖDEL como TARSKI pusieron por aquellos años de manifiesto que con la protección de complicados formalismos se puede navegar sin miedo a la contradicción por las pantanosas aguas de la autorreferencia lingüística. El filósofo Karl POPPER escribió, glosando esta circunstancia, un diálogo en el cual Sócrates, ardiente defensor del sentido común y del lenguaje ordinario. polemiza con el matemático Teeteto, que sostiene, inspirándose en argumentos de GÖDEL y TARSKI, la necesidad de recurrir a la «barbarie» de los formalismos y los lenguajes artificiales para resolver problemas de autorreferencia[30]. GÖDEL realizó en verdad un originalísimo *tour de*

[30] Este diálogo está recogido en el Capítulo 14 de *Conjeturas y refutaciones*.

force al construir, con ayuda de su código, la enigmática fórmula autorreferente y no paradójica que dice de sí misma «Yo soy indemostrable». Y cuando uno se acerca a tan singular artefacto no sabe muy bien si lo que tiene ante sus ojos es un trasunto gramatical del *cogito* cartesiano o una versión lógica de la *Metamorfosis* de KAFKA[31].

e. *La demostración del teorema y su corolario.* Llegados a este punto, el teorema de incompletud se obtiene probando que, si el sistema formal de la aritmética es consistente, entonces la fórmula autorreferente así construida no es ni demostrable ni refutable, y es, por tanto, indecidible.

Una vez establecido, por construcción, que la fórmula de GÖDEL, llamémosla **G**, convenientemente interpretada, afirma de sí misma su propia indemostrabilidad, y dando por sentado que las fórmulas falsas no son demostrables en el sistema formal de la aritmética elemental (hipótesis de consistencia), podemos preguntar: ¿es **G** demostrable o indemostrable? O, antes aún, ¿es **G** verdadera o falsa?

Si fuera falsa, tendríamos que negar su significado y decir que es demostrable; mas esto entraría en contradicción con la hipótesis de consistencia, según la cual las proposiciones falsas no son demostrables en un sistema que posea esta última propiedad. Pero, si **G** es verdadera, entonces, como su significado indica, no es demostrable.

Por otra parte: si **G** fuera demostrable, ello desmentiría su significado y la convertiría, por tanto, en falsa; pero, al ser falsa, no sería demostrable, por prohibirlo la hipótesis de consistencia. Semejante contradicción obliga a rechazar la suposición de que fuese demostrable. **G** es, por tanto, indemostrable y, en consecuencia, verdadera, Pero tampoco podría demostrarse la negación, $\neg$ **G**, de esa fórmula. Porque la negación de una fórmula verdadera es falsa, y por tanto indemostrable en un sistema supuestamente consistente. De aquí se sigue que la fórmula **G** es indecidible», es decir, ni demostrable ni refutable en el sistema en cuestión, del que queda, pues, demostrado que es incompleto[32].

---

[31] KRIPKE ha sugerido posteriormente la posibilidad de simular la fórmula de GÖDEL en el lenguaje natural. Supóngase la oración : «Alicia es bella», y que no hay aún nada decidido en nuestro lenguaje acerca de a quién o a qué pueda referirse la palabra «Alicia»; lo cual, obviamente, no permite decidir ni el sentido ni la verdad de la oración mentada. Pero supóngase además que ahora convenimos en dar a esa oración el nombre de «Alicia» y que, cautivado por la música de las palabras, digo que «Alicia es bella». Al hablar de la belleza de Alicia no me refiero en este caso a la bella nínfula, real o ficticia, que dio vida a las fantasías oníricas de Lewis CARROLL, sino que hablo de la belleza de la oración que habla de la belleza de Alicia.

Pero Alicia, por virtud del acuerdo referencial recién tomado, no es otra, precisamente, que la oración de la que hablo, la cual desde este momento cobra automáticamente sentido y —al menos para mí, si la belleza es sólo cuestión de gusto— verdad. Esta oración es claramente autorreferente y, aunque muy bien pudiera ser que un psiquiatra la calificase de narcisista, no incurre en la falacia del círculo vicioso, que es, como advirtió RUSSELL, el pecado mortal de las paradojas lógicas.

[32] Una excelente exposición, formalmente rigurosa, de la prueba del teorema puede encontrarse en la Sección 42 del Capítulo VIII de la *Introducción a la metamatemática* de St. C. KLEENE, Tecnos, Madrid, 1974. El libro de R. SMULLYAN *¿La dama o el tigre?*, Colección Teorema, Cátedra, Madrid, Capítulo 15, contiene una ingeniosa versión del teorema de GÖDEL con simplificaciones y actualizaciones del propio SMULLYAN.

Para que no haya dudas sobre el alcance de la conclusión, el autor hace notar que este resultado no vale solamente para la aritmética, sino para cualquier teoría matemática de igual o superior grado de complejidad, incluida la teoría de conjuntos; y agrega que el ensayo de remediar la incompletud adicionando al sistema formal como nuevo axioma la fórmula indecidible o haría más que quitarle a la hidra una de sus innumerables cabezas, porque, tarde o temprano, en el nuevo sistema el perturbador incidente se reproduciría con otra fórmula análoga, y así indefinidamente.

Del teorema de incompletud se sigue, como un corolario, que es imposible demostrar la consistencia del sistema formal de la aritmética sin salirse de este sistema («segundo teorema de incompletud»). Ello no excluye, como ya indicó GÖDEL en su artículo, la posibilidad de demostrar la consistencia utilizando elementos de un sistema de nivel superior. Esta posibilidad sería realizada pocos años más tarde por GENTZEN.

f. *Implicaciones filosóficas del teorema de Gödel.* En el campo técnico de la lógica y la matemática, el teorema de incompletud ha sido modificado y generalizado por ROSSER y KLEENE y ha estimulado cruciales investigaciones de CHURCH y TARSKI. El concepto de sistema formal ulteriormente precisado por TURING corrobora su generalidad.

La gödelización es hoy herramienta usual en la investigación de fundamentos de la matemática. Y la teoría de funciones recursivas se ha tornado en pieza básica de esa misma área y de la informática y la ciencias de la computación.

Mas un descubrimiento científico de semejante magnitud no puede menos de tener repercusiones filosóficas. Desde la perspectiva del filósofo el resultado de incompletud puede ser considerado como una tesis crítica, que fija o demarca los límites de competencia de la razón formal. De la misma manera que KANT puso límite en su *Crítica de la razón pura* a los sueños dogmáticos del racionalismo metafísico de LEIBNIZ y WOLFF, análogamente puede decirse que GÖDEL puso coto con su descubrimiento al imperialismo de la razón lógica, representado por el logicismo de RUSSELL o el formalismo de HILBERT. Esto no quiere decir, como GÖDEL comentó posteriormente, que su tesis sea irracionalista ni escéptica, sino sencillamente crítica: pues «no establece límites de la capacidad de la razón humana, sino más bien de las posibilidades del puro formalismo en matemáticas».

Pero, si el resultado de incompletud parece encajar con el criterio kantiano de racionalidad, el segundo resultado de GÖDEL —la tesis de la indemostrabilidad de la consistencia del sistema formal de la aritmética sin el recurso a un sistema o instancia racional de nivel superior— corrobora, según algunos, otra doctrina de gran peso en la historia del pensamiento. Es la teoría filosófica que describe al desarrollo de la razón como una odisea cuyo ritmo de progreso viene marcado por la interminable secuencia de tesis, antítesis y síntesis constitutiva del devenir dialéctico, épicamente narrado por HEGEL en su *Fenomenología del espíritu.*

En su obra *Gödel, Escher, Bach,* HOFSTADTER[33] relaciona el teorema de Gödel con el *leitmotiv* del «bucle extraño». Bucle es, en el argot informático, una estructura o estrategia repetitiva muy socorrida en programación. «El fenómeno del *bucle extraño* ocurre cada vez que, habiendo hecho un movimiento a través de los niveles de un sistema jerárquico, nos encontramos inopinadamente de vuelta en el punto de par-

[33] Douglas R. HOFSTADTER, *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle,* Tusquets, Barcelona, 1987.

tida.» Según HOFSTADTER, este fenómeno se detecta en los cánones y fugas contrapuntísticas de BACH, especialmente en la *Ofrenda musical,* y en los cuadros de ESCHER, como en la famosa litografía de las dos manos que se dibujan recíprocamente. Y tendría su forma más acabada, dentro del ámbito de la ciencia, en la frase autorreferencial e indecidible, ese *cogito* del siglo XX cuya construcción sirvió de base a GÖDEL para probar su revolucionario teorema.

La idea de bucle extraño es, a juicio de HOFSTADTER, la tensión entre lo finito y lo infinito, que afecta a la condición humana y se manifiesta incluso en actividades aparentemente tan poco trascendentes como el uso cotidiano de la serie de los números naturales. Y le sirve de hilo conductor para desarrollar una «visión gödeliana del universo», que detecta entre otros irónicos hallazgos el isomorfismo entre el teorema de GÖDEL y el dogma central de la biología molecular, entre el bucle gödeliano de autorreferencia y el bucle de autorreplicación de CRICK, ambos fundados en complicados mecanismos de codificación y traducción. En uno de los diálogos lúdicos de ese libro, Aquiles y la tortuga descubrirán fascinados que sus iniciales están inscritas en cada una de las bandas del pergamino en forma de doble hélice que guarda los secretos de nuestro código genético. (A y T son las iniciales de las bases adenina y timina, que, como es sabido, se aparean recíprocamente en las dos bandas del ADN.) El teorema de GÖDEL, dice HOFSTADTER, es comparable a una perla, y su método de demostración, a una ostra. El bucle extraño que le sirve de soporte no se percibe mirando a la perla, sino analizando el aparato demostrativo oculto en la ostra que la aloja.

Al serle entregado a GÖDEL el premio Einstein, el gran matemático VON NEUMANN dijo que su «aportación en lógica moderna es un hito que podrá divisarse desde remotas distancias en el espacio y en el tiempo» y que «el objeto de la lógica ha cambiado por completo su naturaleza y posibilidades con esta aportación».

§ 8. *La lógica en la segunda mitad del siglo XX*

En la segunda mitad del siglo XX la lógica simbólica se ha expansionado tanto y cubre tantas y tan diversas áreas que difícilmente puede ser cultivada en todos sus frentes por una sola persona. Entre las principales aportaciones técnicas a partir de los años cincuenta merecen destacarse la formulación del método de las tablas semánticas de E. W. BETH (después perfeccionado por R. SMULLYAN) y los hallazgos metalógicos de L. HENKIN y W. CRAIG. En el área de la filosofía de la lógica han tenido lugar interesantes investigaciones por parte de W. O. QUINE, P. F. STRAWSON y S. KRIPKE. Pero tal vez el fenómeno más llamativo de las últimas décadas sea el desarrollo formal de las llamadas «lógicas no clásicas»[34]: la lógica modal (inicialmente investigada por J. ŁUKASIEWICZ y C. I. LEWIS y posteriormente abordada con un enfoque semántico por R. CARNAP, S. KRIPKE, J. HINTIKKA y E. J. LEMMON) y las lógicas polivalentes (J. ŁUKASIEWICZ, J. B. ROSSER), libre (K. LAMBERT), intuicionista (A. HEYTING), dialógica (P. LORENZEN), combinatoria (H. B. CURRY), deóntica (G. H. VON WRIGHT), epistémica (J. HINTIKKA) y pragmática (R. MONTAGUE).

Una de las principales áreas de conexión de la lógica simbólica con la matemática ha sido la teoría de conjuntos. Las investigaciones de K. GÖDEL y P. J. COHEN sobre la

---

[34] Sobre lógicas no clásicas puede consultarse Susan HAAK, *Filosofía de las lógicas,* 2.ª ed., Cátedra, Madrid, 1991, caps. 9-11.

consistencia y la independencia de la hipótesis del continuo y el axioma de elección [35] se inscriben en este campo, como también la reciente teoría de modelos (A. TARSKI). El desarrollo de la teoría de algoritmos (A. A. MARKOV) y de las funciones recursivas (S. C. KLEENE, H. ROGERS) constituyen otra fundamental vertiente de conexión de la lógica con la matemática.

También conviene tener en cuenta las importantes aplicaciones de la lógica simbólica a la lingüística (N. CHOMSKY, R. MONTAGUE) y a la informática, particularmente la automatización del razonamiento (algoritmo de resolución de ROBINSON) y el desarrollo de la «inteligencia artificial»[36] (A. NEWELL, H. SIMON, J. M. MCCARTHY, M. MINSKY).

---

[35] Los números cardinales transfinitos, pieza clave de la teoría de conjuntos, constituyen una serie ordenada, la serie de los *álefs*: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$...

La *hipótesis del continuo* es la conjetura, hecha por CANTOR en 1880, de que, si el primero de esa serie se identifica con el cardinal del conjunto de los números naturales, el que inmediatamente sigue a éste es el cardinal del continuo o cardinal del conjunto de los números reales. Si se generaliza este punto de vista a todo miembro álef de la serie, resulta lo que se denomina la hipótesis *generalizada* del continuo. En 1938 GÖDEL demostró la consistencia o compatibilidad del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo con el resto de los axiomas del sistema formal de teoría de conjuntos. Base de su estrategia, que se desarrolló en el contexto del sistema axiomático de VON NEUMANN-BERNAYS, con algunas modificaciones introducidas por él, fue la utilización de un nuevo axioma (*postulado de constructibilidad*).

La conjetura de que ambas hipótesis, el axioma de elección y el problema del continuo, son independientes del resto del sistema (con el que serían compatibles, por consiguiente, tanto la afirmación como la negación de una y otra) fue demostrada en 1963 por Paul COHEN.

[36] Una interesante historia de la inteligencia artificial puede encontrarse en el libro de Pamela MCCORDUCK, *Máquinas que piensan. Una incursión personal en la historia y las perspectivas de la inteligencia artificial*, trad. de Dolores Cañamero, Tecnos, Madrid, 1991.

BIBLIOGRAFÍA

LÓGICA SIMBÓLICA

Manuales de lógica para estudiantes de humanidades

I. M. COPI, *Introducción a la lógica,* trad. de Néstor Míguez y G. Klimovsky, Eudeba, Buenos Aires, 1964.
R. C. JEFFREY, *Lógica formal,* trad. de Ángel d'Ors, Univ. Navarra, Pamplona, 1986.
Benson MATES, *Lógica matemática elemental,* 2.ª ed., trad. de Carmen García Trevijano, Tecnos, Madrid, 1987.
W. V. QUINE, *Los métodos de la lógica.* nueva edición, trad. de Juan José Acero y Nieves Guasch, Ariel, Barcelona, 1981.

El libro de JEFFREY es la mejor introducción al método de las tablas semánticas. MATES y QUINE se atienen al método de la deducción natural. El libro de COPI trata temas de lógica tradicional que muchos autores omiten.

J. M. ANDERSON y H. W. JOHNSTONE, *Natural Deduction*, Wadsworth Publ., Belmont, Calif., 1962.
J. BARWISE y J. ETCHEMENDY, *The Language of First Order Logic,* 3.ª ed., CLSI, Stanford, Calif., 1992.
Wilfrid HODGES, *Logic*, Penguin, Londres, 1977.
Donald KALISH y Richard MONTAGUE, *Logic. Techniques of Formal Reasoning*, Harcourt, Nueva York, 1964.
St. C. KLEENE, *Mathematical Logic*, Wiley, Nueva York, 1967.
K. LAMBERT y B. C. VAN FRAASSEN, *Derivation and Counterexample. An Introduction to Philosophical Logic*, Dickenson Publ., Belmont, Calif., 1972.
P. LORENZEN, *Formale Logik,* 4.ª ed., Gruyter, Berlín, 1970.
R. L. PURTILL, *Logic for Philosophers*, Harper, Nueva York, 1971.

El libro de HODGES es una buena introducción informal. Los de ANDERSON/JOHNSTONE y KALISH/MONTAGUE son textos clásicos de deducción natural. BARWISE/ETCHAMENDY utilizan tablas semánticas. KLEENE es el único autor que emplea ambos métodos, aunque su obra, excelente, es de orientación más matemática que humanista. LORENZEN expone su concepción «dialógica» de la lógica. Los libros de PURTILL y LAMBERT/VAN FRAASSEN se acercan más que otros a los intereses de la filosofía.

Libros de problemas y ejercicios

Lewis CARROLL, *El juego de la lógica y otros escritos*, trad. de Alfredo Deaño, Alianza, Madrid, 1988.
Carmen GARCÍA TREVIJANO, *El arte de la lógica*, Tecnos, Madrid, 1993.

Raymond M. SMULLYAN, *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos*, trad. de Carmen García Trevijano, Luis Manuel Valdés y Consuelo Vázquez de Parga, 10.ª ed., Cátedra, Madrid, 1993.
Raymond M. SMULLYAN, *¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos*. 4.ª ed., trad. de Montserrat Millán, Cátedra, Madrid, 1989.
Raymond M. SMULLYAN, *Alicia en el país de las adivinanzas*, 4.ª ed., trad. de Montserrat Millán, Cátedra, Madrid, 1991.

Muchos pasajes de los dos conocidos cuentos de Lewis Carroll sobre aventuras de Alicia contienen problemas y acertijos lógicos:

Lewis CARROLL, *Alicia en el país de las maravillas* y *A través del espejo*, trad. de Ramón Buckley, introducción y notas de Manuel Garrido, Cátedra, Madrid, 1992.

También es recomendable el uso de

J. BARWISE y J. ETCHEMENDY, *Tarski's World 4.0*, disco con juegos y ejercicios de lógica para ordenador, que acompaña al libro más arriba citado de estos autores.

Tratados y manuales de lógica de nivel superior

Alonzo CHURCH, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.
A. N. PRIOR, *Formal Logic*, 2.ª ed., Clarendon, Oxford, 1962.
R. M. SMULLYAN, *First Order Logic*, Springer, Berlín, 1968.
L. T. F. GAMUT, *Logic, Language, and Meaning*, 2 vols., University of Chicago Press, Chicago, 1991.

El primer volumen del *Handbook* de GABBAY y GUENTNER, citado después bajo el epígrafe «Filosofía de la lógica», trata la lógica de primer orden.

LÓGICA MATEMÁTICA

Método axiomático, Metalógica, Axiomatización de teorías matemáticas

Obras introductorias

J. N. CROSSLEY y otros, *¿Qué es la lógica matemática?*, trad. de Jesús Alcolea, introducción, revisión y notas de Luis Manuel Valdés, Tecnos, Madrid, 1983.
G. HUNTER, *Metalogic*, Macmillan, Londres, 1971.
Ernest NAGEL y James R. NEWMAN, *El teorema de Gödel*, trad. de Adolfo Martín, 2.ª ed., Tecnos, Madrid, 1994.
Alfred TARSKI, *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*, Espasa Calpe, Madrid, 1968.

Manuales y tratados modernos de lógica para matemáticos:

J. BARWISE, *Handbook of Mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977; J. BELL y M. MACHOVER, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977; H. D. EBBINGHAUS, J. FLUM y W. THOMAS, *Mathematical Logic*, 2.ª impr., Springer, Berlín, 1989; H. B. ENDERTON, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, Londres, 1972; P. LORENZEN, *Metamathematik*, Bibl. Institut, Mannheim, 1962; E. MENDELSON, *Introduction to Mathematical Logic*, 2.ª ed.,Van Nostrand, Nueva York, 1979; J. R. SHOENFIELD, *Mathematical Logic*, Adisson-Wesley, Reading, Mass., 1967.

Clásicos

Stephen Cole KLEENE, *Introducción a la metamatemática*, trad. de M. Garrido, con la colaboración de Rafael Beneyto, José Sanmartín y Enrique Casabán, Tecnos, Madrid, 1974. (La última gran obra clásica de la lógica matemática.)

AUTOMATIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO

Computabilidad y máquinas de Turing

Hans HERMES, *Introducción a la teoría de la computabilidad*, trad. de Manuel Garrido, Tecnos, Madrid, 1984.

George S. BOOLOS y Richard S. JEFFREY, *Computability and Logic*, 3.ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Marvin MINSKY, *Computation: Finite and Infinite Machines*, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, N.J., 1967.

Deducción automática

J. A. ROBINSON, *Logic: Form and Function. The Mechanization of Deductive Reasoning*, University Press, Edimburgo, 1979.

Larry WOS y otros, *Automated Reasoning. Introduction and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1984.

Robert KOWALSKI, *Logic for Problem Solving*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

M. R. GENESERETH y N. J. NILSSON, *Logical Foundations of Artificial Intelligence*, Morgan Kaufmann, Los Altos, Calif., 1987.

Internet

John NAUGHTON, *A Brief History of the Future. The Origin of the Internet,* Weidenfeld & Nicolson, Londres, 1999.

David PORTER (Com.), *Internet Culture,* Routledge, Londres, 1997.

Hubert L. DREYFUS, *On the Internet,* Routledge, Londres/Nueva York, 2001.

Filosofía de la lógica

W. V. QUINE, *Filosofía de la lógica*, trad. de Manuel Sacristán, Alianza, Madrid, 1973.
W. V. QUINE, *Palabra y objeto*, trad. de Manuel Sacristán, Labor, Barcelona, 1968.
Susan HAAK, *Filosofía de las lógicas*, 2.ª ed., trad. de A. Antón y T. Orduña, Cátedra, Madrid, 1991.
D. GABBAY y F. GUENTHNER (comps.), *Handbook of Philosophical Logic*, Reidel, Dordrecht, 1983 y ss., varios volúmenes.

Antologías y repertorios de clásicos de la lógica

I. M. BOCHENSKI, *Historia de la lógica formal*, trad. de Millán Bravo Lozano, Gredos, Madrid, 1967. (Antología de textos de grandes lógicos de todos los tiempos.)
Jean VAN HEIJENOORT (comp.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967. (Recopilación de textos clásicos de lógica matemática.)
Martin DAVIS (comp.), *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett, Nueva York, 1965. (Recopilación de textos de Gödel, Church, Turing, Kleene y Post sobre indecidibilidad y computabilidad.)
Jaakko HINTIKKA, *The Philosophy of Mathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1969. (Antología de textos recientes de lógica y filosofía de la matemática.)

Historia de la lógica

William y Martha KNEALE, *El desarrollo de la lógica*, trad. de Javier Muguerza, Tecnos, Madrid, 1972.
P. H. NIDDITCH, *El desarrollo de la lógica matemática*, 4.ª ed., trad. de Carmen García Trevijano, Cátedra, Madrid, 1987.
A. N. PRIOR, *Historia de la lógica*, trad. de A. Antón y E. Requena, revis. por M. Garrido, Tecnos, Madrid, 1976.